WTNV100 - Essai triaxial non drainé avec le modèle CJS (niveau 1)

Résumé

Ce test permet de valider le niveau 1 du modèle CJS. Il s'agit d'un essai triaxial en condition non drainée.
Dans les deux premières modélisations, les calculs sont effectués uniquement sur la partie solide du sol, l'aspect non drainé étant modélisé par une déformation volumique nulle du squelette, ce sont des modélisations $3D$ qui diffèrent l'une de l'autre uniquement par le maillage.

Dans la troisième modélisation, le couplage hydraulique est pris en compte, l'échantillon est totalement saturé, le squelette et le fluide sont supposés incompressibles.

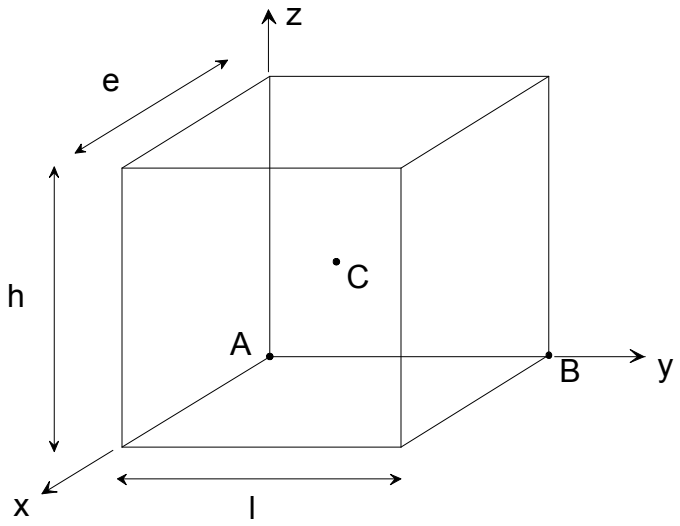
Par raison de symétrie, on ne s'intéresse qu'au huitième d'un échantillon soumis à un essai triaxial.
Le niveau de confinement est de $100\,kPa$.

Les résultats obtenus avec le modèle CJS1 sont comparés à une solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



hauteur : h = 1 m
largeur : l = 1 m
épaisseur : e = 1 m

Coordonnées des points (en mètres) :

	A	B	C
x	0.	0.	0.5
y	0.	1.	0.5
z	0.	0.	0.5

1.2 Propriété de matériaux

$E=22,410^3 kPa$
$\nu=0,3$
Coefficient de biot $b=1$
L'eau est supposée incompressible : $\mathrm{UN_SUR_K}=0$
Paramètres CJS1 : $\beta=-0,03$ $\gamma=0,82$ $R_m=0,289$ $P_a=-100 kPa$

1.3 Conditions initiales, conditions aux limites, et chargement

1.3.1 Modélisation mécanique pure

Phase 1 :

On amène l'échantillon à un état homogène : $\sigma^0_{xx}=\sigma^0_{yy}=\sigma^0_{zz}$, en imposant la pression de confinement correspondante sur les faces avant, latérale droite et supérieure. Les déplacements sont bloqués sur les faces arrière ($u_x=0$), latérale gauche ($u_y=0$) et inférieure ($u_z=0$).

Phase 2 :

On maintient les déplacements bloqués sur les faces arrière ($u_x=0$), latérale gauche ($u_y=0$) et inférieure ($u_z=0$). On applique un déplacement imposé sur la face supérieure : $u_z(t)$, de façon à obtenir une déformation $\varepsilon_{zz}=-20\%$ (comptée à partir du début de la phase 2). Sur les faces avant et latérale droite, on impose respectivement les déplacements $u_x(t)$ et $u_y(t)$, de façon à avoir une déformation volumique nulle pour l'échantillon, c'est à dire finalement que l'on impose

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{2}$. C'est la manière de reproduire le comportement de la phase solide lors d'un essai triaxial non drainé.

