WTNP122 - Modélisation d'un barreau saturé en gaz compressible faiblement non-linéaire (écoulement monophasique) soumis à un choc de pression

Résumé :

Ce cas test a pour objectif de valider :
- les schémas volumes finis développés pour la modélisation des écoulements diphasiques.
- la modélisation hydraulique saturée en éléments finis D_PLAN_HS

Le problème diphasique va ici être dégénéré en un problème monophasique gaz dont on connaît la solution analytique. Il s'agit de la modélisation monodimensionnelle d'un barreau saturé en gaz soumis à un choc de pression.

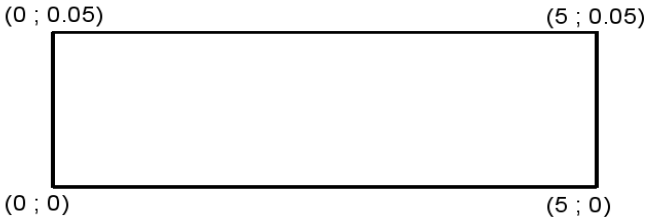
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

L'objectif de ce cas test est de comparer la solution obtenue avec les différents schémas à une solution analytique.

1.1 Géométrie

On considère un barreau $1\mathrm{D}$ de $5\mathrm{m}$ de long. Concrètement le domaine maillé fera $[0\mathrm{m},5\,m]\times[0\mathrm{m}\,;0{,}05\,m]$ (dans le cas de la modélisation en triangle, il est important de ne pas avoir de triangles trop « aplatis », le choix de la hauteur du domaine n'est donc pas anodin).



La durée de simulation est de $100\mathrm{s}$ et le nombre de pas de temps est de 100.

1.2 Propriétés des matériaux

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commande contient d'autres données de matériau qui ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

Gaz	Masse molaire $(kg\,.\,mol^{-1})$	$0{,}0001$
	Viscosité $(kg\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1})$	1
	Perméabilité relative (m^2)	1
Gaz dissous	Coefficient de Henry $(Pa\,.\,mol^{-1}\,.\,m^3)$	10000000000
Liquide	Perméabilité relative (m^2)	1
Paramètres homogénéisés	Perméabilité $K_{int}(m^2)$	10^{-7}
	Porosité	1
	Fick gaz $(m^2\,.\,s^{-1})$	0
	Fick liquide $(m^2\,.\,s^{-1})$	0

Tableau 1.2-1 : Propriétés des matériaux

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargements

Les conditions limites sont les suivantes :

- des conditions de Neumann à droite du domaine :

$$\frac{\partial(\delta P_g)}{\partial x}(t, x=5, y)=0\,Pa$$

- des condition de Dirichlet sur la partie gauche du domaine :

$$P_g(t, x=0, y)=0\,Pa$$

1.4 Conditions initiales

La variation de pression initiale de gaz par rapport à la pression de référence est de $\delta P_g(t=0, x, y)=10^4\,Pa$.

On a également $P_g^{ref}(t=0, x, y)=10^4\,Pa$ ce qui revient à étudier un problème faiblement non linéaire (pour être linéaire on aurait du choisir $P_g^{ref}(t=0, x, y)=10^{10}\,Pa$) (car on a : $P_g(t=0, x, y)=P_g^{ref}+\delta P_g(t=0, x, y)$).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution analytique

2.1 Méthode de calcul

Le problème monophasique instationnaire et monodimensionnel peut s'écrire sous une forme générale du type :

$$N\frac{\partial P}{\partial t}-K_{int.}\Delta P=0$$
$$P(t=0)=P_0$$
$$P(t,x=0)=0$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x,L)=0$$

Ce problème admet une solution analytique obtenue par développement en séries de Fourier.

$$P=\sum_{k=0}^{K}\frac{4\mathrm{P}_0}{(2\mathrm{k}+1)\pi}\exp\left(\frac{-K_{int}}{N}\omega_k^2 t\right)\sin(\omega_k x) \text{ avec } \omega_k=(k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}$$

Le nombre de termes K de cette série est déterminé de la façon suivante :

Soit n_x le nombre de points x_i où la solution est évaluée à un instant t.
On pose :

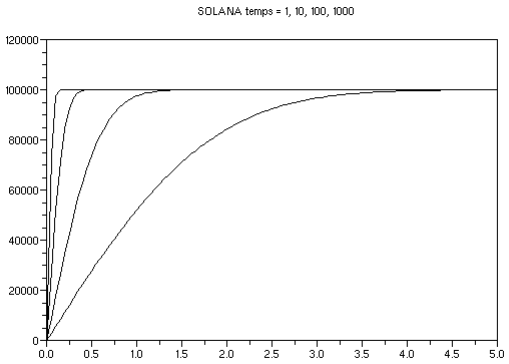
$$a_k^i=\frac{4}{(2\mathrm{k}+1)\pi}\exp\left(\frac{-K_{int}}{N}\omega_k^2 t\right)\sin(\omega_k x_i)$$

Si bien que la solution peut s'écrire : $P(x_i)=\sum_{k=0}^{K}P_0.a_k^i$

On choisit K tel que : $\frac{1}{n_x}\sqrt{\sum_{i=1}^{nx}(a_k^i)^2}<\epsilon$

En pratique nous avons pris $\varepsilon=10^{-10}$.

