WTNP106 - Chauffage d'un milieu poreux désaturé avec air dissous

Résumé :

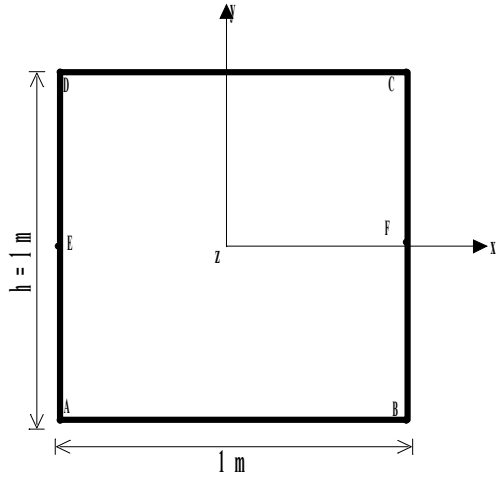
On chauffe un milieu poreux dont les pores sont remplis d'un mélange d'eau (liquide et vapeur) et d'air (sec et dissous dans l'eau). La saturation initiale en liquide est de 50%, le chargement est un flux thermique uniforme sur les bords du domaine. La modélisation faite par un seul élément correspond à la modélisation d'un problème homogène en espace.

La solution de référence est une solution analytique approchée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Coordonnées des points (m) :

A	-0,5	-0,5	C	0,5	0,5
B	0,5	-0,5	D	-0,5	0,5

1.2 Propriétés du matériau

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commandes contient d'autres données de matériau (modules d'élasticité, conductivité thermique …) qui finalement ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

Eau liquide	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	10^3
	Chaleur à pression constante ($J.K^{-1}$)	4180
	coefficient de dilatation thermique du liquide (K^{-1})	0.
	Viscosité dynamique de l'eau liquide ($Pa.s$)	0.001
	Perméabilité relative à l'eau	$kr_w(S)=1$
Vapeur	Chaleur massique ($J.K^{-1}$)	1900
	Enthalpie initiale (chaleur latente de vaporisation) J/Kg	2,5E6.
	Masse molaire($kg.mol^{-1}$)	0,018
Gaz	Chaleur massique ($J.K^{-1}$)	1900
	Masse molaire ($kg.mol^{-1}$)	0,018
	Perméabilité relative au gaz	$kr_{gz}(S)=1$
		$1,8^{E}$-5

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	Viscosité du gaz ($kg.m^{-1.s^{-1}}$)	
Air dissous	Chaleur massique ($J.K^{-1}$)	1900
	Constante de Henry ($Pa.m^{3.}mol^{-1}$)	50000
Squelette	Capacité calorifique à contrainte constante ($J.K^{-1}$)	1050
Etat initial	Porosité	0,3
	Température (K)	300
	Pression de gaz (Pa)	1E5
	Pression de vapeur (Pa)	3700
	Saturation initiale en liquide (Pa)	0,5
Constantes	Constante des gaz parfaits	8,315
Coefficients homogénéisés	Masse volumique homogénéisée ($kg.m^{-3}$)	2200
	Isotherme de sorption	$S(P_c) = 0.5 - 10^{-12}(P_c - P_{vp}^0 - P_c^0)$ Avec $P_{vp}^0 = 3700$ $P_c^0 = 0$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur tous les bords :

Flux thermique $\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} = 10^6$

Flux hydraulique nul

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

2.1.1 Calcul de la pression de vapeur à partir de la température

Nous supposons la courbe de saturation linéaire. Elle s'écrit donc :

$$S = S_0 + S' \Delta P_c \qquad \text{éq 2.1.1-1}$$

L'équation [éq 2.2.3.3-2] du document de référence [R7.01.11] donne alors :

$$\begin{aligned}
\Delta m_w &= \rho_w \phi S' \Delta P_c \\
\Delta m_{vp} &= (\rho_{vp} - \rho_{vp}^0)\phi^0(1 - S_0) - S' \rho_{vp}^0 \phi^0 \Delta P_c \\
\Delta m_{ad} &= (\rho_{ad} - \rho_{ad}^0)\phi^0 S_0 + S' \rho_{ad}^0 \phi^0 \Delta P \\
\Delta m_{as} &= (\rho_{as} - \rho_{as}^0)\phi^0(1 - S_0) - S' \rho_{as}^0 \phi^0 \Delta P_c
\end{aligned} \qquad \text{éq 2.1.1-2}$$

