SSNV512 – Bloc découpé par une fissure verticale se branchant entre 2 fissures horizontales avec X-FEM

Résumé :

Ce test permet de valider l'approche jonction avec X-FEM dans le cas où une fissure se branche sur 2 fissures distinctes. Il s'agit d'un cas test où l'on introduit trois fissures. Les deux premières fissures sont horizontales. La troisième fissure verticale, se branche sur les deux premières via le mot clé JONCTION de l'opérateur DEFI_FISS_XFEM. On teste l'approche avec et sans contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est un carré sain dans lequel on introduit trois interfaces, en rouge sur la figure 1.1-a. Deux interfaces sont horizontales. La troisième interface, verticale, est définie entre les deux premières et se branche sur celles-ci. Les dimensions de la structure ainsi que la position des interfaces sont données sur la figure 1.1-a et s'expriment en mètres $[\mathrm{m}]$.

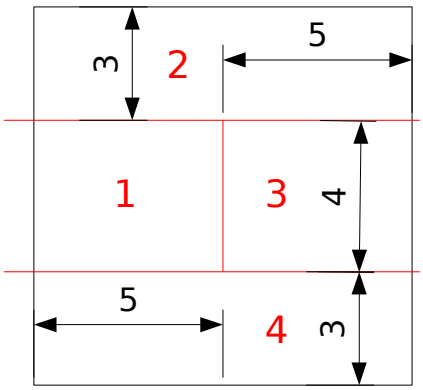


Figure 1.1-a : Géométrie de la structure, position des interfaces et numérotation des zones utilisées pour tester l'écart entre les déplacements calculés et les déplacements analytiques.

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau a uncomportement élastique isotrope dont les propriétés sont les suivantes::
Module d'Young : $100\ MPa$
Coefficient de poisson : 0.3

1.3 Conditions aux limites et chargements

Dans le cas sans contact (modélisations A à E), on applique des conditions en déplacement sur les bords gauche et droit de la structure, de manière à ce que chacune des 4 zones formées par les interfaces ait un déplacement différent des autres selon X . Ce chargement est représenté figure 1.3-a. On bloque les déplacements en Y (et en Z pour les modélisations 3D) sur ces mêmes bords.

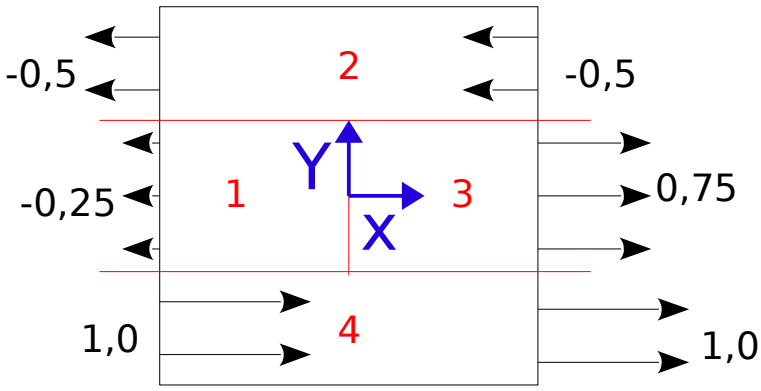


Figure 1.3-a : Illustration des conditions aux limites et des chargements, cas sans contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas du contact (modélisations F à J), on impose des conditions de rouleau sur les bords gauche et bas, on applique la pression en escalier de la figure 1.3-b sur le bord droit et une pression uniforme sur le bord du haut. Ce chargement est représenté figure 1.3-c. Chaque bloc est alors compressé de manière uniforme selon X et Y. Pour les modélisations $3D$, une condition de rouleau est imposée en $Z=0$.

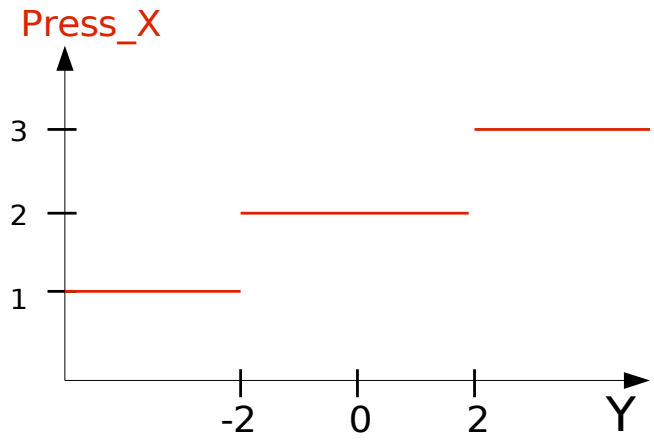


Figure 1.3-b : Pression imposé selon Y sur le bord droit, (en $[\mathbf{MPa}]$).

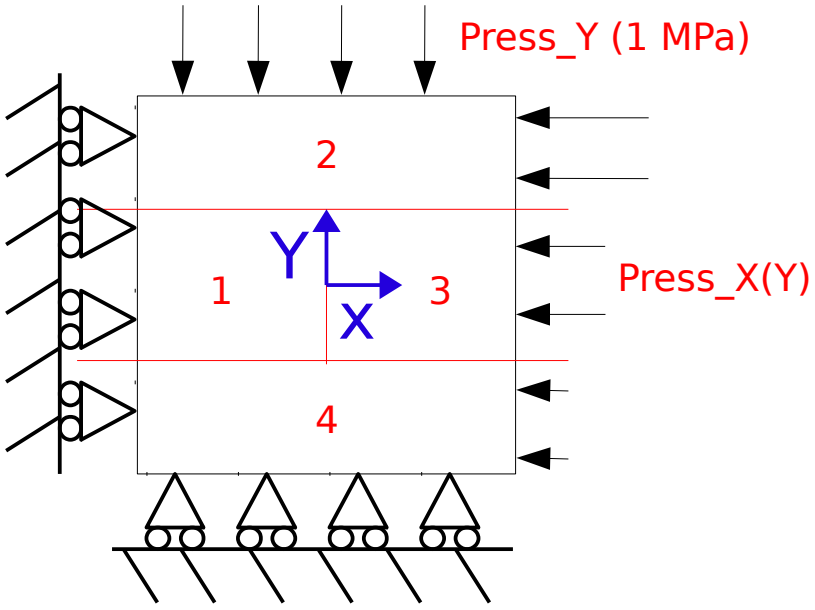


Figure 1.3-c : Illustration des conditions aux limites et des chargements, cas avec contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

Soit $\Omega=[-5,+5]\times[-5,+5]$ le domaine occupé par le solide, dans le plan (X,Y) . Le domaine Ω est partitionné en $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup\Omega_4$. , où on a posé :

$$\Omega_1=[-5,0[\times]-2,+2[,$$
$$\Omega_2=[-5,+5]\times]+2,+5],$$
$$\Omega_3=]0,+5]\times]-2,+2[,$$
$$\Omega_4=[-5,+5]\times[-5,-2[.$$

2.1 Cas sans contact

Sans contact, chaque zone doit subir un mouvement de corps rigide correspondant à la condition limite imposée sur son bord (droit ou gauche).