1.3.2 Modélisation couplée avec hydraulique

Phase 1 :

On amène l'échantillon à un état homogène de contraintes effectives: $\sigma^0_{xx} = \sigma^0_{yy} = \sigma^0_{zz}$, en imposant la pression totale correspondante sur les faces avant, latérale droite et supérieure et en imposant partout des pressions d'eau nulles. Les déplacements sont bloqués sur les faces arrière ($u_x = 0$), latérale gauche ($u_y = 0$) et inférieure ($u_z = 0$).

Phase 2 :

On maintient les déplacements bloqués sur les faces arrière ($u_x = 0$), latérale gauche ($u_y = 0$) et inférieure ($u_z = 0$).
Sur toutes les faces, les flux hydrauliques sont nuls.
On applique un déplacement imposé sur la face supérieure de façon à obtenir une déformation $\varepsilon_{zz} = -20\,\%$ (comptée à partir du début de la phase 2). Sur les faces avant et latérale droite, on impose des conditions aux limites en contrainte totale :

$$\sigma.n = \sigma^0 \ (=100kPa)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Solution de référence pour la pression d'eau en linéaire

σ_0, ε_0 p_0 désignant les contraintes ,déformations et pressions d'eau obtenues dans la phase on a :

$$\sigma - \sigma_0 = \lambda tr(\varepsilon - \varepsilon_0) + 2\mu(\varepsilon - \varepsilon_0) - b(p - p_0)$$

$$\frac{m}{\rho^{fl}} = \frac{p - p_0}{M} + btr(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

Dans cette écriture, M désigne le module de biot et $N = \frac{1}{M}$.

Les conditions aux limites de flux nul et la conservation de la masse d'eau donnent $m = 0$

Les conditions aux limites sur les parois latérales et le fait que l'état de contrainte est homogène donnent :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xx0} = 0$$

On a donc finalement à résoudre les deux équations :

$$\begin{cases} \lambda(2\Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{zz}) + 2\mu\Delta\varepsilon_{xx} = bp \\ b(2\Delta\varepsilon_{xx} + \Delta\varepsilon_{zz}) = -\frac{p}{M} = -Np \end{cases}$$

Et on obtient :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_{xx} = -\frac{\Delta\varepsilon_{zz}}{2}\frac{b^2 + \lambda N}{b^2 + (\lambda + \mu)N} \\ p = -\frac{\mu b\Delta\varepsilon_{zz}}{b^2 + (\lambda + \mu)N} \end{cases}$$

Dans notre cas,

$$\Delta\varepsilon_{xx} = -\frac{\Delta\varepsilon_{zz}}{2} \quad ; \quad p = -\mu\Delta\varepsilon_{zz}$$

2.2 Développement de la solution analytique CJS

On a en permanence :

pour les déformations : $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{2}$

pour les contraintes : $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$

Phase élastique :
En écrivant simplement la loi élastique, il vient :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^0 - \mu\,\varepsilon_{zz}$$
$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0 + 2\,\mu\,\varepsilon_{zz}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par ailleurs, on sait aussi que pendant cette phase I_1 ($=trace(\sigma)$) reste constant car $\varepsilon_v = 0$. On en déduit pour les composantes du déviateur :

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - \frac{I_1}{3} = \sigma_{xx}^0 - \frac{I_1^0}{3} - \mu\,\varepsilon_{zz} = -\mu\,\varepsilon_{zz} \text{ et } s_{zz} = \sigma_{zz} - \frac{I_1}{3} = \sigma_{zz}^0 - \frac{I_1^0}{3} + 2\,\mu\,\varepsilon_{zz} = 2\,\mu\,\varepsilon_{zz}$$

soit : $s_{II} = -\sqrt{6}\,\mu\,\varepsilon_{zz}$ et $\det(\underline{\underline{s}}) = 2\,\mu^3\,\varepsilon_{zz}^3$

