WTNP121 – Modélisation d'un barreau saturé en liquide compressible linéaire (écoulement monophasique) soumis à un choc de pression

Résumé :

Ce cas test a un double objectif :

- valider les schémas volumes finis développés pour la modélisation des écoulements diphasiques.
- valider la modélisation Eléments finis hydraulique saturée (modélisations G et H)

Le problème diphasique va ici être dégénéré en un problème monophasique dont on connaît la solution analytique. Il s'agit de la modélisation monodimensionnelle d'un barreau saturé en eau soumis à un choc de pression.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

L'objectif de ce cas test est de comparer la solution obtenue avec les différents schémas volumes finis à une solution analytique.

1.1 Solution analytique

Le problème monophasique instationnaire et monodimensionnel peut s'écrire sous une forme générale du type :

$$N \frac{\partial P}{\partial t} - K_{int.} \Delta P = 0$$

$$P(t=0) = P_0$$

$$P(t, x=0) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x=L) = 0$$

Ce problème admet une solution analytique obtenue par développement en séries de Fourier.

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4P_0}{(2k+1)\pi} \exp\left(\frac{-K_{int}}{N} \omega_k^2 t\right) \sin(\omega_k x) \quad \text{avec} \quad \omega_k = (k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L}$$

On peut réduire cette série à un nombre fini K de termes, en fonction de l'instant calculé.
Ce nombre de termes est déterminé de la façon suivante :

Soit n_x le nombre de points x_i où la solution est évaluée à un instant t

On pose : $a_k^i = \frac{4}{(2k+1)\pi} \exp\left(\frac{-K_{int}}{N} \omega_k^2 t\right) \sin(\omega_k x_i)$

Si bien que la solution peut s'écrire : $P(x_i) = \sum_{k=0}^{K} P_0 . a_k^i$

On choisit K tel que : $\frac{1}{n_x} \sqrt{\sum_{i=1}^{nx} (a_k^i)^2} < \epsilon$

En pratique, nous avons pris $\epsilon = 10^{-10}$.
Les allures de la solution analytique aux temps 1, 10, 100, 1000 sont montrées sur la figure 1 :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

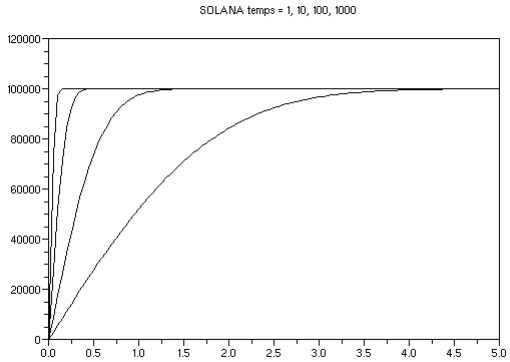


Figure 1: Représentation des solutions analytique

Le tableau suivant donne le nombre de termes selon le temps :

Instants	Nombre termes série
1	194
10	64
100	22
1000	8

Tableau 1.1-1 : Représentation du nombre de terme en fonction du temps

1.2 Hypothèses simplificatrices

On considère que le milieu est complètement saturé en eau et on impose une pression de gaz nulle sur tous les nœuds. Le système biphasique se ramène alors à résoudre le problème suivant :

$$\frac{\partial(\varphi \rho_l)}{\partial t} - div(K_{int}\frac{\rho_l k_{rl}}{\mu_l}\nabla P_l) = 0$$

- Le liquide est incompressible : $\rho_l = cst$
- La matrice est compressible et la porosité évolue proportionnellement à la pression de liquide : $\frac{\partial \varphi}{\partial P_l} = E_m$