L'énergie de la structure est donc :

$$E^e=0.$$

Le champ de déplacement solution analytique est :

$$\boldsymbol{u}=u_x(x,y)\,\boldsymbol{e}_x,$$

avec :

$$u_x(x,y)=\begin{cases}-\frac{1}{4}\text{ pour }(x,y)\in[-5,0[\times]-2,+2[,\\ -\frac{1}{2}\text{ pour }(x,y)\in[-5,+5]\times]+2,+5],\\ +\frac{3}{4}\text{ pour }(x,y)]0,+5]\times]-2,+2[,\\ +1\text{ pour }(x,y)\in[-5,+5]\times[-5,-2[,\end{cases}$$

La norme L^2 du déplacement est définie par :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\int_\Omega\|\boldsymbol{u}\|^2\,d\,\Omega.$$

On a donc :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\frac{1}{16}|\Omega_1|+\frac{1}{4}|\Omega_2|+\frac{9}{16}|\Omega_3|+|\Omega_4|.$$

On a :

$$|\Omega_1|=20\,\mathrm{m}^2$$
$$|\Omega_2|=30\,\mathrm{m}^2$$
$$|\Omega_3|=20\,\mathrm{m}^2$$
$$|\Omega_4|=30\,\mathrm{m}^2$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\frac{1}{16}20+\frac{1}{4}30+\frac{9}{16}20+30=50.$$

Soit :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}=\sqrt{50}\approx 7{,}071067812\ \mathrm{m}^2.$$

2.2 Cas avec contact

Soit :

$$p_x(y)=\begin{cases}1\,\mathrm{MPa\ pour}\ y\in[-5,-2[\\ 2\,\mathrm{MPa\ pour}\ y\in[-2,+2[\\ 3\,\mathrm{MPa\ pour}\ y\in]+2,+5]\end{cases}\ \text{et}\ p_y=1\,\mathrm{MPa}.$$

On a donc par définition :

$$\begin{aligned}p_x(y)&=2,\ \text{dans}\ \Omega_1\cup\Omega_3,\\ p_x(y)&=3,\ \text{dans}\ \Omega_2,\\ p_x(y)&=1,\ \text{dans}\ \Omega_4.\end{aligned}\qquad \text{éq 2.2-1}$$

2.2.1 Cas des déformations planes

Le tenseur des contraintes solution analytique est :

$$\boldsymbol{\sigma}=-p_x(y)\boldsymbol{e_x}\otimes\boldsymbol{e_x}-p_y\boldsymbol{e_y}\otimes\boldsymbol{e_y}-\nu\left(p_x(y)+p_y\right)\boldsymbol{e_z}\otimes\boldsymbol{e_z}$$

On a :

$$tr(\boldsymbol{\sigma})=-(1+\nu)\left(p_x(y)+p_y\right).$$

Le tenseur des déformations est obtenu en appliquant la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}-\frac{\nu}{E}tr(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I},$$

où $\boldsymbol{I}$ est le tenseur identité.
On a donc :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}=&-\left(\frac{(1+\nu)(1-\nu)\,p_x(y)}{E}-\frac{\nu(1+\nu)\,p_y}{E}\right)\boldsymbol{e_x}\otimes\boldsymbol{e_x}\\ &-\left(\frac{(1+\nu)(1-\nu)\,p_y}{E}-\frac{\nu(1+\nu)\,p_x(y)}{E}\right)\boldsymbol{e_y}\otimes\boldsymbol{e_y}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E}\left(p_x(y)\right)^2-2\frac{\nu(1+\nu)}{E}p_x(y)\,p_y+\frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E}{p_y}^2.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\int_\Omega\left[(1-\nu)\left(p_x(y)\right)^2-2\nu\,p_x(y)\,p_y+(1-\nu)\,p_y{}^2\right]d\Omega$$

On a donc d'après l'équation 2.2-1 :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\left[\int_{\Omega_1\cup\Omega_3}\left[4(1-\nu)-4\nu+(1-\nu)\right]d\Omega+\int_{\Omega_2}\left[9(1-\nu)-6\nu+(1-\nu)\right]d\Omega\right.$$
$$\left.+\int_{\Omega_4}\left[(1-\nu)-2\nu+(1-\nu)\right]d\Omega\right].$$

Soit :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\left[(5-9\nu)(|\Omega_1|+|\Omega_3|)+(10-16\nu)|\Omega_2|+(2-4\nu)|\Omega_4|\right].$$

On a donc :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1+\nu}{E}\left[40(5-9\nu)+30(10-16\nu)+30(2-4\nu)|\Omega_4|\right].$$

Et finalement :

$$E^e=\frac{40(1+\nu)(7-12\nu)}{E}=1{,}768\ \mathrm{MJ}\times\mathrm{m}^{-1}.$$

Le champ de déplacement analytique $\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{e_x}+u_y\boldsymbol{e_y}$ s'obtient en intégrant les déformations :

$$u_x=\int_{-5}^{x}\varepsilon_{xx}dx,$$
$$u_y=\int_{-5}^{y}\varepsilon_{yy}dy,$$

car les conditions limites appliquées sont $u_x(x=-5)=0$ et $u_y(y=-5)=0$.
Il est à noter que le tenseur des déformations est discontinu. On a en effet :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{cases}-\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}\boldsymbol{e_x}\otimes\boldsymbol{e_x}-\frac{(1+\nu)(1-3\nu)}{E}\boldsymbol{e_y}\otimes\boldsymbol{e_y},\ \text{dans}\ [-5,0[\times]-2,+2[\\ -\frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{E}\boldsymbol{e_x}\otimes\boldsymbol{e_x}-\frac{(1+\nu)(1-4\nu)}{E}\boldsymbol{e_y}\otimes\boldsymbol{e_y},\ \text{dans}\ [-5,+5]\times]+2,+5]\\ -\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}\boldsymbol{e_x}\otimes\boldsymbol{e_x}-\frac{(1+\nu)(1-3\nu)}{E}\boldsymbol{e_y}\otimes\boldsymbol{e_y},\ \text{dans}\ ]0,+5]\times]-2,+2[\\ -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\boldsymbol{e_x}\otimes\boldsymbol{e_x}-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\boldsymbol{e_y}\otimes\boldsymbol{e_y},\ \text{dans}\ [-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases}$$

On remarque que le champ de déformations est discontinu au travers des droites d'équation $y=-2$ et $y=+2$. Il est donc nécessaire de distinguer les cas selon le domaine sur l e quel on intègre pour expliciter la valeur des intégrales.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On a ainsi :

$$u_x=\begin{cases}\int_{-5}^{x}\left[-\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}\right]dx\text{, dans }[-5,0[\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{x}\left[-\frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{E}\right]dx\text{, dans }[-5,+5]\times]+2,+5]\\ \int_{-5}^{0}\left[-\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}\right]dx+\int_{0}^{x}\left[-\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}\right]dx\text{, dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{0}\left[-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\right]dx\text{, dans }[-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases},$$

et

$$u_y=\begin{cases}\int_{-5}^{-2}\left[-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\right]dy+\int_{-2}^{y}\left[-\frac{(1+\nu)(1-3\nu)}{E}\right]dy\text{, dans }[-5,0[\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{-2}\left[-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\right]dy+\int_{-2}^{+2}\left[-\frac{(1+\nu)(1-3\nu)}{E}\right]dy\\ +\int_{+2}^{y}\left[-\frac{(1+\nu)(1-4\nu)}{E}\right]dy\text{, dans }[-5,+5]\times]+2,+5]\\ \int_{-5}^{-2}\left[-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\right]dy+\int_{-2}^{y}\left[-\frac{(1+\nu)(1-3\nu)}{E}\right]dy\text{, dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{y}\left[-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\right]dy\text{, dans }[-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases}.$$

Soit :

$$u_x=\begin{cases}-\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}x-5\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}\text{, dans }[-5,0[\times]-2,+2[\\ -\frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{E}x-5\frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{E}\text{, dans }[-5,+5]\times]+2,+5]\\ -\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}x-5\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}\text{, dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}x-5\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\text{, dans }[-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases},\qquad \text{éq 2.2-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et :

$$u_y=\begin{cases}-\dfrac{(1+\nu)(1-3\nu)}{E}y-\dfrac{(1+\nu)(5-12\nu)}{E}, \text{ dans } [-5,0[\times]-2,+2[\\ -\dfrac{(1+\nu)(1-4\nu)}{E}y-5\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}, \text{ dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\\ -\dfrac{(1+\nu)(1-3\nu)}{E}y-\dfrac{(1+\nu)(5-12\nu)}{E}, \text{ dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ -\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}y-5\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}, \text{ dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases}. \quad \text{éq 2.2-3}$$

Il est à noter que le champ de déplacement n'est pas continu. Le champ étant solution d'un problème de contact, la partie normale aux interfaces du déplacement est continue et on a :

$$u_y(y=-2^-)=u_y(y=-2^+)=-3\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E},$$

et :

$$u_y(y=+2^-)=u_y(y=+2^+)=-\frac{(1+\nu)(7-18\nu)}{E}.$$

On a également :

$$u_x(x=0^-)=u_x(x=0^+)=-5\frac{(1+\nu)(2-3\nu)}{E}, \text{ pour } y\in]-2,+2[.$$

En revanche, la partie tangentielle du déplacement peut être discontinue et on a :

$$u_x(y=-2^+)-u_x(y=-2^-)=-\frac{(x+5)(1+\nu)(1-\nu)}{E}, \text{ pour } x\in[-5,0[,$$

et :

$$u_x(y=+2^+)-u_x(y=+2^-)=-\frac{(x+5)(1+\nu)(1-\nu)}{E}, \text{ pour } x\in[-5,0[,$$

alors que :

$$u_y(x=0^+)-u_y(x=0^-)=0, \text{ pour } y\in]-2,+2[.$$

Le calcul de l'intégrale du carré de la norme du déplacement doit donc encore une fois utiliser une partition du domaine conforme aux interfaces d'équation $y=-2$ et $y=+2$.