Les allures de la solution analytique aux temps 1, 10, 100, 1000 sont montrées sur la figure ci-dessous :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le tableau suivant donne le nombre de termes selon le temps :

Temps	Nombre de termes série
1	194
10	64
100	22
1000	8

Tableau 2.1-1 : Représentation du nombre de terme en fonction du temps

2.2 Hypothèses simplificatrices

On considère que le milieu est complètement saturé en gaz et on impose dans aster un pression de liquide nulle sur tous les nœuds. On impose une pression initiale de gaz P_g^{ref} et on donne des conditions aux limites qui correspondent à une variation de cette pression de référence, Soit alors δP_g cette variation de pression. L'équation de conservation de la masse de gaz s'écrira :

$$\frac{\partial(\varphi \delta P_g)}{\partial t} + div\left(\frac{K_{int} k_g}{\mu_g}(P_g^{ref} + \delta P_g)\, div(P_g^{ref} + \delta P_g)\right) = 0$$

En supposant δP_g petit devant P_g^{ref}, cette équation devient :

$$\frac{\partial(\varphi \delta P_g)}{\partial t} + \frac{K_{int} k_g}{\mu_g} P_g^{ref} \Delta(\delta P_g) = 0$$

C'est donc δP_g que l'on identifiera à la solution de l'équation analytique modèle.

De façon à retrouver les coefficients du problème modèle, on prendra :

$$\varphi = 1$$
$$k_g = \mu_g = 1$$

et on fera en sorte que

$$K_{int} P_{ref} = 10^{-3} .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2SUDA. Cette modélisation correspond à la modélisation Volume Finis décentrés sur les arêtes pour les mobilités (les termes fickiens sont centrés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

3.2 Caractéristiques du maillage

On utilise un maillage constitué de 100 éléments QUAD9.