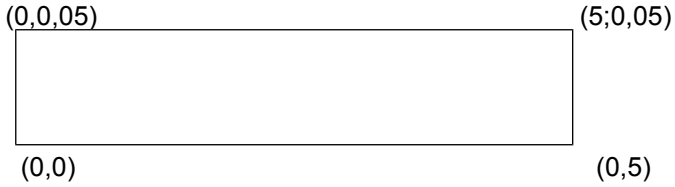
L'équation de conservation de la masse pour le liquide s'écrit donc :

$$\rho_l E_m \frac{\partial P_l}{\partial t} - div(K_{int}\frac{\rho_l k_{rl}}{\mu_l}\nabla P_l) = 0$$

1.3 Géométries

On considère un barreau $1\mathrm{D}$ de $5\mathrm{m}$ de long. Concrètement le domaine maillé fera $[0\mathrm{m}, 5m]\times[0\mathrm{m}; 0{,}05m]$ (dans le cas de la modélisation en triangle, il est important de ne pas avoir de triangles trop « aplatis », le choix de la hauteur du domaine n'est donc pas anodin).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



1.4 Maillages

On a testé ce cas sur deux maillages, l'un composé de 100 quadrangles (modélisations A ,B et G) et l'autre de 200 triangles (modélisations C et D).

Les modélisations E, F et H consituent une extension $3D$ (barreau de section 1×1), le maillage est constitué de 100 hexaèdres.

1.5 Propriétés des matériaux

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commandes contient d'autres données de matériau qui ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

Liquide	Perméabilité relative	1
	Viscosité $(kg.m^{-1}.s^{-1})$	1
	Module de compressibilité	0
	Densité du liquide (kg/m^3)	1
Paramètres homogénéisés	Perméabilité (m^2)	10^{-13}
	Porosité	$0,5$
	Emmagasinement	10^{-10}
	Saturation en liquide	1

Tableau 1.5-1 : Propriétés des matériaux

1.6 Conditions aux limites et initiales

Les conditions limites sont les suivantes :

- des conditions de Neumann à droite du domaine : $\frac{\partial P_l}{\partial x}(t, x=5, y)=0$
- des conditions de Dirichlet sur la partie gauche du domaine : $P_l(t, x=0, y)=0$

La pression initiale de liquide est de $P_l(t=0, x, y)=10^4 Pa$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.7 Durée de simulation et pas de temps

La durée de simulation est de $100\,s$ et le nombre de pas de temps est de 100.

Remarque : Par soucis d'information, les tests suivants sont présentés jusqu'à $1000\,s$ alors qu'on limite sans Code_Aster les simulations à $100\,s$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

