SSNV510 - Compression uniaxiale d'un bloc multi-fissuré

Résumé :

Ce test permet de valider l'approche multi-Heaviside pour les éléments X-FEM. Il s'agit d'un cas test où on introduit plusieurs interfaces comprimés latéralement. Le maillage est assez grossier de sorte que les mailles voient plusieurs fissures. Certains nœuds voient aussi plusieurs fissures. Ces nœuds contiennent alors plusieurs enrichissements Heaviside. On vérifie que ces différents enrichissements sont bien pris en compte au niveau cinématique et que les matrices de rigidité associées à chaque zone entre deux interfaces permettent d'obtenir les bonnes déformées. On teste l'approche avec et sans contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La structure est un rectangle sain dans lequel quatre fissures horizontales sont introduites, en rouge sur la figure 1.1.a. Les dimensions de la structure ainsi que la position des fissures sont données sur cette figure en mètres.

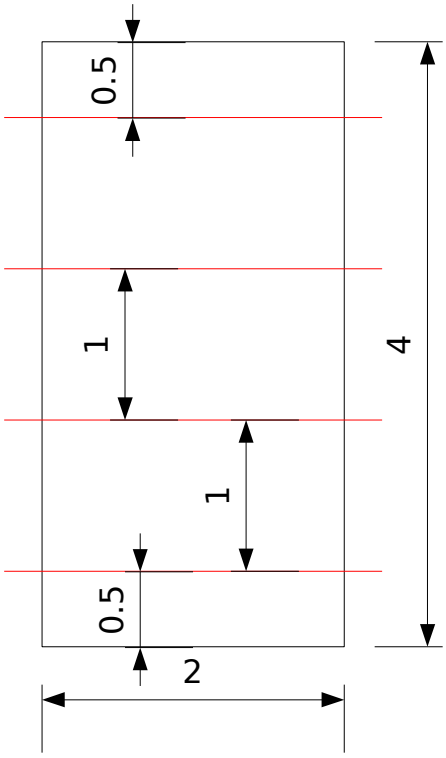


Figure 1.1-a : Géométrie de la structure et positionnement des fissures.

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young : $100\,\mathrm{MPa}$

Coefficient de poisson : 0.0

1.3 Conditions aux limites et chargements

Dans le cas avec contact (modélisations A à F), on bloque la composante X du déplacement sur la partie droite de la structure. On bloque la composante Y du déplacement sur sa partie inférieure. On applique un chargement en pression selon X constant par morceau sur la partie gauche, de manière à obtenir un escalier. Ce chargement est représenté figure 1.3-b. Le contact est actif sur les fissures, on applique une pression constante sur la partie supérieure, de manière à activer des effort de contact au niveau des fissures.
Dans le cas sans contact (modélisations G à I), on bloque les composantes X et Y du déplacement sur la partie droite de la structure et on applique un chargement en pression selon X constant par morceau sur la partie gauche, de manière à obtenir un escalier. Ce chargement est représenté figure 1.3-b. Le contact n'est pas actif sur les fissures, il n'y a donc pas de pression appliquer selon Y .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

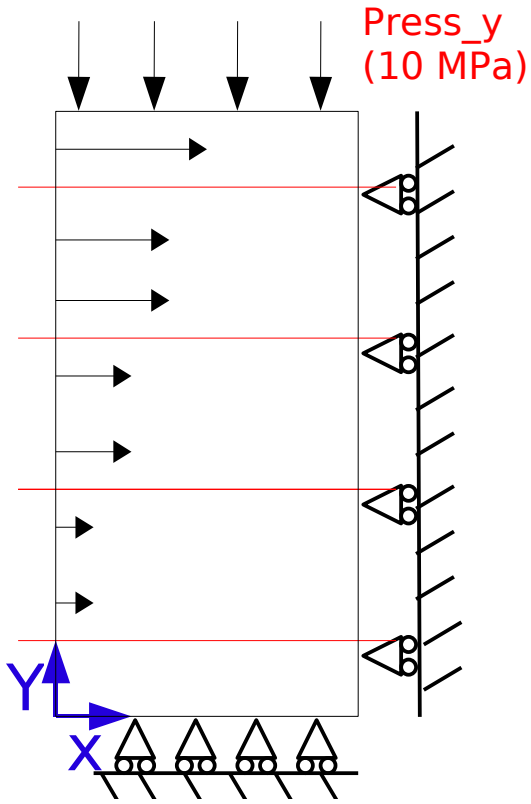


Figure 1.3-a : Illustration des conditions aux limites et des chargements, cas avec contact.

