# HPLP100 - Calcul du taux de restitution de l'énergie d'une plaque fissurée en thermo-élasticité

**Résumé**

Il s'agit d'un test en thermo-élasticité pour un problème bidimensionnel. On considère une plaque rectangulaire fissurée et on se place dans l'hypothèse des déformations planes.

Dans **la modélisation A**, le taux de restitution de l'énergie est calculé en post-traitement par deux méthodes différentes :

- calcul classique par la méthode thêta,
- calcul par la formule d'IRWIN à partir du coefficients d'intensité de contraintes $KI$ .

Ces deux calculs sont réalisés sur 4 couronnes d'intégration différentes. Leur intérêt est de comparer les valeurs de $G$ , de $G(IRWIN)$ et $KI$ par rapport à la solution de référence et de tester l'invariance des calculs par rapport aux différentes couronnes d'intégration.

Dans l**a modélisation B**, le taux de restitution de l'énergie est calculé en post-traitement d'un calcul classique par la méthode thêta. Ce calcul est réalisé pour plusieurs couronnes d'intégrations différentes, dans un formalisme de grandes transformations.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

Il s'agit d'une plaque rectangulaire fissurée :

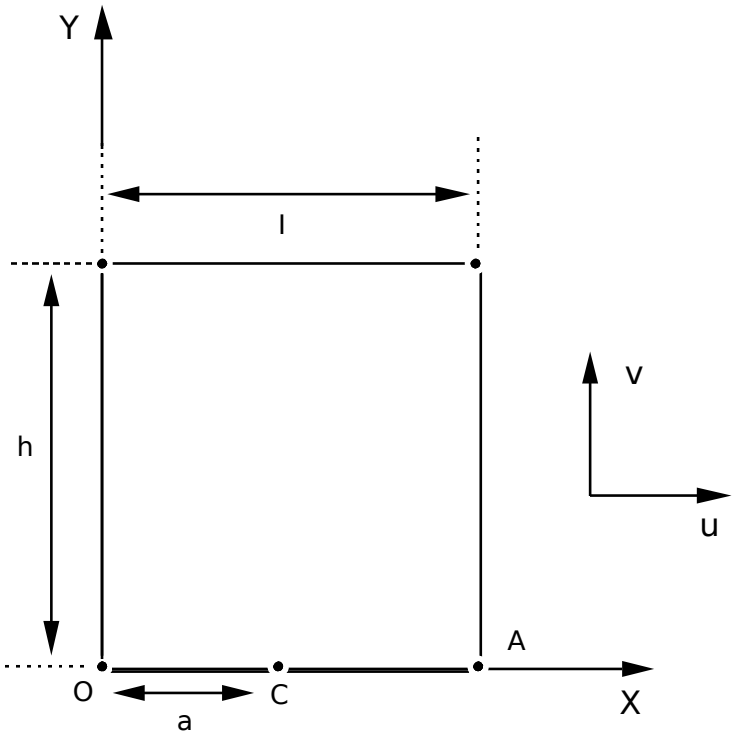



**Figure 1.1-a : Plaque rectangulaire fissurée**

Les dimensions de cette plaque sont les suivantes :

Demi-hauteur de la plaque : $h=200.0\,mm$
Demi-largeur de la plaque : $I=100.0\,mm$
Demi-longueur de la fissure : $a=50.0\,mm$

Dans la modélisation A, on modélise un quart de la plaque, comme en figure 1.1-a.

Dans la modélisation B, on modélise la plaque dans toute sa hauteur.

## 1.2 Propriétés du matériau

Propriétés thermiques : $Cp=0.$
$\lambda=1.0\,W/m°C$
Propriétés mécaniques : $E=200000\,MPa$
$\nu=0.3$
$\alpha=5.10^{-6}/°C$

Nous sommes dans l'hypothèse des déformations planes.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 1.3 Conditions aux limites et chargements

### 1.3.1 Modélisation A

- Température imposée en $X=0.$ : $T=-100.0\,°C$
- Température imposée en $X=100$ : $T=+100.0\,°C$
- Déplacement pour $a<X<I$ , $Y=0.$ : $v=0.$
- Déplacement pour $0<X<I$ , $Y=H$ : $v=0.$
- Déplacement pour $X=0.$ , $Y=H$ : $u=0.$

### 1.3.2 Modélisation B

- Rotation de corps rigide d'angle 45°
- Puis pression imposée en $X=100$ et $X=-100$ : $P=-10\,MPa$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

### 2.1.1 Modélisation A

La solution de référence est issue de WILSON et YU [bib1] :

$$K_I = \frac{E \alpha T_0}{1 - \nu} F \sqrt{\pi a} \quad F = 0.154$$

$a$ en mm

E en N / mm$^2$

$$K_I = 92.0291$$

En déformations planes, la formule d'IRWIN donne : $G = \frac{(1 - \nu^2)}{E}(K_I^2 + K_{II}^2)$

soit numériquement : $G = 3.8535\ 10^{-1}$

### 2.1.2 Modélisation B

La solution de référence pour le facteur d'intensité de contraintes du mode I $K_I$ s'exprime de la façon suivante [bib3] :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}\, F\left(\frac{a}{W}\right)$$

avec $F\left(\frac{a}{W}\right) = 1{,}122 - 0{,}231\left(\frac{a}{W}\right) + 10{,}550\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21{,}710\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30{,}382\left(\frac{a}{W}\right)^4$

Le taux de restitution d'énergie $G$ s'obtient grâce à la formule d'Irwin : $G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2$ .