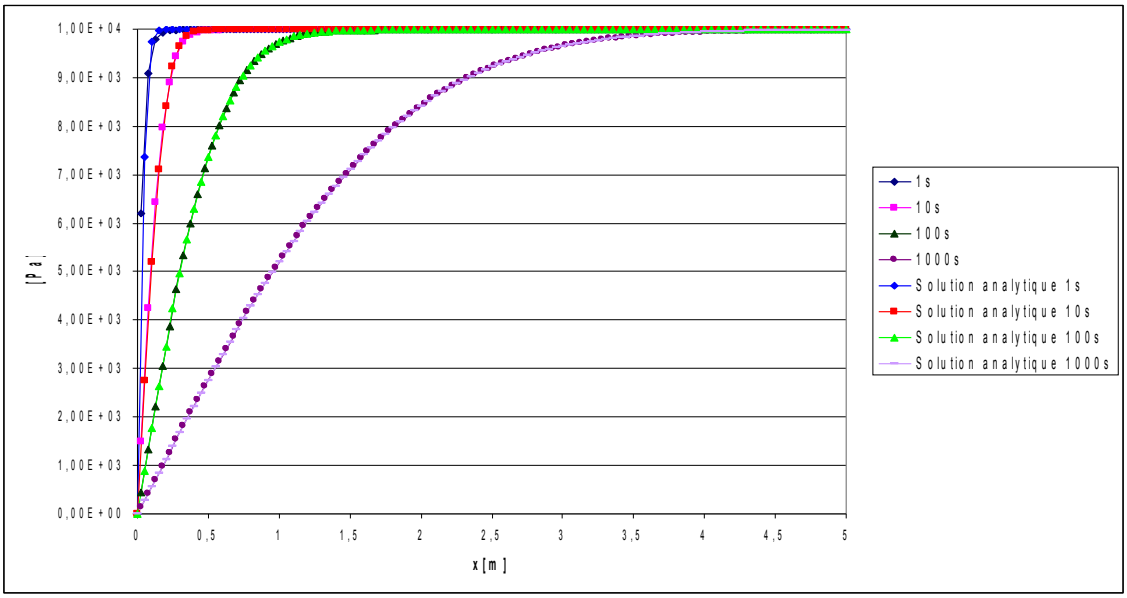
2 Modélisation A

2.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation D_PLAN_HH2SUDA. Cette modélisation correspond à la modélisation Volume Finis décentrés sur les arêtes pour les mobilités (les termes fickiens sont centrés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE. On utilise un maillage composé de 100 éléments QUAD9.

2.2 Résultats

On trace les profils de pression de liquide à différents instants ainsi que la solution analytique à ces mêmes instants. Les résultats sont identiques.



Dessin 2: Pression de liquide

2.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 4 nœuds à $t=100\,s$ en comparant les résultats à la solution analytique. On teste également le premier noeud en non régression avec une erreur relative autorisée de $0{,}01\,\%$.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(0{,}075\,;0)$ *N304*	100 s	-1,33E+003	7 %
$(0{,}075\,;0{,}5)$ *NQ95*	100 s	-1,33E+003	9 %
$(0{,}075\,;1)$ *N293*	100 s	-1,33E+003	7 %
$(0{,}05\,;0{,}05)$ *N469*	100 s	-8,93E+002	7,5 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tableau 2.3-1 : valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation B

3.1 Caractéristiques de la modélisation B

Modélisation D_PLAN_HH2S. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis classiques. La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE. Le maillage est constitué de 100 éléments QUAD8.

3.2 Résultats

Les résultats sont identiques à ceux obtenus avec la modélisation volumes finis décentrés sur l'arête (modélisation A).

3.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 2 nœuds à $t=100\,s$ en comparant les résultats à la solution analytique. On teste également le premier nœud en non régression avec une erreur relative autorisée de $0{,}01\,\%$.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(0{,}05\,;0)$	100 s	-8,89E+002	1 %
$(0{,}05\,;1)$	100 s	-8,89E+002	1 %

Tableau 3.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation C

4.1 Caractéristiques de la modélisation C

Modélisation D_PLAN_HH2SUDA. Cette modélisation correspond à la modélisation Volumes Finis décentrés sur les arêtes pour les mobilités (les termes fickiens sont centrés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE. Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA7.

4.2 Résultats

Les résultats sont identiques à ceux obtenus avec la modélisation volumes finis décentrés sur l'arête (modélisation A).

4.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 3 nœuds à $t=100\,s$.
Sur deux nœuds nous avons comparés les résultats à la solution analytique et sur le troisième nœud nous avons réalisés un test de non régression.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(0{,}075\,;0)$ *N360*	100 s	-1,33E+003	3%
$(0{,}075\,;0{,}025)$ *N505*	100 s	-1,33E+003	3%
$(1675\,;0{,}0158)$ *NT70*	100 s	-3,13E+002	0,01%

Tableau 4.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation D

5.1 Caractéristiques de la modélisation D

Modélisation D_PLAN_HH2S. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE. Le maillage est constitué de 200 éléments TRIA6.

5.2 Résultats

Les résultats sont identiques à ceux obtenus avec la modélisation volumes finis décentré sur l'arête (modélisation A).