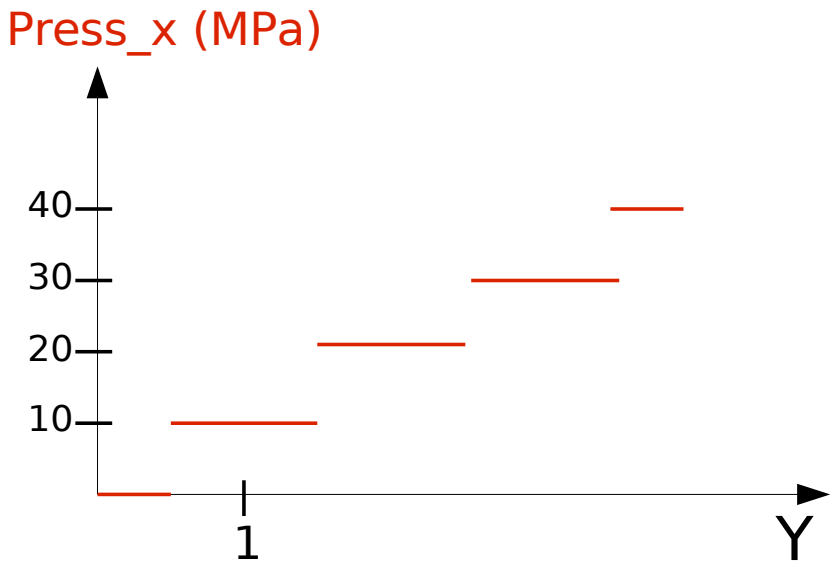


Figure 1.3-b : Pression imposée selon Y sur le bord gauche (en MPa).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

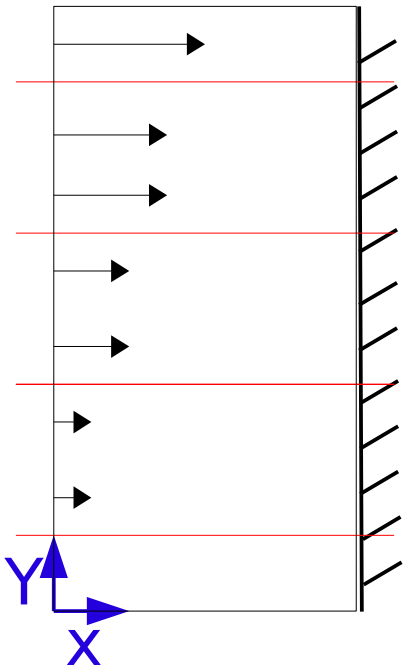


Figure 1.3-c : Illustration des conditions aux limites et des chargements, cas sans contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

Le coefficient de poisson étant nul, on doit retrouver une compression uniforme à chacun des 4 étages de la structure. Autrement dit pour un étage donné, le déplacement de la structure est proportionnel à la position selon X et il dépend de la Pression qui varie suivant Y. Le déplacement selon Y ne dépend que linéairement de Y car la pression imposée $Press_y$ est constante.
On a donc pour tous les points de la structure le déplacement qui vaut :

$$Depl_X(X,Y)=(2-X)\frac{Press_x(Y)}{E} \quad \text{éq 2.1-1}$$

$$Depl_Y(Y)=-Y\frac{Press_y}{E} \quad \text{éq 2.1-2}$$

2.1.1 Calcul de l'énergie de la structure

Soit $p_x=10\,\mathrm{MPa}$ et $p_y=10\,\mathrm{MPa}$ dans les cas avec contact, $p_y=0\,\mathrm{MPa}$ dans les cas sans contact. Le tenseur des contraintes solution analytique est :