On a donc :

$$\int_\Omega \|\boldsymbol{u}\|^2 d\Omega=\int_{\Omega_1\cup\Omega_3}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\Omega+\int_{\Omega_2}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\Omega+\int_{\Omega_4}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\Omega.$$

On a finalement :

$$\int_\Omega \|\boldsymbol{u}\|^2 d\Omega=\frac{20\left(8436\nu^4+7587\nu^3-7334\nu^2-3685\nu+2800\right)}{3E^2}.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{20\left(8436\,\nu^4+7587\,\nu^3-7334\,\nu^2-3685\,\nu+2800\right)}{3}}\approx 0{,}933673961652\ \mathrm{m}^2.$$

2.2.2 Cas des contraintes planes

Le tenseur des contraintes solution analytique est :

$$\boldsymbol{\sigma}=-p_x(y)\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-p_y\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y \qquad \text{éq 2.2-4}$$

On a :

$$tr(\boldsymbol{\sigma})=-(p_x(y)+p_y).$$

Le tenseur des déformations est obtenu en appliquant la loi de Hooke et on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left[-\frac{1+\nu}{E}p_x(y)+\frac{\nu}{E}(p_x(y)+p_y)\right]\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x+\left[-\frac{1+\nu}{E}p_y+\frac{\nu}{E}(p_x(y)+p_y)\right]\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+\frac{\nu}{E}(p_x(y)+p_y)\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z$$

Et finalement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=-\left(\frac{p_x(y)}{E}-\nu\frac{p_y}{E}\right)\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\left(\frac{p_y}{E}-\nu\frac{p_x(y)}{E}\right)\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+\frac{\nu}{E}\left(p_x(y)+p_y\right)\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z$$

L'énergie de la structure est :

$$E^e=\frac{1}{2}\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega$$

On a :

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}=p_x(y)\left(\frac{p_x(y)}{E}-\nu\frac{p_y}{E}\right)+p_y(x)\left(\frac{p_y}{E}-\nu\frac{p_x(y)}{E}\right)$$

Soit :

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{(p_x(y))^2}{E}-2\nu\frac{p_x(y)\,p_y}{E}+\frac{{p_y}^2}{E}$$

On a donc :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1}{E}\int_\Omega\left[(p_x(y))^2-2\nu\,p_x(y)\,p_y+{p_y}^2\right]d\Omega$$

D'où d'après l'équation 2.2-1 :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1}{E}\left[\int_{\Omega_1\cup\Omega_3}(4-4\nu+1)\,d\Omega+\int_{\Omega_2}(9-6\nu+1)\,d\Omega+\int_{\Omega_4}(1-2\nu+1)\,d\Omega\right].$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Soit :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1}{E}\left[(5-4\nu)(|\Omega_1|+|\Omega_3|)+(10-6\nu)|\Omega_2|+(2-2\nu)|\Omega_4|\right].$$

On a donc :

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1}{E}\left[40(5-4\nu)+30(10-6\nu)+30(2-2\nu)\right].$$

Et finalement :

$$E^e=\frac{1}{E}40(7-5\nu)=2{,}2\,\mathrm{MJ}\times\mathrm{m}^{-1}. \qquad \text{éq 2.2-5}$$

Le champ de déplacement analytique $\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{e}_x+u_y\boldsymbol{e}_y$ s'obtient en intégrant les déformations :

$$u_x=\int_{-5}^{x}\varepsilon_{xx}\,dx,$$
$$u_y=\int_{-5}^{y}\varepsilon_{yy}\,dy,$$

car les conditions limites appliquées sont $u_x(x=-5)=0$ et $u_y(y=-5)=0$.
Il est à noter que le tenseur des déformations est discontinu. On a en effet :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{cases}-\frac{2-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\frac{1-2\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+3\frac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, \text{ dans } [-5,0[\times]-2,+2[\\ -\frac{3-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\frac{1-3\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+4\frac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, \text{ dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\\ -\frac{2-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\frac{1-2\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+3\frac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, \text{ dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ -\frac{1-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\frac{1-\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+2\frac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, \text{ dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases}. \qquad \text{éq 2.2-6}$$

On remarque que le champ de déformations est discontinu au travers des droites d'équation $y=-2$ et $y=+2$. Il est donc nécessaire de distinguer les cas selon le domaine sur l e quel on intègre pour expliciter la valeur des intégrales.

On a ainsi :

$$u_x=\begin{cases}\int_{-5}^{x}\left[-\frac{2-\nu}{E}\right]dx, \text{ dans } [-5,0[\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{x}\left[-\frac{3-\nu}{E}\right]dx, \text{ dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\\ \int_{-5}^{0}\left[-\frac{2-\nu}{E}\right]dx+\int_{0}^{x}\left[-\frac{2-\nu}{E}\right]dx, \text{ dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{0}\left[-\frac{1-\nu}{E}\right]dx, \text{ dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases},$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et

$$u_y=\begin{cases}\int_{-5}^{-2}\left[-\frac{1-\nu}{E}\right]dy+\int_{-2}^{y}\left[-\frac{1-2\nu}{E}\right]dy\text{, dans } [-5,0[\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{-2}\left[-\frac{1-\nu}{E}\right]dy+\int_{-2}^{+2}\left[-\frac{1-2\nu}{E}\right]dy+\int_{+2}^{y}\left[-\frac{1-3\nu}{E}\right]dy\text{, dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\\ \int_{-5}^{-2}\left[-\frac{1-\nu}{E}\right]dy+\int_{-2}^{y}\left[-\frac{1-2\nu}{E}\right]dy\text{, dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ \int_{-5}^{y}\left[-\frac{1-\nu}{E}\right]dy\text{, dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases}.$$

Soit :

$$u_x=\begin{cases}-\frac{2-\nu}{E}x-5\frac{2-\nu}{E}\text{, dans } [-5,0[\times]-2,+2[\\ -\frac{3-\nu}{E}x-5\frac{3-\nu}{E}\text{, dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\\ -\frac{2-\nu}{E}x-5\frac{2-\nu}{E}\text{, dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ -\frac{1-\nu}{E}x-5\frac{1-\nu}{E}\text{, dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases}, \qquad \text{éq 2.2- 7}$$

et :

$$u_y=\begin{cases}-\frac{1-2\nu}{E}y-\frac{5-7\nu}{E}\text{, dans } [-5,0[\times]-2,+2[\\ -\frac{1-3\nu}{E}y-5\frac{1-\nu}{E}\text{, dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\\ -\frac{1-2\nu}{E}y-\frac{5-7\nu}{E}\text{, dans }]0,+5]\times]-2,+2[\\ -\frac{1-\nu}{E}y-5\frac{1-\nu}{E}\text{, dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\end{cases}. \qquad \text{éq 2.2-8}$$

Il est à noter que le champ de déplacement n'est pas continu. Le champ étant solution d'un problème de contact, la partie normale aux interfaces du déplacement est continue et on a :

$$u_y(y=-2^-)=u_y(y=-2^+)=-3\frac{1-\nu}{E},$$

et :

$$u_y(y=+2^-)=u_y(y=+2^+)=-\frac{7-11\nu}{E}.$$

On a également :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$u_x(x=0^-)=u_x(x=0^+)=-5\frac{2-\nu}{E}, \text{ pour } y\in]-2,+2[.$$

En revanche, la partie tangentielle du déplacement peut être discontinue et on a :

$$u_x(y=-2^+)-u_x(y=-2^-)=-\frac{x+5}{E}, \text{ pour } x\in[-5,0[,$$

et :

$$u_x(y=+2^+)-u_x(y=+2^-)=-\frac{x+5}{E}, \text{ pour } x\in[-5,0[,$$

alors que :

$$u_y(x=0^+)-u_y(x=0^-)=0, \text{ pour } y\in]-2,+2[.$$

Le calcul de l'intégrale du carré de la norme du déplacement doit donc encore une fois utiliser une partition du domaine conforme aux interfaces d'équation $y=-2$ et $y=+2$.