Par conséquent : $h(\theta_s) = (1-\gamma)^{1/6}$

Ainsi lorsqu'on atteint le critère $f^d = 0$, on a :

$$s_{II}\,(1-\gamma)^{1/6} + R_m\,I_1^0 = -\sqrt{6}\,\mu\,\varepsilon_{zz}\,(1-\gamma)^{1/6} + R_m\,I_1^0 = 0$$

C'est-à-dire que la transition entre les états élastique et parfaitement plastique se fait pour une déformation axiale égale à :

$$\varepsilon_{zz}^{trans} = \frac{R_m\,I_1^0}{\sqrt{6}\,\mu\,(1-\gamma)^{1/6}}$$

L'état de contraintes correspondant est noté :

$$\sigma_{xx}^{trans} = \sigma_{xx}^0 - \mu\,\frac{R_m\,I_1^0}{\sqrt{6}\,\mu\,(1-\gamma)^{1/6}} \quad \text{et} \quad \sigma_{zz}^{trans} = \sigma_{zz}^0 + 2\,\mu\,\frac{R_m\,I_1^0}{\sqrt{6}\,\mu\,(1-\gamma)^{1/6}}$$

Phase plastique :

On note s^{-d} le déviateur de l'inverse du tenseur s

D'une façon générale, on a les grandeurs suivantes :

$$s_{xx} = -\frac{1}{3}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) = s_{yy} \quad s_{xx}^{-1} = \frac{-3}{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}} \quad s_{xx}^{-d} = \frac{-3}{2(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})}$$

$$s_{zz} = \frac{2}{3}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \quad s_{zz}^{-1} = \frac{3}{2(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})} \quad s_{zz}^{-d} = \frac{3}{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}$$

soit : $s_{II} = -\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})$ et $\det(\underline{\underline{s}}) = \frac{2}{3^3}(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^3$

Par conséquent : $h(\theta_s) = (1-\gamma)^{1/6}$

On en déduit :

$$Q_{xx} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\gamma)^{1/6} \text{ et } Q_{zz} = -\sqrt{\frac{2}{3}}(1-\gamma)^{1/6}$$

en outre : $\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\gamma)^{1/6} + R_m$ et $\frac{\partial f^d}{\partial \sigma_{zz}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}(1-\gamma)^{1/6} + R_m$

Comme on a : $\beta' = signe(s_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij})\,\beta\left(\frac{s_{II}}{s_{II}^c} - 1\right) = \beta\left(\frac{R_m}{R_c} - 1\right) = \beta$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

alors le tenseur $\underline{\underline{n}}$ s'écrit :

$$n_{xx} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+3}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\beta+1\right) \text{ et } n_{zz} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+3}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\beta+1\right)$$

Il vient alors pour $\underline{\underline{G^d}}$:

$$G_{xx}^d = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-\gamma)^{1/6} + R_m - \frac{\beta(1-\gamma)^{1/6}+3R_m}{\beta^2+3}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\beta+1\right)$$

$$G_{zz}^d = -\sqrt{\frac{2}{3}}(1-\gamma)^{1/6} + R_m - \frac{\beta(1-\gamma)^{1/6}+3R_m}{\beta^2+3}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\beta+1\right)$$

On a également d'après la loi élastique :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{trans} + \Delta\sigma_{xx} \text{ et } \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{trans} + \Delta\sigma_{zz}$$

où :

$$\Delta\sigma_{xx} = 2\mu\left(\Delta\varepsilon_{xx} - \Delta\lambda^d G_{xx}^d\right) + \lambda\left(\Delta\varepsilon_v - \Delta\lambda^d tr\left(\underline{\underline{G^d}}\right)\right) = -\mu\Delta\varepsilon_{zz} - 2\mu\Delta\lambda^d G_{xx}^d - \lambda\Delta\lambda^d\left(2G_{xx}^d + G_{zz}^d\right)$$