On écrit que la masse totale d'eau et la masse totale d'air sont conservée (car il n'y a pas de flux d'eau ni de gaz au bord) et on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Delta m_w + \Delta m_{vp} = 0 \quad \Rightarrow \\
&(\rho_w - \rho_{vp}) S' \Delta P_c + (\rho_{vp} - \rho_{vp}^0)(1 - S_0) = 0 \qquad \text{éq 2.1.1-3} \\
&\Delta m_{ad} + \Delta m_{as} = 0 \quad \Rightarrow \\
&(\rho_{ad} - \rho_{as}) S' \Delta P_c + (\rho_{as} - \rho_{as}^0)(1 - S_0) + (\rho_{ad} - \rho_{ad}^0) S_0 = 0 \qquad \text{éq 2.1.1-4}
\end{aligned}$$

[R7.01.11] [éq 4.1.4-1] donne par ailleurs :

$$\ln\left(\frac{p_{vp}}{p_{vp}^0}\right) = \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}\left(\frac{1}{RT} - \frac{1}{K_H}\right)(p_{gz} - p_{gz}^0) + \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 K_H}(p_{vp} - p_{vp}^0) - \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 RT^+}(p_c - p_c^0) + \frac{M_{vp}^{ol} R}{\rho_w^0 K_H}(p_{vp} - p_{gz}) \ln\left(\frac{T}{T^0}\right) + \frac{M_{vp}^{ol}}{R}\int_{T^0}^{T} (h_{vp}^m - h_w^m)\frac{dT}{T^2} \qquad \text{éq 2.1.1-5}$$

Le couplage des équations [éq 2.1.1-3], [éq 2.1.1-4] et [éq 2.1.1-5], auquel il faut ajouter l'équation des gaz parfaits pour la vapeur, l'air sec et l'air dissous ainsi que la loi de henry est un système fortement non linéaire que nous résoudrons en petites perturbations, ce qui permet de le linéariser.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tous calculs faits, on obtient :

$$\Delta P_{vp}\left[\left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\left(+\frac{(1-S_0)M_{vp}^{ol}}{RT^0}\right) - \left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\right]\Delta P_w + \Delta P_{as}\left[\left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\left(1 - \frac{RT^0}{K_H}\right)\right] +$$
$$\left[-\left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\left(\frac{RP_{as}}{K_H} - \frac{M_{vp}^{ol}P_{vp}^0}{RT^{0^2}}(1-S_0)\right)\right]\Delta T = 0$$

$$\Delta P_{vp}\left(\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\right) - \left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\Delta P_w + \Delta P_{as}\left[\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\left(1 - \frac{RT^0}{K_H}\right) + M_{vp}^{ol}\left(\frac{S_0}{K_H} + \frac{(1-S_0)}{RT^0}\right)\right] +$$
$$\left[-\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\left(\frac{RP_{as}}{K_H} - \frac{M_{vp}^{ol}P_{as}}{RT^{0^2}}(1-S_0)\right)\right]\Delta T = 0$$

$$\Delta P_{vp}\left[-\frac{1}{P_{vp}^0}\right] + \frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 RT}\Delta P_w +$$
$$\left[\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}\frac{P_{as}}{K_H T^0}(1-R) + \frac{M_{vp}^{ol}}{R}\frac{h_{vp}^m - h_w^m}{T^{0^2}}\right]\Delta T = 0$$

éq 2.1.1-6

2.1.2 Calcul de la température

L'équation [éq 3.2.4.3-1] du document de référence [R7.01.11] donne :

$$\Delta Q = -3\alpha_{gz}^m T\Delta p_{gz} + C_\varepsilon^0 \Delta T \qquad \text{éq 2.1.2-1}$$

(puisque les autres coefficients de dilatation sont nuls).