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma_{xx}(y)\,\boldsymbol{e_x}\otimes\boldsymbol{e_x}-p_y\,\boldsymbol{e_y}\otimes\boldsymbol{e_y}$$

où on a posé :

$$\sigma_{xx}(y)=\begin{cases}0 \text{ pour } y<\frac{1}{2},\\ -p_x \text{ pour } y\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[,\\ -2\,p_x \text{ pour } y\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[,\\ -3\,p_x \text{ pour } y\in\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right[,\\ -4\,p_x \text{ pour } y\geq\frac{7}{2},\end{cases}$$

S oit $\Omega=[0,2]\times[0,4]$ le domaine occupé par le solide. L'énergie de la structure est définie par :

$$E^e=\frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}\,dS$$

Puisque $\nu=0$, on a $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{E}\boldsymbol{\sigma}$. D'où :

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{xx}(y)^2+p_y^2\right)$$

On a donc :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$E^e=\frac{1}{2}\frac{1}{E}\int_0^2\left(\int_0^4\left(\sigma_{xx}(y)^2+p_y^2\right)dy\right)dx$$

Soit :

$$E^e=\frac{1}{E}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}p_x^2\,dy+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}4\,p_x^2\,dy+\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}}9\,p_x^2\,dy+\int_{\frac{7}{2}}^{4}16\,p_x^2\,dy+\int_0^4 p_y^2\,dy\right)$$

On a donc , pour p_x et p_x exprimés en MPa :

$$E^e=\frac{1}{E}\left(22\,p_x^2+4\,p_y^2\right)$$

Ce résultat est valable dans le cas des contraintes planes et des déformations planes. Dans le cas 3D, l'épaisseur choisie est 1 m. L'expression de l'énergie est identique, mais les unités sont modifiées. On a alors, en contraintes planes et en déformations planes, avec contact :

$$E^e=2{,}6\times10^7\ \mathrm{MJ}\times\mathrm{m}^{-1}\ ,$$

en 3D avec contact :

$$E^e=2{,}6\times10^7\ \mathrm{MJ}\ ,$$

en contraintes planes et en déformations planes, sans contact :

$$E^e=2{,}2\times10^7\ \mathrm{MJ}\times\mathrm{m}^{-1}\ ,$$

en 3D, sans contact :

$$E^e=2{,}2\times10^7\ \mathrm{MJ}\ .$$

2.1.2 Calcul de la norme L ² du déplacement

Le champ de déplacement solution analytique est

$$\boldsymbol{u}=\frac{\sigma_{xx}(y)}{E}(2-x)\,\boldsymbol{e_x}-\frac{p_y}{E}y\,\boldsymbol{e_y}\ ,$$

La norme L^2 du déplacement est définie par :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\int_\Omega\|\boldsymbol{u}\|^2\,dS$$

On a :

$$\|\boldsymbol{u}\|^2=\frac{\sigma_{xx}(y)^2}{E^2}(2-x)^2-\frac{p_y^2}{E^2}y^2$$

On a donc :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\frac{1}{E^2}\int_0^4\left(\int_0^2\left[\sigma_{xx}(y)^2(2-x)^2-p_y^2\,y^2\right]dx\right)dy$$

Soit :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\frac{1}{E^2}\int_0^4\left(\frac{8}{3}\sigma_{xx}(y)^2-2\,p_y^2\,y^2\right)dy\,.$$

D'où :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\frac{1}{E^2}\left[\frac{8}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}p_x^2\,dy+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}4\,p_x^2\,dy+\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}}9\,p_x^2\,dy+\int_{\frac{7}{2}}^{4}16\,p_x^2\,dy\right)+2\int_0^4 p_y^2\,y^2\,dy\right].$$

Et finalement :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2=\frac{1}{E^2}\left(\frac{176}{3}\,p_x^2+\frac{128}{3}\,p_y^2\right).$$