## 2.2 Résultats de référence

### 2.2.1 Modélisation A

Les résultats de référence sont ceux issus de la solution de référence de WILSON et YU [bib1] :

$G = 3.8535\ 10^{-1}$
$K_I = 92.0291$
$K_{II} = 0.$

### 2.2.2 Modélisation B

Les résultats de référence sont ceux issus de la solution de référence de [bib3] : $G = 572{,}05\ J.m^{-2}$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 2.3 Références bibliographiques

1) The Use of J-Integrals in thermal stress crack problems - International Journal of Fracture (1979) WILSON and YU.

2) Qualification complémentaire des codes INCA/MAYA en thermo-élasticité linéaire. Note technique DRE/STRE/LMA 84/598

3) H. Tada, P. Paris, G. Irwin, The stress analysis of cracks handbook, 3 rd edition, 2000



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il y a 4 couronnes définies par la commande CALC_G :

Couronne 1 : $Rinf = 10.$ $Rsup = 40.$
Couronne 2 : $Rinf = 15.$ $Rsup = 45.$
Couronne 3 : $Rinf = 5.$ $Rsup = 47.$
Couronne 4 : $Rinf = 3.$ $Rsup = 48.$

Le fond de fissure est défini par DEFI_FOND_FISS, et pour chaque couronne on effectue :

- un calcul de $G$ classique (option G_EPSI de CALC_G),
- un calcul de $G$ par la formule d'IRWIN à partir des coefficients d'intensité de contraintes $K_I$ et $K_{II}$ (option K de CALC_G).
- un calcul de $K_I$ à partir de $G$ et de la formule d'IRWIN (option KJ_EPSI de CALC_G)

## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 853
Nombre de mailles et types : 359 mailles TRIA6 et 27 mailles QUAD8

## 3.3 Valeurs testées et résultats de la modélisation A

Les valeurs testées sont celles de $G$ obtenues par la méthode classique et celle de $G_{IRWIN}$ obtenues par la formule d'IRWIN à partir des coefficients d'intensité de contraintes :

| Identification | | Référence | Tolérance |
|---|---|---|---|
| Couronne 1 | $G$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 1 | $G_{IRWIN}$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 1 | $KJ$ | 9.2029 10 $^{1}$ | 8,00% |
| Couronne 2 | $G$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 2 | $G_{IRWIN}$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 2 | $KJ$ | 9.2029 10 $^{1}$ | 8,00% |
| Couronne 3 | $G$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 3 | $G_{IRWIN}$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 3 | $KJ$ | 9.2029 10 $^{1}$ | 8,00% |
| Couronne 4 | $G$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 4 | $G_{IRWIN}$ | 3.8535 10 $^{-1}$ | 8,00% |
| Couronne 4 | $KJ$ | 9.2029 10 $^{1}$ | 8,00% |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 3.4 Remarques

Les valeurs numériques sont stables par rapport aux différentes couronnes d'intégration et quasiment identiques pour les deux méthodes de calcul. Néanmoins l'écart avec les valeurs de référence est de l'ordre de 6 à $7\%$ , ce qui semble élevé.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Modélisation B

## 4.1 Caractéristiques de la modélisation

Il y a 3 couronnes définies pour la commande CALC_G (avec $h=0,625\,mm$ ):

Couronne 1 : $Rinf=2\,h$ $\mathrm{Rsup}=5\,h$
Couronne 2 : $Rinf=h$ $\mathrm{Rsup}=3\,h$
Couronne 3 : $Rinf=3\,h$ $\mathrm{Rsup}=6\,h$

Le fond de fissure est défini par DEFI_FOND_FISS, et pour chaque couronne on effectue :un calcul de $G$ classique (option G de CALC_G).

## 4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de noeuds : 2679
Nombre de mailles et types : 644 mailles TRIA6 et 424 mailles QUAD8

## 4.3 Valeurs testées et résultats de la modélisation B

Les valeurs testées sont celles de $G$ obtenues par la méthode classique et celle de $G_{IRWIN}$ obtenues par la formule d'IRWIN à partir des coefficients d'intensité de contraintes :

| Identification | | Référence $\left(J.m^{-2}\right)$ | Tolérance |
|---|---|---|---|
| Couronne 1 | $G$ | 572,05 | 2,00% |
| Couronne 2 | $G$ | 572,05 | 2,00% |
| Couronne 3 | $G$ | 572,05 | 2,00% |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Synthèses des résultats

Lors de la **première modélisation**, l'écart avec les valeurs de référence est de 6 à 7%. La validation indépendante du lot mécanique de la rupture devrait apporter des éléments de réponse sur la validité de $G$ en thermo-élasticité.

Lors de la **seconde modélisation** en l'absence de thermique, l'écart à la solution de la référence inférieur à 2 % permet de valider l'utilisateur de l'opérateur CALC_G en grandes transformations.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)