On a donc :

$$\int_\Omega \|\boldsymbol{u}\|^2 d\Omega=\int_{\Omega_1\cup\Omega_3}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\Omega+\int_{\Omega_2}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\Omega+\int_{\Omega_4}\left(u_x^2+u_y^2\right)d\Omega.$$

On a finalement :

$$\int_\Omega \|\boldsymbol{u}\|^2 d\Omega=\frac{20\left(1951\nu^2-3685\nu+2800\right)}{3E^2}.$$

D'où :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{20\left(1951\nu^2-3685\nu+2800\right)}{3}}\approx 1{,}11656914997 \text{ m}^2.$$

2.2.3 Cas 3D

La structure occupe le domaine $\Omega_{3D}=\Omega\times[0,1]$. Les conditions aux limites du cas 3D sont les mêmes que celles des cas 2D dans le plan (X,Y), une condition de rouleau est imposée en $Z=0$ et le bord $Z=1$ est libre de contraintes. Le tenseur des contraintes solution analytique est donc identique au cas des contraintes planes (*cf.* éq 2.2-4) :

$$\boldsymbol{\sigma}=-p_x(y)\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-p_y\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y$$

La densité d'énergie élastique est donc identique à celle du cas 3D. Le solide est d'épaisseur unitaire dans la direction Z. L'expression de l'énergie de la structure est donc identique au cas des contraintes planes, mais les unités sont modifiées. On a alors (*cf.* éq 2.2-5) :

$$E^e=\frac{1}{E}40(7-5\nu)=2{,}2\,\text{MJ}\times\text{m}^{-1}.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le champ de déplacement analytique $\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{e}_x+u_y\boldsymbol{e}_y+u_z\boldsymbol{e}_z$ s'obtient en intégrant les déformations :

$$u_x=\int_{-5}^{x}\varepsilon_{xx}\,dx,$$
$$u_y=\int_{-5}^{y}\varepsilon_{yy}\,dy,$$
$$u_z=\int_{0}^{z}\varepsilon_{zz}\,dz,$$

car les conditions limites appliquées sont $u_x(x=-5)=0$, $u_y(y=-5)=0$ et $u_z(z=0)=0$.

Il est à noter que le tenseur des déformations est discontinu. On a en effet (*cf.* éq 2.2- 6) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{cases}-\dfrac{2-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\dfrac{1-2\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+3\dfrac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, & \text{dans } [-5,0[\times]-2,+2[\times[0,1]\\ -\dfrac{3-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\dfrac{1-3\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+4\dfrac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, & \text{dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\times[0,1]\\ -\dfrac{2-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\dfrac{1-2\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+3\dfrac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, & \text{dans }]0,+5]\times]-2,+2[\times[0,1]\\ -\dfrac{1-\nu}{E}\boldsymbol{e}_x\otimes\boldsymbol{e}_x-\dfrac{1-\nu}{E}\boldsymbol{e}_y\otimes\boldsymbol{e}_y+2\dfrac{\nu}{E}\boldsymbol{e}_z\otimes\boldsymbol{e}_z, & \text{dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\times[0,1]\end{cases}.$$

On remarque que le champ de déformations est discontinu au travers des droites d'équation $y=-2$ et $y=+2$. Il est donc nécessaire de distinguer les cas selon le domaine sur lequel on intègre pour expliciter la valeur des intégrales. Les expressions des composantes u_x et u_y sont identiques au cas des contraintes planes (*cf.* éq 2.2- 7 et 2.2- 8) et on a pour u_z :

$$u_z=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\frac{3\nu}{E}dz, & \text{dans } [-5,0[\times]-2,+2[\times[0,1]\\ \displaystyle\int_0^1\frac{4\nu}{E}dz, & \text{dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\times[0,1]\\ \displaystyle\int_0^1\frac{3\nu}{E}dz, & \text{dans }]0,+5]\times]-2,+2[\times[0,1]\\ \displaystyle\int_0^1\frac{2\nu}{E}dz, & \text{dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\times[0,1]\end{cases}.$$

Soit :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$u_z=\begin{cases}\dfrac{3\nu}{E}z\text{, dans } [-5,0[\times]-2,+2[\times[0,1]\\ \dfrac{4\nu}{E}z\text{, dans } [-5,+5]\times]+2,+5]\times[0,1]\\ \dfrac{3\nu}{E}z\text{, dans }]0,+5]\times]-2,+2[\times[0,1]\\ \dfrac{2\nu}{E}z\text{, dans } [-5,+5]\times[-5,-2[\times[0,1]\end{cases}. \qquad \text{éq 2.2-9}$$

Le calcul de l'intégrale du carré de la norme du déplacement doit donc encore une fois utiliser une partition du domaine conforme aux interfaces d'équation $y=-2$ et $y=+2$.
On a donc :

$$\int_{\Omega_{3D}}\|\boldsymbol{u}\|^2\,d\Omega=\int_{\Omega_1\times[0,1]\cup\Omega_3\times[0,1]}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)d\Omega+\int_{\Omega_2\times[0,1]}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)d\Omega+\int_{\Omega_4\times[0,1]}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)d\Omega.$$

On a finalement :

$$\int_{\Omega_{3D}}\|\boldsymbol{u}\|^2\,d\Omega=\frac{20\left(1999\,\nu^2-3685\,\nu+2800\right)}{3\,E^2}.$$

D'où :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{20\left(1999\,\nu^2-3685\,\nu+2800\right)}{3}}\approx 1{,}11785807089\,\mathrm{m}^{\frac{5}{2}}.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation X-FEM, en déformations planes, D_PLAN. Les interfaces sont définies par des fonctions de niveaux (level sets normales notées LN).

Les équations des fonctions de niveaux pour les deux interfaces horizontales et l'interface verticale sont respectivement les suivantes :

$$LN1 = Y - 2 \quad \text{éq 3.1-1}$$
$$LN2 = Y + 2 \quad \text{éq 3.1-2}$$
$$LN3 = X \quad \text{éq 3.1-3}$$

Les deux interfaces horizontales sont définies de manière classique en utilisant l'opérateur DEFI_FISS_XFEM avec les level sets normales LN1 et LN2.
L'interface verticale est définie avec la level set normale LN3 dans DEFI_FISS_XFEM. On ajoute dans cet opérateur le mot clé JONCTION. Sous ce mot clé, on donne les 2 interfaces horizontales préalablement définies dans l'opérande FISSURE et un point qui est à la fois en dessous de la première fissure et au dessus de la deuxième dans l'opérande POINT (voir figure 3.1-a). Ce point ne doit pas être nécessairement positionné sur LN3. Dans le cas présent, il peut être n'importe où dans le domaine délimité entre LN1 et LN2.