3.3 Grandeurs testés et résultats

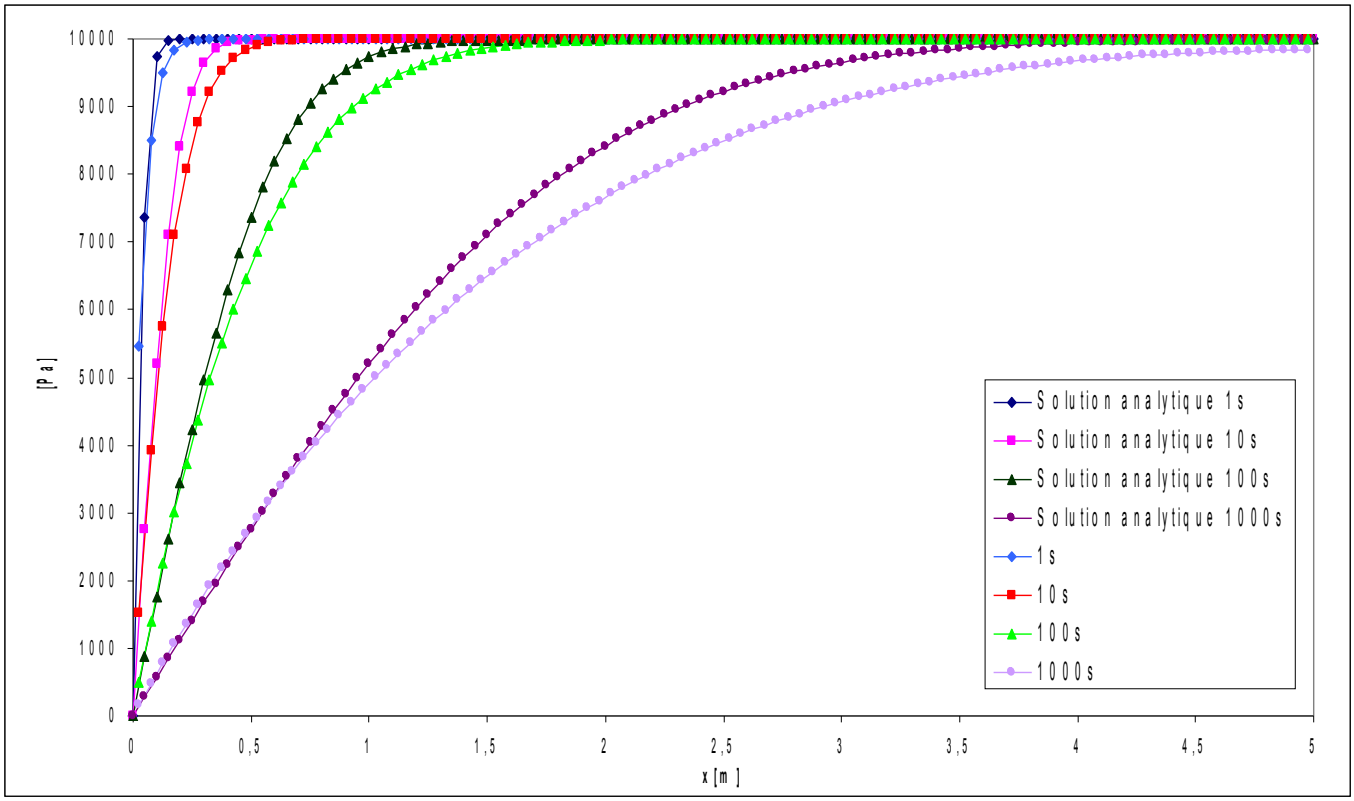


Illustration 1: Profils de pression de gaz

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On effectue des tests sur 4 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

Grandeur	Points (x, y)	Temps (s)	Type référence	Référence	Tolérance (%)
PRE2	$(0{,}075\,;\,0)$ *N304*	100	analytique	1331.0	9.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,0)$ *N304*	100	non régression	1444.1	1.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,1)$ *N293*	100	analytique	1331.0	9.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,1)$ *N293*	100	non régression	1444.1	1.0%
PRE2	$(0{,}05\,;\,0{,}05)$ *N469*	100	analytique	889.3176	12.0%
PRE2	$(0{,}05\,;\,0{,}05)$ *N469*	100	non régression	990.9	1.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,0{,}5)$ *NQ95*	100	analytique	1331.0	9.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,0{,}5)$ *NQ95*	100	non régression	1444.1	1.0%

Tableau 3.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Modélisation D_PLAN_HH2S. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis classiques. La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 100 éléments QUAD8.

4.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

Grandeur	Points (x, y)	Temps (s)	Type référence	Référence	Tolérance (%)
PRE2	$(0{,}05; 0)$ *N104*	100	analytique	889.3176	12.0%
PRE2	$(0{,}05; 0)$ *N104*	100	non régression	992.8591566774	1.0%
PRE2	$(0{,}05; 1)$ *N103*	100	analytique	889.3176	12.0%
PRE2	$(0{,}05; 1)$ *N103*	100	non régression	992.85915667759	1.0%

Tableau 4.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2SUDA. Cette modélisation correspond à la modélisation Volumes Finis décentrés sur les arêtes pour les mobilités (les termes fickiens sont centrés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA7.

5.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant en comparant les résultats à la solution analytique et sur 3 nœuds à 1 instant en réalisant un test de non régression.

Grandeur	Points (x, y)	Temps (s)	Type référence	Référence	Tolérance (%)
PRE2	$(0{,}075\,;\,0)$ *N360*	100	analytique	1331.0	11.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,0)$ *N360*	100	non régression	1454.4	1.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,0{,}025)$ *N505*	100	analytique	1331.0	10.0%
PRE2	$(0{,}075\,;\,0{,}025)$ *N505*	100	non régression	1450.4	1.0%
PRE2	$(0{,}016\,;\,0{,}0158)$ *NT70*	100	non régression	353.978	1.0%

Tableau 5.3-1: Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HH2S. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA6.

6.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

Grandeur	Points (x, y)	Temps (s)	Type référence	Référence	Tolérance (%)
PRE2	$(0{,}05\,;0)$ *N103*	100	analytique	889.3176	12.0%
PRE2	$(0{,}05\,;0)$ *N103*	100	non régression	992.699	1.0%
PRE2	$(0{,}05\,;0{,}05)$ *N203*	100	analytique	889.3176	12.0%
PRE2	$(0{,}05\,;0{,}05)$ *N203*	100	non régression	993.06	1.0%

Tableau 6.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation D_PLAN_HS. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est GAZ.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA6.

7.3 Grandeurs testées et résultats

On effectue des tests sur 2 nœuds à l'instant $t=100\,ans$ une première fois en comparant les résultats à la solution analytique et une seconde fois en réalisant un test de non régression.

Grandeur	Points (x, y)	Temps (s)	Type référence	Référence	Tolérance (%)
PRE2	$(0{,}05\,;\,0{,}05)$ *N103*	100	analytique	889.3176	12.0%
PRE2	$(0{,}05\,;\,0{,}05)$ *N103*	100	non régression	992.699	1.0%
PRE2	$(0{,}05\,;\,0)$ *N203*	100	analytique	889.3176	12.0%
PRE2	$(0{,}05\,;\,0)$ *N203*	100	non régression	993.06	1.0%

Tableau 7.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Synthèse des résultats

Ce cas test permet de tester les schémas volumes finis dans différentes configurations sur une modélisation d'écoulement gazeux:

- le schéma volumes finis décentré arête ;
- sur différents types de mailles (triangles et rectangles).

Ces mêmes cas sont également réalisés avec les schémas éléments finis classiques. Tous les résultats sont très proches de la solution analytique.

D'un point de vue performance, on préconisera l'utilisation du schéma décentré arête.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)