# WTNP105 - Diffusion d'air dissous dans l'eau (plan HH2M)

**Résumé :**

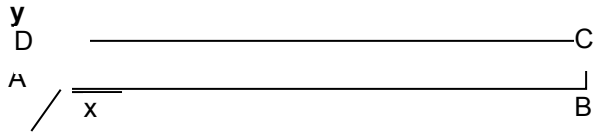
On considère ici un problème à température et saturation constante. Par des conditions aux limites appropriées on impose une pression d'eau et une pression de vapeur constantes. Une pression de gaz est imposée sur un bord du domaine (flux nuls de l'autre coté). Seules les pressions d'air sec et d'air dissous reliées par la loi de Henry évoluent. Ce problème se ramène en une équation pour la pression d'air sec de type « équation de la chaleur ». La solution de référence sera alors un calcul thermique ASTER. Il s'agit exactement du même cas test que le WTNP103 mais en modélisation HH2M.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie




Coordonnées des points ( $m$ ) :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 0 | $C$ | 1 | 0,5 |
| $B$ | 1 | 0 | $D$ | 0 | 0,5 |

## 1.2 Propriétés du matériau

On ne donne ici que les propriétés dont la solution dépend, sachant que le fichier de commandes contient d'autres données de matériau (modules d'élasticité, conductivité thermique …) qui finalement ne jouent aucun rôle dans la solution du problème traité.

| | | |
|---|---|---|
| Eau liquide | Masse volumique ( $kg.m^{-3}$ ) | $10^3$ |
| | Chaleur massique à pression constante ( $J.K^{-1}$ ) | 0. |
| | Viscosité dynamique de l'eau liquide ( $Pa.s$ ) | 0.001 |
| | coefficient de dilatation thermique du liquide ( $K^{-1}$ ) | 0. |
| | Perméabilité relative à l'eau | $kr_w(S)=0.5$ |
| Vapeur | Chaleur massique ( $J.K^{-1}$ ) | 0. |
| | Masse molaire( $kg.mol^{-1}$ ) | 0,01 |
| Gaz | Chaleur massique ( $J.K^{-1}$ ) | 0. |
| | Masse molaire ( $kg.mol^{-1}$ ) | 0,01 |
| | Perméabilité relative au gaz | $kr_{gz}(S)=0.5$ |
| | Viscosité du gaz ( $kg.m^{-1.}s^{-1}$ ) | 0.001 |
| Air dissous | Chaleur massique ( $J.K^{-1}$ ) | 0. |
| | Constante de Henry ( $Pa.m^{3.}mol^{-1}$ ) | 50000 |
| Etat initial | Porosité | 1 |
| | Température ( $K$ ) | 300 |
| | Pression de gaz ( $Pa$ ) | 1.01E5 |
| | Pression de vapeur ( $Pa$ ) | 1000 |
| | Pression capillaire ( $Pa$ ) | 1.E6 |
| | Saturation initiale en liquide | 0,4 |
| Constantes | Constante des gaz parfaits | 8,32 |
| Coefficients homogénéisés | Masse volumique homogénéisée ( $kg.m^{-3}$ ) | 2200 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| | |
|---|---|
| Isotherme de sorption | $S(P_c)=0.4$ |
| Coefficient de Biot | 0 |
| Fick Vapeur ( $m^2.s^{-1}$ ) | $FV=0$ |
| Fick air dissous ( $m^2.s^{-1}$ ) | $FA=6\ .E-10$ |
| Perméabilité intrinsèque ( $m^2$ ) | $Kint=1.\mathrm{E}-19$ |

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

Sur l'ensemble du domaine, on veut :

$$p_w = cte = p_w^0$$
$$\frac{1}{K_w} = 0 \Rightarrow \rho_w = cte = \rho_w^0$$
$$p_{vp} = cte = p_{vp}^0$$
$$F_{vp} = 0$$
$$S(p_c) = cte = S_0$$
$$T = cte = T^0$$
$$\phi = 1$$
$$M_{as}^{ol} = M_{vp}^{ol} = M_{ad}^{ol}$$

Sur tous les bords : Flux hydrauliques et thermiques nuls.

On va maintenant linéariser $p_{vp}$ en fonction de $p_w$.

**Ecriture de $p_{vp}$ fonction linéaire de $p_w$ :**

La section 4.2.3 du document de référence *Aster* [R7.01.11] nous donne la relation : $\frac{dp_{vp}}{p_{vp}} = \frac{M_{vp}^{ol}}{RT}\frac{dp_w}{\rho_w}$.

Si on linéarise cette expression on obtient : $p_{vp} = \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0} p_w + \left[ p_{vp}^0 - \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0} p_w^0 \right]$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$p_{vp} = Ap_w + B \qquad \text{éq 1.3-1}$$

avec $A = \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0}$ et $B = p_{vp}^0 - \frac{p_{vp}^0}{RT}\frac{M_{vp}^{ol}}{\rho_w^0} p_w^0$

Sur le bord gauche AD : $p_{gz} = 115000 Pa$
$pc = 10^6 Pa$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul

**Calcul de la conservation de la masse d'air**

La conservation de la masse de gaz s'écrit :

$$\frac{dm_{air}}{dt} + div(\mathbf{M}_{as} + \mathbf{M}_{ad}) = 0 \qquad \text{éq 2.1.1-1}$$