$$\Delta\sigma_{zz} = 2\mu\left(\Delta\varepsilon_{zz} - \Delta\lambda^d G_{zz}^d\right) + \lambda\left(\Delta\varepsilon_v - \Delta\lambda^d tr\left(\underline{\underline{G^d}}\right)\right) = 2\mu\Delta\varepsilon_{zz} - 2\mu\Delta\lambda^d G_{zz}^d - \lambda\Delta\lambda^d\left(2G_{xx}^d + G_{zz}^d\right)$$

et avec : $\Delta\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^{trans}$ et $\Delta\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^{trans}$

soit, d'après ce qui précède, on a pour s_{II} :

$$s_{II} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\left(\sigma_{zz}^{trans} - \sigma_{xx}^{trans}\right) + 3\mu\left(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^{trans}\right) - 2\mu\Delta\lambda^d\left(G_{zz}^d - G_{xx}^d\right)\right]$$

$$= s_{II}^{trans} - \sqrt{\frac{2}{3}}\left[3\mu\left(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^{trans}\right) - 2\mu\Delta\lambda^d\left(G_{zz}^d - G_{xx}^d\right)\right]$$

et pour I_1 :

$$I_1 = I_1^{trans} - (3\lambda+2\mu)\Delta\lambda^d\left(2G_{xx}^d + G_{zz}^d\right)$$

On en déduit que la fonction de charge déviatoire s'écrit :

$$f^d = s_{II}^{trans}(1-\gamma)^{1/6} - \sqrt{\frac{2}{3}}\left[3\mu\left(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^{trans}\right) - 2\mu\Delta\lambda^d\left(G_{zz}^d - G_{xx}^d\right)\right](1-\gamma)^{1/6}$$
$$+ R_m I_1^{trans} - R_m(3\lambda+2\mu)\Delta\lambda^d\left(2G_{xx}^d + G_{zz}^d\right)$$

En tenant compte du fait que $f^d\left(\underline{\underline{\sigma}}^{trans}\right) = 0$, on trouve alors pour le multiplicateur plastique :

$$\Delta\lambda^d = \frac{3\mu(1-\gamma)^{1/6}}{2\mu\left(G_{zz}^d - G_{xx}^d\right) - \sqrt{\frac{3}{2}}R_m(3\lambda+2\mu)\left(2G_{xx}^d + G_{zz}^d\right)}\left(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^{trans}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ce qui donne avec les formules de G_{xx}^{d} et G_{zz}^{d} précédentes :

$$\Delta\lambda^{d} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mu\,(1-\gamma)^{1/6}\,(\beta^{2}+3)}{\left(R_m\,\beta-(1-\gamma)^{1/6}\right)\left(2\,\mu(1-\gamma)^{1/6}-(3\,\lambda+2\,\mu)\,R_m\,\beta\right)}\left(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{zz}^{trans}\right)$$

On en conclut finalement l'expression analytique des contraintes :

En posant :

$$a=(1-\gamma)^{1/6} \quad ; \qquad b=(\beta^{2}+3)$$

On a :

$$\sigma_{xx}-\sigma_{xx}^{trans} = -\left(\mu+\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mu\,a\,b\left(2\,\mu\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,a+R_m-\frac{\beta\,a+3\,R_m}{b}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,\beta+1\right)\right)+3\,\lambda\,\beta\,\frac{(R_m\,\beta-a)}{b}\right)}{(R_m\,\beta-a)\,(2\,\mu a-(3\,\lambda+2\,\mu)\,R_m\,\beta)}\right)\left(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{zz}^{trans}\right)$$

$$\sigma_{zz}-\sigma_{zz}^{trans} = \left(2\,\mu-\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mu\,a\,b\left(2\,\mu\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,a+R_m-\frac{\beta a+3\,R_m}{b}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,\beta+1\right)\right)+3\,\lambda\,\beta\,\frac{(R_m\,\beta-a)}{b}\right)}{(R_m\,\beta-a)\,(2\,\mu a-(3\,\lambda+2\,\mu)\,R_m\,\beta)}\right)\left(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{zz}^{trans}\right)$$

2.3 Résultats de référence

Contraintes σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{zz} aux points A, B et C.