Soit :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{176}{3}\,p_x^2+\frac{128}{3}\,p_y^2}.$$

Ce résultat est valable dans le cas des contraintes planes et des déformations planes. Dans le cas 3D, l'épaisseur choisie est 1 m. L'expression de la norme L^2 du déplacement est identique, mais les unités sont modifiées.
On a alors , en contraintes planes et en déformations planes, avec contact :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}\approx 1{,}00664459137\ \mathrm{m}^2$$

en 3D avec contact :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}\approx 1{,}00664459137\ \mathrm{m}^{\frac{5}{2}}$$

en contraintes planes et en déformations planes, sans contact :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}\approx 0{,}765941686205\ \mathrm{m}^2$$

en 3D, sans contact :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}\approx 0{,}765941686205\ \mathrm{m}^{\frac{5}{2}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit d'une modélisation X-FEM, en déformations planes, où les interfaces sont définies par des fonctions de niveau (level sets normales notées LN).

Les équations des fonctions de niveaux pour les trois fissures horizontales sont les suivantes :

$$LN1 = Y - 0.5 \quad \text{éq 3.1-1}$$
$$LN1 = Y - 1.5 \quad \text{éq 3.1-2}$$
$$LN2 = Y - 2.5 \quad \text{éq 3.1-3}$$
$$LN3 = Y - 3.5 \quad \text{éq 3.1-4}$$

3.2 Caractéristiques du maillage

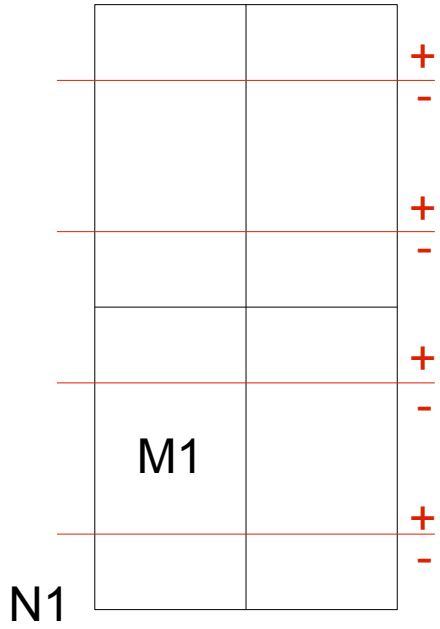


Figure 3.2-a : Le maillage de la modélisation A.

Le maillage comporte 4 mailles de type QUAD4, représentées sur la figure 3.2-a.
On remarque sur cette figure par exemple que le nœud $N1$ voit 2 fissures. Il doit donc être enrichi 2 fois et il possède alors les degrés de liberté cinématiques DX, DY, H1X, H1Y, H2X et H2Y. Le contact étant actif, Le nœud $N1$ possède aussi les degrés de Lagrange LAGS_C et LAG2_C.
D'autre part on remarque par exemple que la maille $M1$ « voit » 4 fissures. L'élément associé à cette maille stockera donc les champs des quatre fissures, indépendamment des degrés de liberté qui sont associés à ses nœuds.

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les déplacements au niveau des lèvres de la fissure. Le déplacement DX doit suivre la fonction $Depl_X$ de l'équation 2.1-1. Le déplacement DY doit suivre la fonction $Depl_Y$ de l'équation 2.1-2. On obtient la déformée en escalier de la figure 3.4-a.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Identification	Référence
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté esclave)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté esclave)	0