On écrit que la masse totale d'eau et la masse totale d'air sont conservées (car il n'y a pas de flux d'eau ni de gaz au bord) et on obtient :

$$m_{air} = m_{as} + m_{ad} = S_0(\rho_{ad} - \rho_{ad}^0) + (1 - S_0)(\rho_{as} - \rho_{as}^0)$$

donc

$$d(m_{as} + m_{ad}) = S_0 d\rho_{ad} + (1 - S_0) d\rho_{as} \qquad \text{éq 2.1.1-2}$$

$$d\rho_{as} = \frac{M_{as}^{ol}}{RT} dP_{as} \text{ et } d\rho_{ad} = \frac{M_{ad}^{ol}}{K_H} dP_{as}$$

$$\frac{dm_{air}}{dt} = \left[ S_0 \frac{M_{as}^{ol}}{K_H} + (1 - S_0) \frac{M_{as}^{ol}}{RT} \right] \frac{dP_{as}}{dt}$$

Calcul des vitesses :

$$\frac{\mathbf{M_{as}}}{\rho_{as}} = \lambda_{gz}(-\nabla P_{as}) \qquad \text{éq 2.1.1-3}$$

puisque $F_{vp} = 0$ et $\nabla P_{vp} = 0$

et

$$\mathbf{M}_{ad} = \rho_{ad}\lambda_{lq}(-\nabla P_{lq}) - F_{ad}\nabla C_{ad} \quad \text{avec} \quad C_{ad} = \rho_{ad}$$

Comme $\nabla P_{lq} = \nabla P_w + \nabla P_{ad} = \nabla P_{ad} = \frac{RT}{K_H}\nabla P_{as}$

$$\mathbf{M}_{ad} = \rho_{ad}\lambda_{lq}\frac{RT}{K_H}(-\nabla P_{as}) - \frac{M_{ad}^{ol}}{K_H} F_{ad}\nabla P_{as}$$

[éq 2.1.1-1] peut alors se simplifier sous la forme suivante :

$$C\frac{dP_{as}}{dt} = L\,div(\nabla P_{as})$$

avec
$$\begin{cases} C = S_0 \dfrac{M_{as}^{ol}}{K_H} + (1 - S_0)\dfrac{M_{as}^{ol}}{RT} \\ L = \rho_{as}^0\lambda_{gz} + \dfrac{RT}{K_H}\rho_{ad}^0\lambda_{lq} + \dfrac{M_{as}^{ol}}{K_H} F_{ad} \end{cases}$$

Equation de la chaleur que l'on traite par un calcul thermique Aster.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 2.2 Résultats de référence

Avec les valeurs numériques précédentes, on trouve :

$$P_{as} = 10^5 \Rightarrow P_{ad}^0 = \frac{RT}{K_H} P_{as}^0 = 4992$$

$$\rho_{as}^0 = \frac{M_{as}^{ol}}{RT} P_{as}^0 = 0.4 \text{ et } \rho_{ad}^0 = \frac{M_{ad}^{ol}}{RT} P_{ad}^0 = 0.02$$

$$\rho_{vp}^0 = \rho_{vp} = 4.10^{-3}$$

Les constantes de l'équation de la chaleur sont alors :

$$C = 2{,}4810^{-6}$$
$$L = 1{,}4.10^{-16}$$

## 2.3 Incertitudes sur la solution

Les incertitudes sont assez grandes étant donnée que la solution quasi-analytique (fruit d'un calcul thermique) est une solution approchée du fait de la linéarisation des équations.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation en déformations planes D_PLAN_HH2MD.

## 3.2 Caractéristiques du maillage

20 éléments QUAD8.

## 3.3 Grandeurs testées et résultats

On rappelle que la température issue du calcul thermique correspond à la pression d'air sec de notre calcul thermo-hydro-mécanique. La pression de vapeur étant constante on a :

$$P_{gz} = PRE2^{DDL} + PRE2^{init} = P_{vp}^{0} + P_{as}$$

| $X$ ( $m$ ) | Temps ( $s$ ) | $PRE2$ | Tolérance ( % ) |
|---|---|---|---|
| 0,2 | 3E9 | 1.120e4 | 5.0 |
| 0,2 | 5E9 | 1.224e4 | 5.0 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Même modélisation qu'en A en sélective, modèle D_PLAN_HH2MS.

## 4.2 Caractéristiques du maillage

20 éléments QUAD8.

## 4.3 Grandeurs testées et résultats

On rappelle que la température issue du calcul thermique correspond à la pression d'air sec de notre calcul thermo-hydro-mécanique. La pression de vapeur étant constante on a :

$$P_{gz} = PRE2^{DDL} + PRE2^{init} = P_{vp}^{0} + P_{as}$$

| $X$ ( $m$ ) | Temps ( $s$ ) | $PRE2$ | Tolérance ( $\%$ ) |
|---|---|---|---|
| 0,2 | 3E9 | 1.120e4 | 5.0 |
| 0,2 | 5E9 | 1.224e4 | 5.0 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Modélisation C

## 5.1 Caractéristiques de la modélisation

Même modélisation qu'en A en sous-intégrée, modèle D_PLAN_HH2M_SI.

## 5.2 Caractéristiques du maillage

20 éléments QUAD8.

## 5.3 Grandeurs testées et résultats

On rappelle que la température issue du calcul thermique correspond à la pression d'air sec de notre calcul thermo-hydro-mécanique. La pression de vapeur étant constante on a :

$$P_{gz} = PRE2^{DDL} + PRE2^{init} = P_{vp}^{0} + P_{as}$$

| $X$ ( $m$ ) | Temps ( $s$ ) | $PRE2$ | Tolérance ( $\%$ ) |
|---|---|---|---|
| 0,2 | 3E9 | 1.120e4 | 5.0 |
| 0,2 | 5E9 | 1.224e4 | 5.0 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Synthèse des résultats

Les résultats sont en très bon accord avec la solution semi-analytique.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)