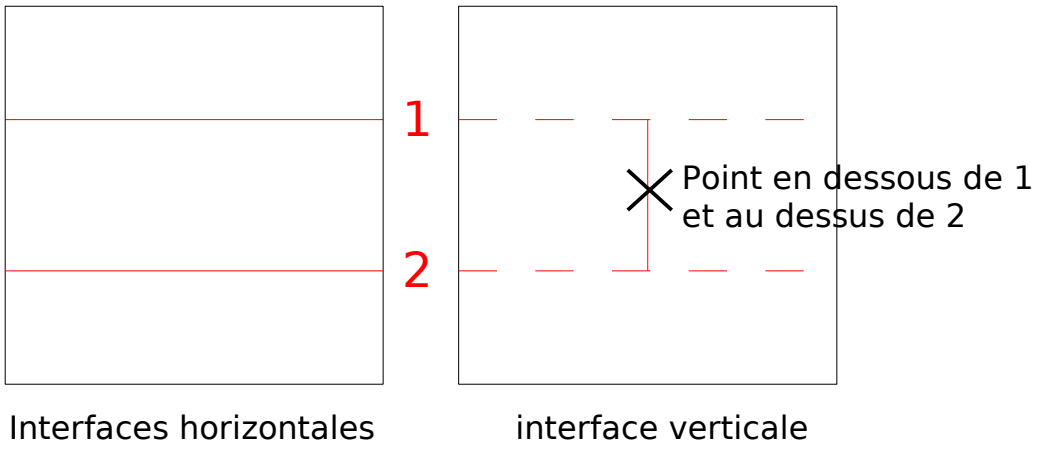


Figure 3.1-a : Construction des jonctions.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage qui comporte 81 mailles de type QUAD4 est représenté sur la figure 3.2-a.
On remarque sur cette figure que certaines mailles sont coupées plusieurs fois. Ce test permet donc de valider le découpage multiple.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

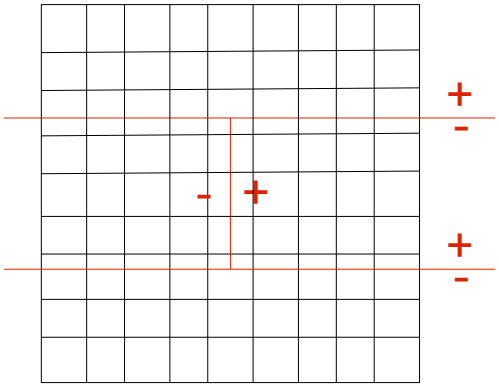


Figure 3.2-a : Le maillage de la modélisation A.

3.3 Fonctionnalités testées

On teste l'opérateur DEFI_FISS_XFEM dans le cas où l'on veut brancher une fissure sur plusieurs fissures différentes. On utilise le mot clé JONCTION qui permet de définir des branchements de fissures avec X-FEM .
Dans ce cas précis on branche la fissure 3 sur les fissures 1 et 2. On teste aussi l'opérateur MODI_MODELE_XFEM dans le cas de mailles qui sont coupées par plusieurs fissures. Le multi-Heaviside et le multi-stockage des Structures de Données (SD) X-FEM est bien entendu activé.
On teste l'assemblage des degrés de liberté Heaviside au niveau des matrices et des seconds membres des éléments connectés à l'intersection pour l'option COMPORTEMENT dans STAT_NON_LINE.
On valide aussi le post-traitement X-FEM dans le cas du multi-découpage, avec les opérateurs POST_MAIL_XFEM et POST_CHAM_XFEM .

3.4 Grandeurs testées et résultats

On teste les déplacements au niveau des lèvres des fissures après avoir effectué les opérations de post-traitements relatifs à X-FEM (POST_MAIL_XFEM et POST_CHAM_XFEM). Le déplacement DX doit correspondre au chargement imposé de la figure 1.3-a sur chacune des zones et DY doit être nul. On teste les valeurs minimum et maximum sur les lèvres de chacune des zones.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX	MIN	-0.25	1.00E-11
		MAX	-0.25	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_2	DX	MIN	-0.5	1.00E-11
		MAX	-0.5	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_3	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_4	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tableau 3.4-1

La déformée est représentée sur la figure 3.4-a. Le code couleur représente le champ de déplacement.

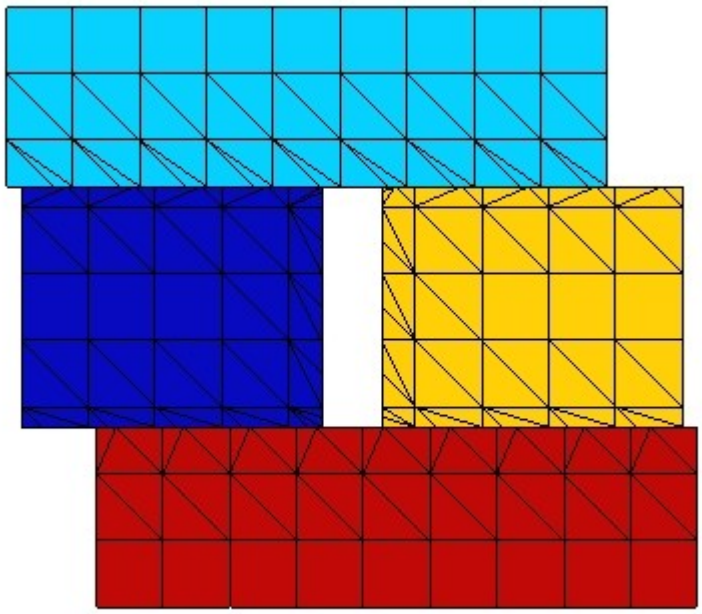


Figure 3.4-a : Déformée de la structure.

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	0

On teste la valeur de $||u||_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	7,071067812	0.1%

3.5 Remarques

On obtient de très bon résultats pour ce test, l'erreur relevée correspondant au résidu numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation A, mais en contraintes planes, C_PLAN. Les jonctions sont construites de la même manière.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage qui comporte 176 mailles de type TRIA3 est représenté sur la figure 4.2-a.

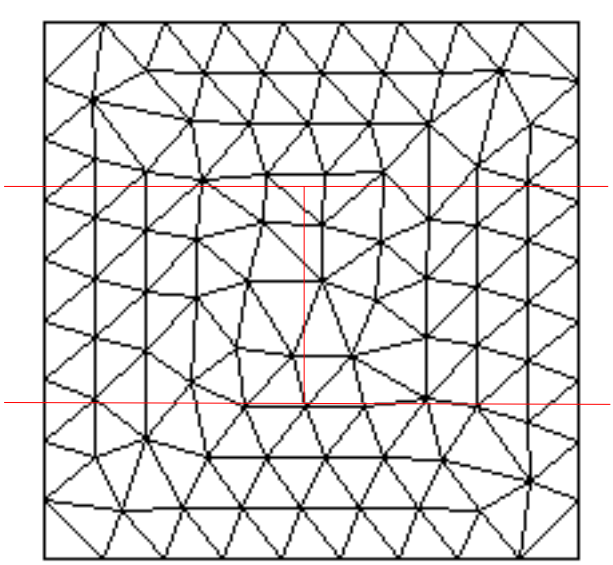


Figure 4.2-a : Le maillage de la modélisation B.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles utilisées pour la modélisation A.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX	MIN	-0.25	1.00E-11
		MAX	-0.25	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_2	DX	MIN	-0.5	1.00E-11
		MAX	-0.5	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_3	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_4	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11

Tableau 4.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformée est représentée sur la figure 4.4-a.

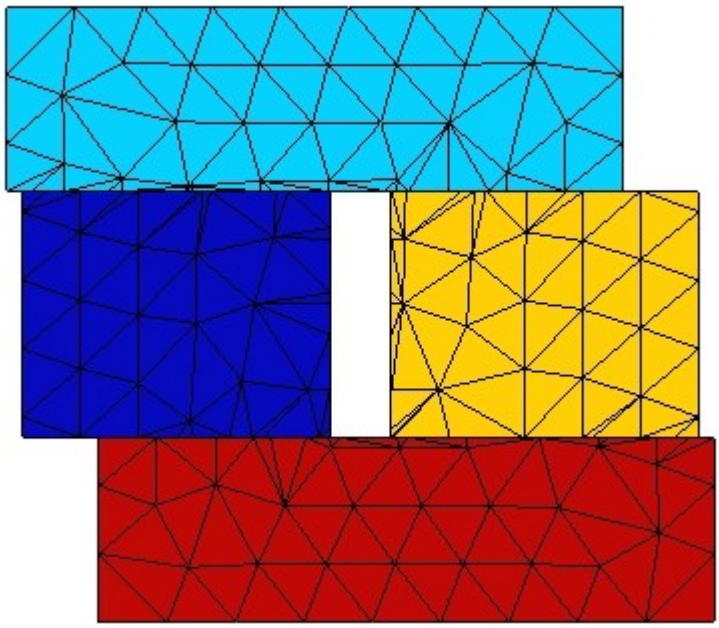


Figure 4.4-a : Déformée de la structure.