Tableau 3.3-1

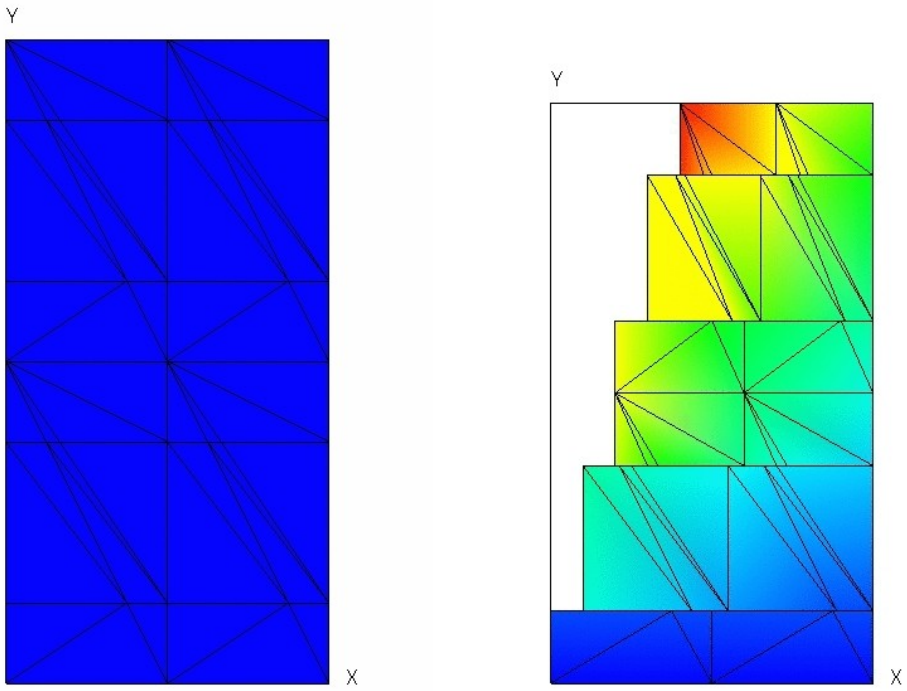


Figure 3.4-a : Déformée de la structure.

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
E e	'ANALYTIQUE'	2,6 10^7	0.1%

On teste la valeur de $\|\|u\|\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	1,00664459137	0.1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation A, mais en contraintes planes.

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que celui de la modélisation A.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles décrites dans la modélisation A. On obtient la déformée en escalier de la figure 3.4-a.

Identification	*Référence*
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté esclave)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté esclave)	0

Tableau 4.3-1

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
E e	'ANALYTIQUE'	2,6 10^7	0.1%

On teste la valeur de $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	1,00664459137	0.1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation A, mais en 3D.

5.2 Caractéristiques du maillage

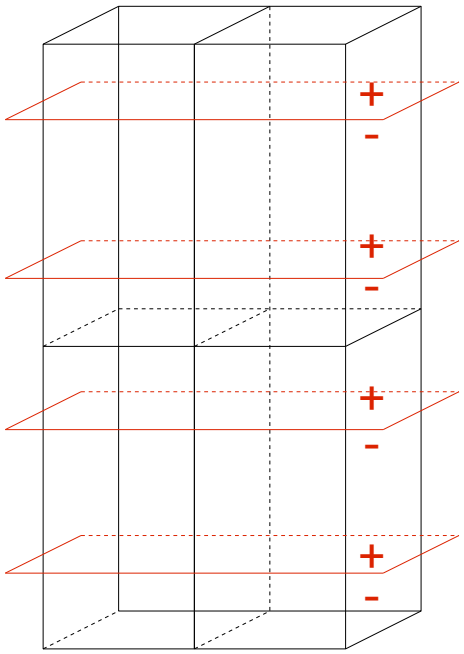


Figure 5.2-a : Le maillage de la modélisation C.

Le maillage comporte 4 mailles de type HEXA8, représentées sur la figure 5.2-a.
Même remarque que pour le maillage de la modélisation A. Certaines mailles « voient » 2 fissures, ils possèdent les degrés de liberté cinématique DX, DY, DZ, H1X, H1Y, H1Z, H2X et H2Y, H2Z ainsi que les degrés de liberté de Lagrange LAGS_C et LAG2_C. d'autres « voient » 4 fissures, ils possèdent aussi les degrés de liberté cinématiques H3X, H3Y, H3Z, H4X et H4Y, H4Z ainsi que les degrés de liberté de Lagrange LAG3_C et LAG4_C.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles décrites dans la modélisation A. On obtient la déformée en escalier de la figure 5.4-a.