2.4 Incertitude sur la solution

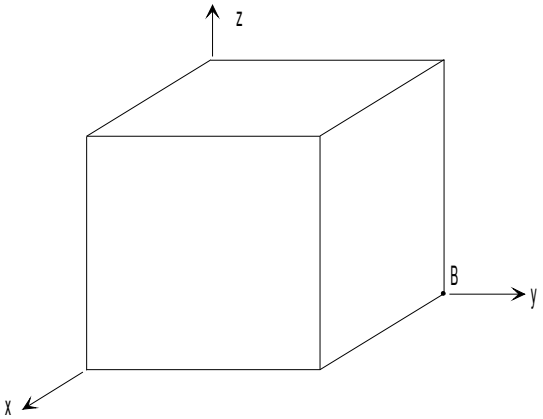
Solution analytique exacte pour CJS1.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

3D :



Découpage : 1 en hauteur, en largeur et en épaisseur.

Chargement de la phase 1 :
Pression de confinement : $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{zz}^0 : -100\,kPa$.
Niveau 1 du modèle CJS

3.2 Caractéristique du maillage

Nombre de nœuds : 8
Nombre de mailles et types : 1 HEXA8 et 6 QUA4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

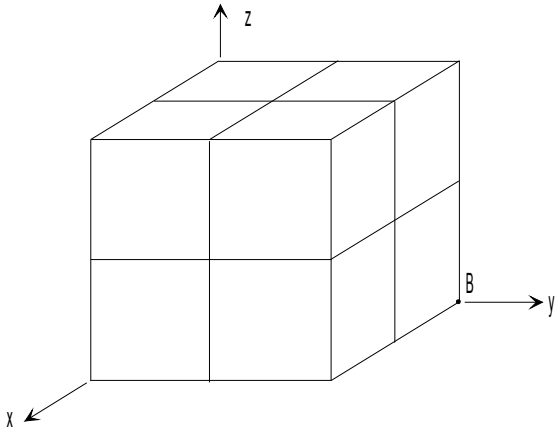
Localisation	Numéro d'ordre	Déformation axiale ε_{zz} (%)	Contrainte (kPa)	Référence
Points A et B	1	–0.25	σ_{xx}	–78.461538
	2	–0.50	σ_{xx}	–56.923077
	3	–0.75	σ_{xx}	–53.606
	4	–1.0	σ_{xx}	–54.480
	8	–5.0	σ_{xx}	–68.467
	23	–20.0	σ_{xx}	–120.918
	1	–0.25	σ_{yy}	–78.461538
	2	–0.50	σ_{yy}	–56.923077
	3	–0.75	σ_{yy}	–53.606
	4	–1.0	σ_{yy}	–54.480
	8	–5.0	σ_{yy}	–68.467
	23	–20.0	σ_{yy}	–120.918
	1	–0.25	σ_{zz}	–143,07692
	2	–0.50	σ_{zz}	–186.153846
	3	–0.75	σ_{zz}	–196.818
	4	–1.0	σ_{zz}	–200.028
	8	–5.0	σ_{zz}	–251.383
	23	–20.0	σ_{zz}	–443.961

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Cette modélisation diffère de la précédente par la finesse du maillage 3D :



Découpage : 2 en hauteur, en largeur et en épaisseur.