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	0

On teste la valeur de $\|\|u\|\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	7,071067812	0.1%

4.4 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation A, mais en 3D. Les jonctions sont construites de la même manière.

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage qui comporte 81 mailles de type HEXA8 est représenté sur la figure 5.2-a.

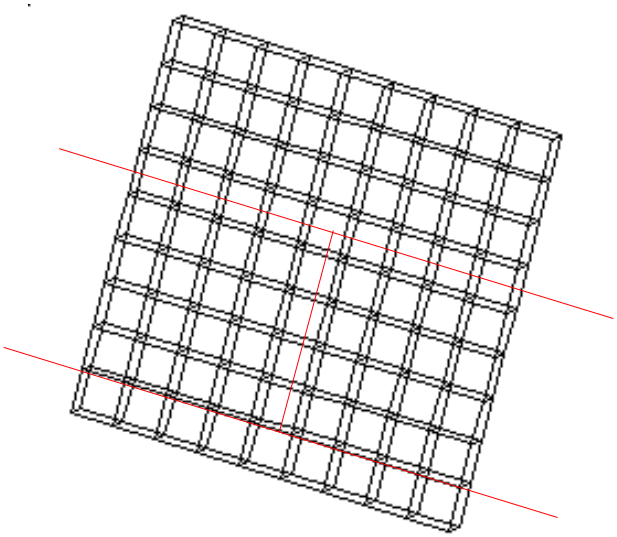


Figure 5.2-a : Le maillage de la modélisation C.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles utilisées pour la modélisation A. On ajoute des tests sur DZ.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX	MIN	-0.25	1.00E-11
		MAX	-0.25	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_2	DX	MIN	-0.5	1.00E-11
		MAX	-0.5	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_3	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_4	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11

Tableau 5.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformée est représentée sur la figure 5.4-a.

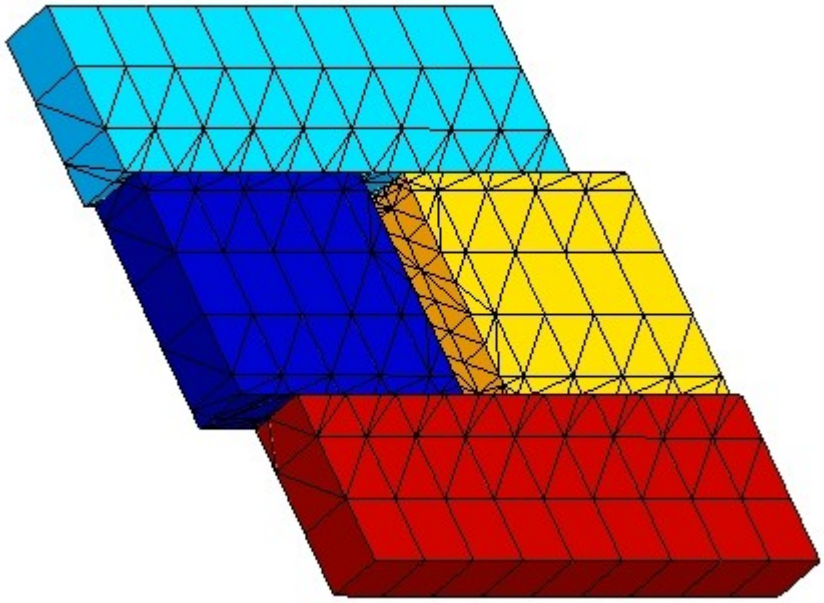


Figure 5.4-a : Déformée de la structure.

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	0

On teste la valeur de $\|\|u\|\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	7,071067812	0.1%

5.4 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation C.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage qui comporte 312 mailles de type TETRA4 est représenté sur la figure 6.2-a.

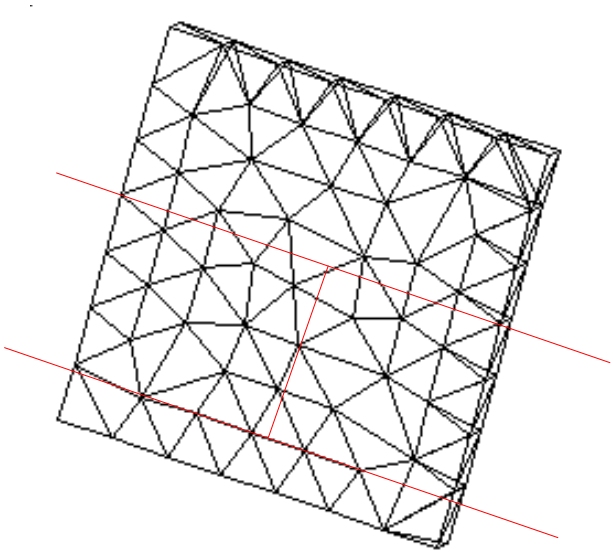


Figure 6.2-a : Le maillage de la modélisation D.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles utilisées pour la modélisation C.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX	MIN	-0.25	1.00E-11
		MAX	-0.25	2.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_2	DX	MIN	-0.5	1.00E-11
		MAX	-0.5	2.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_3	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	2.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_4	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	2.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11

Tableau 6.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformée est représentée sur la figure 6.4-a.

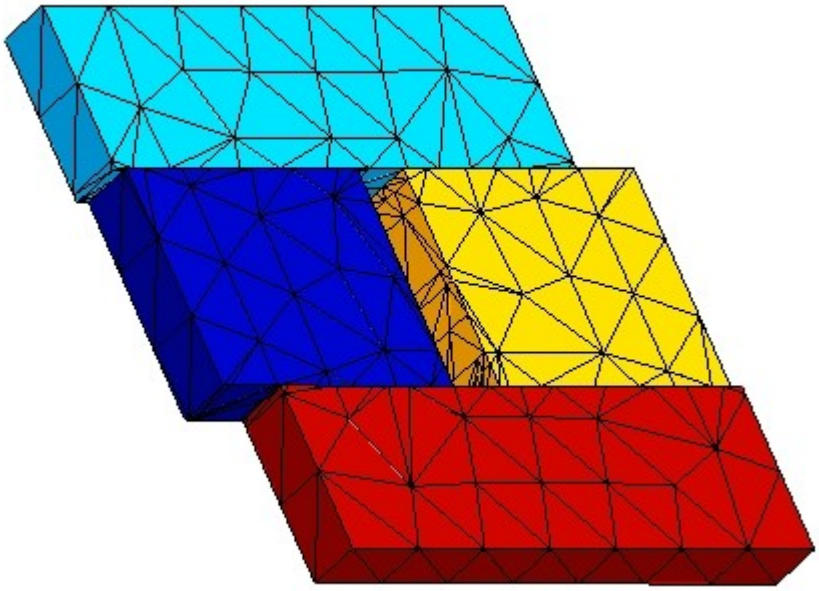


Figure 6.4-a : Déformée de la structure.

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	0

On teste la valeur de $\|\|u\|\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	7,071067812	0.1%

6.4 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation A.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage qui comporte 25 mailles de type QUAD4 est représenté sur la figure 7.2-a. Le maillage est moins raffiné que celui de la modélisation A, de manière à ce que certains éléments voient les deux fissures horizontales.

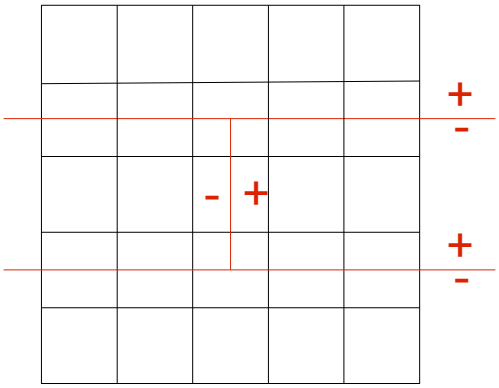


Figure 7.2-a : Le maillage de la modélisation E.