Identification	*Référence*
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté esclave)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté esclave)	0

Tableau 5.3-1

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

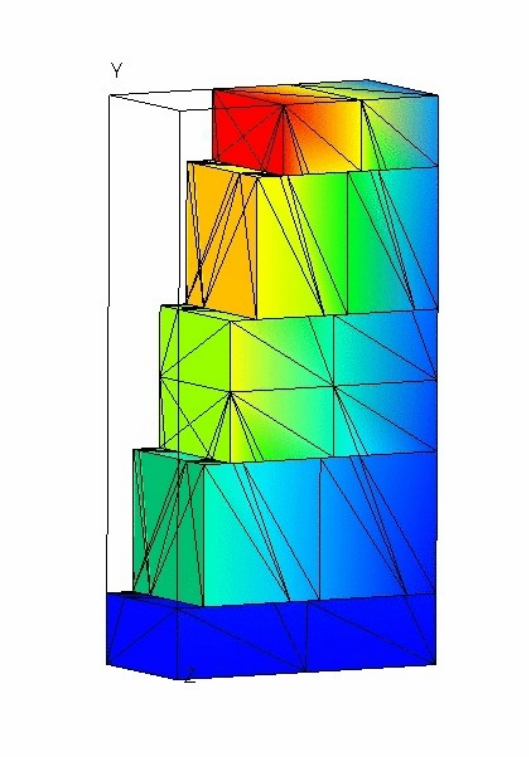


Figure 5.4-a : Déformée de la structure.

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
E e	'ANALYTIQUE'	2,6 10^7	0.1%

On teste la valeur de $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	1,00664459137	0.1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation G

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation A, sans contact.

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que celui de la modélisation A.

6.3 Fonctionnalités testées

Idem modélisation A, Sans contact, on a $\mathrm{Depl_Y}=0$.

6.4 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles décrites dans la modélisation A.

Identification	*Référence*
SOMM_ABS pour DX- $\mathrm{Depl_X}$ (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DY- $\mathrm{Depl_Y}$ (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DX- $\mathrm{Depl_X}$ (coté esclave)	0
SOMM_ABS pour DY- $\mathrm{Depl_Y}$ (coté esclave)	0

Tableau 6.4-1

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
E e	'ANALYTIQUE'	$2,2\ 10^7$	0.1%

On teste la valeur de $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	0,765941686205	0.1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation H

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation G, mais en contraintes planes.

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que celui de la modélisation A.

7.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles décrites dans la modélisation A.

Identification	*Référence*
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté esclave)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté esclave)	0

Tableau 7.3-1

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
E e	'ANALYTIQUE'	$2{,}2\ 10^7$	0.1%

On teste la valeur de $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	0,765941686205	0.1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation I

8.1 Caractéristiques de la modélisation

Il s'agit de la même modélisation que la modélisation G, mais en 3D.

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est le même que celui de la modélisation C.

8.3 Grandeurs testées et résultats

Les grandeurs testées sont identiques à celles décrites dans la modélisation A.

Identification	Référence
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté maître)	0
SOMM_ABS pour DX- Depl_X (coté esclave)	0
SOMM_ABS pour DY- Depl_Y (coté esclave)	0

Tableau 8.3-1

On teste la valeur de E^e produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
E e	'ANALYTIQUE'	$2{,}2\ 10^7$	0.1%

On teste la valeur de $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}$ produit par l'opérateur POST_ERREUR.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
Norme L 2	'ANALYTIQUE'	0,765941686205	0.1%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Synthèse des résultats

Ce test permet d'activer le multi-Heaviside pour les éléments X-FEM. On montre que l'on est capable de différencier le nombre de fissures « vues » par maille, de celui « vues » par nœud. Dans l'exemple de ce cas test, certains nœuds voient au maximum 2 fissures alors que les mailles en voient 4. On montre aussi qu'il est possible de prendre en compte des conditions de contact sur les interfaces, les nœuds sont alors aussi enrichis par de multiple degrés de liberté de Lagrange.

L'approche a été validée en D_PLAN, en C_PLAN et en 3D, pour les petits et les grands glissements.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)