Chargement de la phase 1 :
Pression de confinement : $\sigma^0_{xx} = \sigma^0_{yy} = \sigma^0_{zz} : -100\,kPa$.
Niveau 1 du modèle CJS

4.2 Caractéristique du maillage

Nombre de nœuds : 27
Nombre de mailles et types : 8 HEXA8 et 24 QUA4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

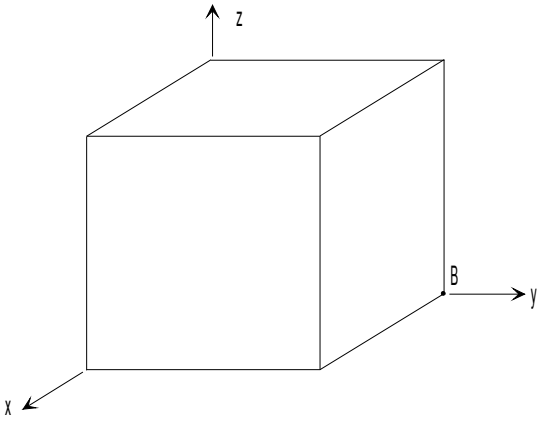
Localisation	Numéro d'ordre	Déformation axiale ε_{zz} (%)	Contrainte (kPa)	Référence
Points A , B et C	5	–0.2	σ_{xx}	–82.76923
	10	–0.4	σ_{xx}	–65.53846
	20	–0.8	σ_{xx}	–53.78079
	40	–1.6	σ_{xx}	–56.578176
	60	–5.6	σ_{xx}	–70.565109
	100	–20.0	σ_{xx}	–120.918065
	5	–0.2	σ_{yy}	–82.76923
	10	–0.4	σ_{yy}	–65.53846
	20	–0.8	σ_{yy}	–53.78079
	40	–1.6	σ_{yy}	–56.578176
	60	–5.6	σ_{yy}	–70.565109
	100	–20.0	σ_{yy}	–120.918065
	5	–0.2	σ_{zz}	–134.46154
	10	–0.4	σ_{zz}	–168.92308
	20	–0.8	σ_{zz}	–197.460849
	40	–1.6	σ_{zz}	–207.731697
	60	–5.6	σ_{zz}	–259.085935
	100	–20.0	σ_{zz}	–443.961194

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

3D_HM :



Découpage : 1 en hauteur, en largeur et en épaisseur.

Chargement de la phase 1 :

Pression de confinement : $\sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{zz}^0 : -100\,kPa$.

Niveau 1 du modèle CJS
Coefficient de biot : 1
UN_SUR_K de l'eau : 0

5.2 Caractéristique du maillage

Nombre de nœuds : 20
Nombre de mailles et types : 1 HEXA20 et 6 QUA8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Grandeurs testées et résultats

Localisation	Numéro d'ordre	Déformation axiale ε_{zz} (%)	Contrainte (kPa)	Référence
Points A et B	1	–0.25	σ_{xx}	–78.461538
	2	–0.50	σ_{xx}	–56.923077
	3	–0.75	σ_{xx}	–53.606
	4	–1.0	σ_{xx}	–54.480
	8	–5.0	σ_{xx}	–68.467
	23	–20.0	σ_{xx}	–120.918
	1	–0.25	σ_{yy}	–78.461538
	2	–0.50	σ_{yy}	–56.923077
	3	–0.75	σ_{yy}	–53.606
	4	–1.0	σ_{yy}	–54.480
	8	–5.0	σ_{yy}	–68.467
	23	–20.0	σ_{yy}	–120.918
	1	–0.25	σ_{zz}	–143,07692
	2	–0.50	σ_{zz}	–186.153846
	3	–0.75	σ_{zz}	–196.818
	4	–1.0	σ_{zz}	–200.028
	8	–5.0	σ_{zz}	–251.383
	23	–20.0	σ_{zz}	–443.961
	1	–0.25	pression eau	2,1538E+04
	2	–0.50	pression eau	4,3077E+04

Pour la pression d'eau, on a la référence tant que le comportement est élastique linéaire

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Les valeurs de *Code_Aster* sont en parfait accord avec les valeurs de référence. Concernant le couplage avec l'hydraulique, ce test prouve qu'informatiquement, le couplage CJS/THM fonctionne et que les équations d'hydraulique sont au moins capables de redonner la variation de volume nulle quand l'eau est incompressible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)