L'équation [éq 3.2.4.3-2] donne :

$$\alpha_{gz}^m = \frac{\phi(1-S_{lq})}{3T} \qquad \text{éq 2.1.2-2}$$

On obtient donc :

$$\Delta Q = -\phi(1-S_{lq})(\Delta p_{vp} + \Delta p_{as}) + C_\varepsilon^0 \Delta T \qquad \text{éq 2.1.2-3}$$

Dans ce problème, ΔQ n'est rien d'autre que la chaleur apportée par unité de volume.

En appelant Vol le volume total de la pièce et $Surf$ sa surface latérale et Δt le temps d'application des flux :

$$\Delta Q = \Delta t \frac{Surf}{Vol}\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} \qquad \text{éq 2.1.2-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.3 Système à résoudre

$$\begin{bmatrix} \left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S + \dfrac{(1-S_0)M_{vp}^{ol}}{RT^0} & -\left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S & -(1-S_0)p_{vp}^0\dfrac{M_{vp}^{ol}}{RT^{0^2}} - \left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\dfrac{RP_{as}^0}{K_H} & \left(\rho_w - \rho_{vp}^0\right)S\left(1 - \dfrac{RT^0}{K_H}\right) \\ \left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S & -\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S & -\left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\dfrac{RP_{as}^0}{K_H} - \dfrac{M_{vp}^{ol}P_{as}^0}{RT^{0^2}}(1-S_0) & \left(\rho_{ad}^0 - \rho_{as}^0\right)S\left(1 - \dfrac{RT^0}{K_H}\right) + M_{vp}^{ol}\left(\dfrac{S_0}{K_H} + \dfrac{(1-S_0)}{RT^0}\right) \\ -\dfrac{1}{P_{vp}^0} & \dfrac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0 RT} & \dfrac{M_{vp}^{ol}P_{as}^0}{\rho_w^0 K_H T^0}(1-R) + \dfrac{M_{vp}^{ol}}{R}\dfrac{h_{vp}^m - h_w^m}{T^{0^2}} & 0 \\ -\phi(1-S_{lq}) & 0 & C_\varepsilon^0 & -\phi(1-S_{lq}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta P_{vp} \\ \Delta P_w \\ \Delta T \\ \Delta P_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t \dfrac{Surf}{Vol}\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n} \\ 0 \end{bmatrix}$$

éq 2.1.2-5

S_0	S'	T^0	p_{vp}^0	h_{vp}^0	ρ_{vp}^0 (calculé)	ρ_{lq}
5,00E-01	-1,00E-12	3,00E+02	3,70E+03	2,50E+06	2,67E-02	1,00E+03

r_0	ϕ^0	ρ_s (calculé)	C_σ^s	C_{lq}^p I	C_{vp}^p	C_ε^0 (calculé)
2,20E+03	3,00E-01	2,93E+03	1,05E+03	4,18E+03	1,90E+03	2,78E+06

$\mathbf{q}_{ext}.\mathbf{n}$	Δt	$Surf$	Vol
1,00E+06	10	400	1,00E+04

On obtient les résultats suivants :

Après résolution de ce système, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{vp} \\ \Delta P_w \\ \Delta T \\ \Delta P_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.4 \\ -99500 \\ 0.144 \\ 45.7 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne en terme de résultat Aster (incrément) :

$PRE1$	$PRE2$	DT	$PVP(V3)$
9.95 E4	7.5E1	1.44E-1	2.94E1

2.2 Incertitudes

Les incertitudes sont assez grandes parce-que la solution analytique est une solution approchée du fait de la linéarisation des équations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

Modélisation en déformations planes. Un élément $Q8$.
Discrétisation en temps : un seul pas de temps : $10\,s$.

3.2 Valeurs testées

Nœud	Champ	Composante	Instant (s)	Référence (analytique)
NO1	DEPL	*TEMP*	10	0.1440
NO1	DEPL	*PRE1*	10	$9.95\,10^4$
NO1	DEPL	*PRE2*	10	75
NO1	VARI_ELNO	*V3*	10	29.4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

La solution est en très bon accord avec la solution analytique hormis pour la pression de gaz. Les faibles différences sont dues à la linéarisation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)