7.3 Fonctionnalités testées

Comme pour les autres modélisations, la fissure verticale se branche sur les deux fissures horizontales, mais certains éléments voient les 3 fissures.
Même s'il est possible de brancher la fissure 3 sur les fissures 1 et 2, ce n'est pas possible localement i.e. l'algorithme mis en place ne peut attacher la fissure 3 qu'à une seule autre fissure au sein d'un même élément : il y donc confusion entre les fissures 1 et 2.
Pour résoudre ce problème, on force l'utilisateur à lier la fissure 2 à la fissure 1 via le mot clé JONCTION dans DEFI_FISS_XFEM. La fissure 3 sera donc explicitement liée à la fissure 2 qui est liée à la première. La fissure 3 sera donc aussi implicitement liée à la première.

7.4 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles utilisées pour la modélisation A.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX	MIN	-0.25	1.00E-11
		MAX	-0.25	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_2	DX	MIN	-0.5	1.00E-11
		MAX	-0.5	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11
DEPZON_3	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Identification			Référence	% tolérance
DEPZON_4	DX	MIN	0.75	1.00E-11
		MAX	0.75	1.00E-11
	DY	MIN	0	1.00E-11
		MAX	0	1.00E-11

Tableau 7.4-1

La déformée est représentée sur la figure 7.4-a.

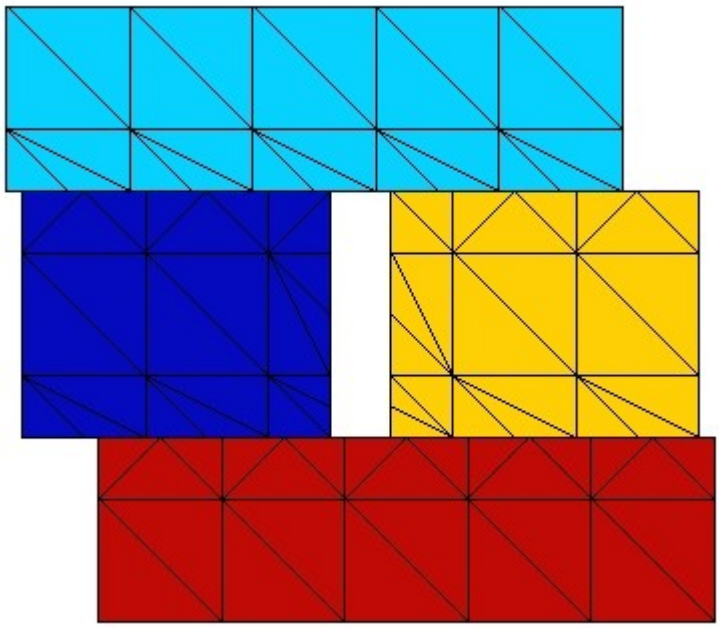


Figure 7.4-a : Déformée de la structure.

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	0

On teste la valeur de $\|\|u\|\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	7,071067812	0.1%

7.5 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation A, mais on applique les conditions de chargement en contact. Les jonctions sont construites avec X-FEM et les fonctions de niveaux de la même manière que pour la modélisation A.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage identique à celui de la modélisation A, est représenté figure 3.2-a.

8.3 Fonctionnalités testées

On teste les fonctionnalité déjà présentées pour la modélisation A. On teste aussi le contact X-FEM dans le cas de jonctions avec X-FEM via l'opérateur DEFI_CONTACT.

8.4 Grandeurs testées et résultats

On teste les déplacements au niveau des lèvres des fissures après avoir effectué les opérations de post-traitements relatives à X-FEM (POST_MAIL_XFEM et POST_CHAM_XFEM). Le déplacement DX doit suivre la fonction u_x de l'équation 2.2-2. Le déplacement DY doit suivre la fonction u_y de l'équation 2.2-3. On obtient la déformée de la figure 8.4-a.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
DEPZON_2	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
DEPZON_3	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
DEPZON_4	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0

Tableau 8.4-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformée est représentée sur la figure 8.4-a. Le code couleur représente le champ de déplacement.

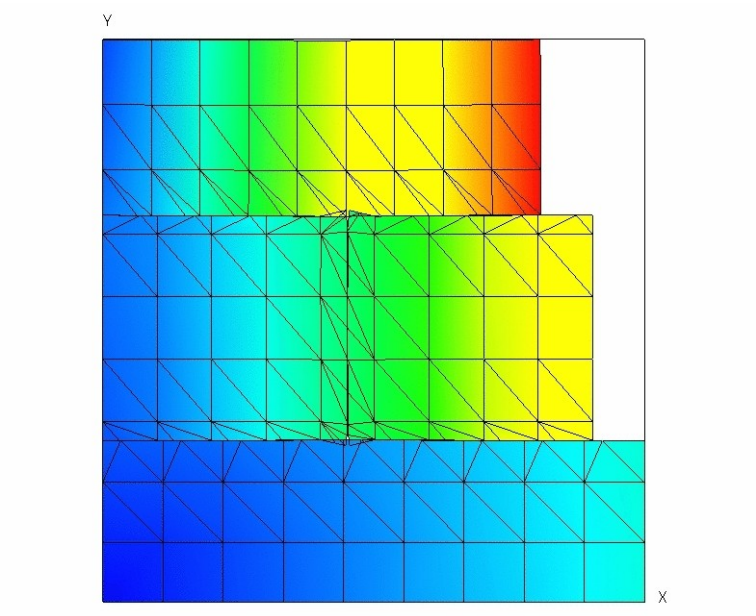


Figure 8.4-a : Déformée de la structure (exagération 10).

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR (exprimée en $\mathrm{J}\times\mathrm{m}^{-1}$).

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	1,768 10 6

On teste la valeur de $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	0,933673961652	0.1%

8.5 Remarques

On obtient une erreur élevée. En effet l'implémentation du redécoupage des facettes de contact n'a pas été implémenté. Les efforts de contact sur ces facettes ne sont pas prises en compte dans le calcul. La zone affecté concerne notamment les points de jonction (que l'on ne teste pas) ainsi que les éléments les contenant. Notons que les résultats sont nettement améliorer lorsqu'on raffine le maillage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation G

9.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation F, mais en contraintes planes, C_PLAN. Les jonctions sont construites de la même manière.

9.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage identique à celui de la modélisation B, est représenté sur la figure 4.2-a.

9.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les déplacements au niveau des lèvres des fissures après avoir effectué les opérations de post-traitements relatives à X-FEM (POST_MAIL_XFEM et POST_CHAM_XFEM). Le déplacement DX doit suivre la fonction u_x de l'équation 2.2-7. Le déplacement DY doit suivre la fonction u_y de l'équation 2.2-8.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_2	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_3	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_4	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0

Tableau 9.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformée est représentée sur la figure 9.4-a.

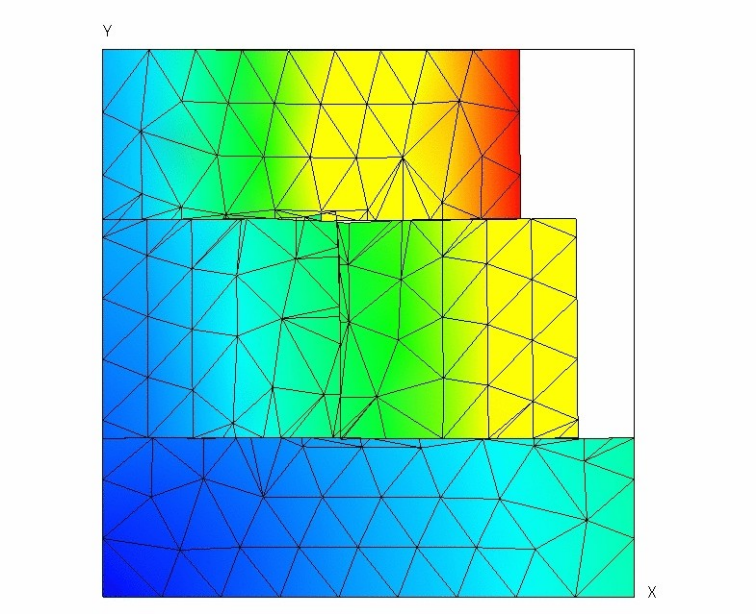


Figure 9.4-a : Déformée de la structure (exagération 10).