5.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 2 nœuds à $t=100\,s$ en comparant les résultats à la solution analytique. On teste également le premier nœud en non régression avec une erreur relative autorisée de $0{,}01\,\%$.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(0{,}05\,;0{,})$ *N203*	100 s	-8,93E+002	3 %
$(0{,}05\,;0{,}005)$ *N103*	100 s	-8,93E+002	3 %

Tableau 5.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation E

6.1 Caractéristiques de la modélisation E

Modélisation 3D_HH2SUDA. Cette modélisation correspond à la modélisation Volume Finis décentrés sur les arêtes pour les mobilités (les termes fickiens sont centrés). La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE. Le maillage est constitué de 100 éléments HEXA27.

6.2 Résultats

Les résultats sont identiques à ceux obtenus avec la modélisation volumes finis décentré sur l'arête (modélisation A).

6.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 3 nœuds à $t=100\,s$ en comparant les résultats à la solution analytique. On teste également le premier nœud en non régression avec une erreur relative autorisée de $0{,}01\,\%$.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(-49{,}5\,;0{,}5\,;0)$ *NH4*	100 s	-8.263E+03	1 %
$(-1{,}5\,;0\,;-0{,}5)$ *NH195*	100 s	-9.990E+03	1 %
$(-49{,}5\,;0\,;0{,}5)$ *NH1*	100 s	-8.263E+03	1 %

Tableau 6.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation F

7.1 Caractéristiques de la modélisation F

Modélisation 3D_HH2S. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est LIQU_AD_GAZ_VAPE. Le maillage est constitué de 100 éléments HEXA20.

7.2 Résultats

Les résultats sont très proches de ceux obtenus avec la modélisation volumes finis décentrés sur l'arête (modélisation A).

7.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 3 nœuds à 1 instant en comparant les résultats à la solution analytique. On teste également le premier nœud en non régression avec une erreur relative autorisée de $0,01\,\%$.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(-49;-0,5;0,5)$ *N6*	100	-9.090E+03	1 %
$(-47:-0,5;0,5)$ *N16*	100	-9.989E+03	1 %
$(-48;-0,5;-0,5)$ *N716*	100	-9.947E+03	1 %

Tableau 7.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation G

8.1 Caractéristiques de la modélisation G

Modélisation D_PLAN_HS. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est LIQU_SATU. Le maillage est constitué de 100 éléments QUAD8.

8.2 Résultats

Les résultats sont très proches de ceux obtenus avec la modélisation éléments finis D_PLAN_HH2S (modélisation B).

8.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant en comparant les résultats à la solution analytique.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(0{,}5\,;0)$ *N104*	100	-8.89E+02	1 %
$(0{,}5\,;1)$ *N103*	100	-8.89E+02	1 %

Tableau 8.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation H

9.1 Caractéristiques de la modélisation H

Modélisation 3D_HS. Cette modélisation correspond à la modélisation Elements Finis. La loi de couplage hydraulique est LIQU_SATU. Le maillage est constitué de 100 éléments HEXA20.

9.2 Résultats

Les résultats sont très proches de ceux obtenus avec la modélisation éléments finis D_PLAN_HH2S (modélisation B).

9.3 Valeurs testées

On effectue des tests sur 2 nœuds à 1 instant en comparant les résultats à la solution analytique.

Points (x, y)	**Temps** (s)	**PRE1 *Aster***	**Erreur relative autorisée (%)**
$(0{,}05\,;-0{,}5\,;-0{,}5)$ *N108*	100	-8.89E+02	1 %
$(0{,}05\,;0{,}5\,;0{,}5)$ *N306*	100	-8.89E+02	1 %

Tableau 9.3-1 : Valeurs testées

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Synthèse des résultats

Ce cas test permet de tester le schéma volumes décentré arête finis dans différentes configurations :

- le schéma volumes finis décentré arête
- en $2D$ et en $3D$
- sur différents types de mailles (triangles et rectangles pour le $2D$, hexaèdres pour le $3D$)

Ces mêmes cas sont également réalisés avec les schémas éléments finis classiques. Tous les résultats sont identiques à la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)