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR (exprimée en $\mathrm{J}\times\mathrm{m}^{-1}$).

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	2,2 10 6

On teste la valeur de $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	1,11656914997	0.1%

9.4 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation F.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Modélisation H

10.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation F, mais en 3D. Les jonctions sont construites de la même manière.

10.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage identique à celui de la modélisation C, est représenté sur la figure 5.2-a.

10.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les déplacements au niveau des lèvres des fissures après avoir effectué les opérations de post-traitements relatives à X-FEM (POST_MAIL_XFEM et POST_CHAM_XFEM). Le déplacement DX doit suivre la fonction u_x de l'équation 2.2-7. Le déplacement DY doit suivre la fonction u_y de l'équation 2.2-8. Le déplacement DZ doit suivre la fonction u_z de l'équation 2.2-9.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_2	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_3	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_4	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0

Tableau 10.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformée est représentée sur la figure 10.4-a.

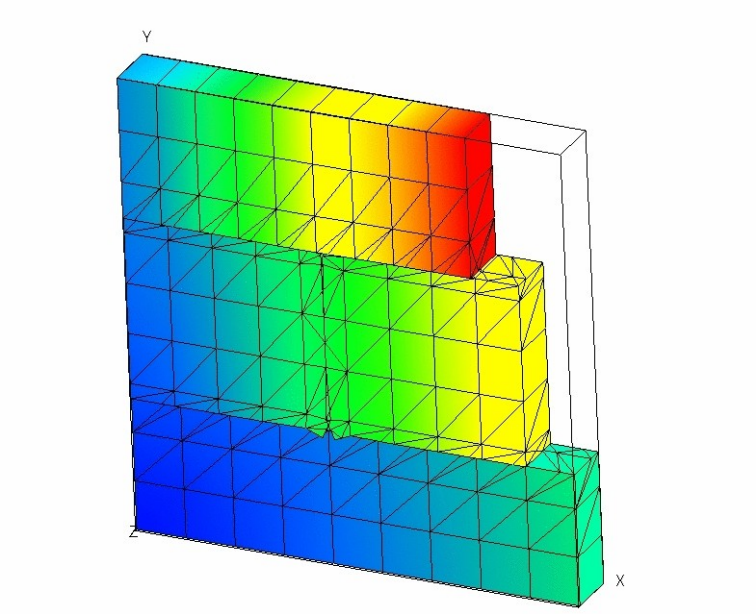


Figure 10.4-a : Déformée de la structure (exagération 10).

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR (exprimée en J).

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	2,2 10 6

On teste la valeur de $||u||_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	1,11785807089	0.1%

10.4 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation F.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Modélisation I

11.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation H.

11.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage identique à celui de la modélisation D, est représenté sur la figure 6.2-a.

11.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles présentées pour la modélisation H.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_2	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_3	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
DEPZON_4	DX- u_x	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DY- u_y	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0
	DZ- u_z	MIN	0	5,0
		MAX	0	5,0

Tableau 11.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La déformée est représentée sur la figure 11.4-a.

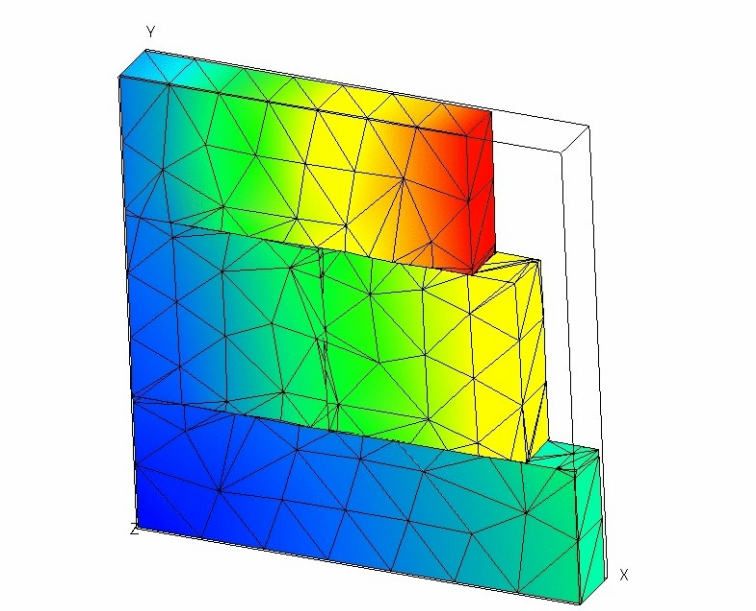


Figure 11.4-a : Déformée de la structure (exagération 10).

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR (exprimée en J).

Identification	Type de référence	Valeur de référence
E e	'ANALYTIQUE'	2,2 10 6

On teste la valeur de $\|\|u\|\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	1,11785807089	0.1%

11.4 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation F.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Modélisation J

12.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation F.

12.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage identique à celui de la modélisation E, est représenté sur la figure 7.2-a. Le maillage est moins raffiné que celui de la modélisation F, de manière à ce que certains éléments voient les deux fissures horizontales.

12.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles présentées pour la modélisation F.

Identification			*Référence*	*% tolérance*
DEPZON_1	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
DEPZON_2	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
DEPZON_3	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
DEPZON_4	DX- u_x	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0
	DY- u_y	MIN	0	7,0
		MAX	0	7,0

Tableau 12.3-1

La déformée est représentée sur la figure 12.4-a.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

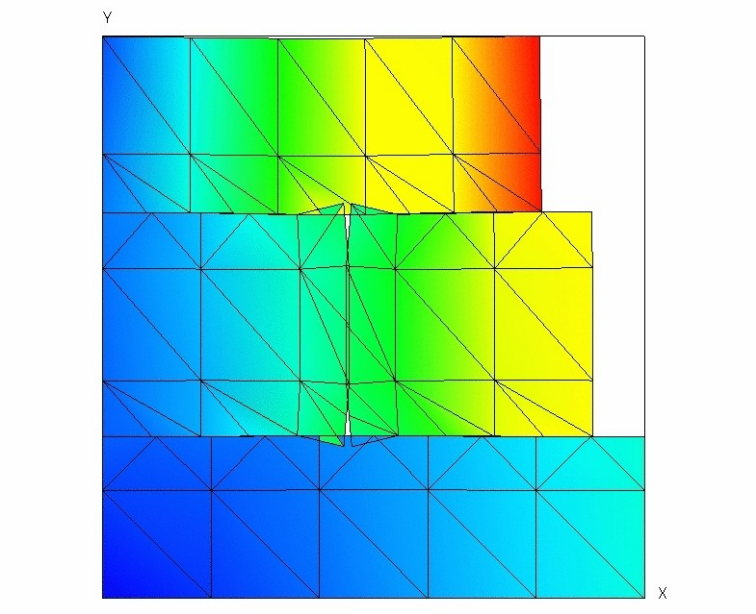


Figure 12.4-a : Déformée de la structure (exagération 10).

12.4 Remarques

Les remarques sont identiques à celles précisées pour la modélisation F.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Synthèse des résultats

La cinématique d'ouverture d'une fissure branchée à plusieurs autres fissures est possible avec X-FEM . Il faut néanmoins dans certains cas lier ces fissures entre elles via le mot clé JONCTION, même si ces fissures ne sont *a priori* pas branchées l'une sur l'autre.
L'approche a été validée en 2D pour des modélisations C_PLAN et D_PLAN et pour les éléments de type QUAD4 et TRIA3. On a aussi validé l'approche en 3D pour les éléments HEXA8 et TETRA4, avec et sans contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)