FORMA04 - Travaux pratiques de la formation « Utilisation avancée » : contact de Hertz

Résumé :

Ce TP traite du contact de Hertz, un des rares cas non triviaux de contact pour lequel on dispose d'une solution analytique.
Le modèle est constitué de deux demi-sphères que l'on vient mettre en contact l'une contre l'autre.
Ce test simple permettra d'illustrer la mise en données du contact, les différentes manières de résoudre le problème et enfin les outils à disposition pour post-traiter un calcul de contact.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Problème de référence....3
1.1Géométrie....3
1.2Propriétés des matériaux....3
1.3Conditions aux limites et chargements....4
2Solution de référence....5
2.1Méthode de calcul....5
2.2Grandeurs et résultats de référence....5
2.3Incertitudes sur la solution....5
2.4Références....5
3Modélisation A....6
3.1Mise en œuvre du TP....6
3.1.1Géométrie....6
Bien lire l'énoncé en entier avant de commencer....6
3.1.2Maillage....6
3.1.3Fichier de commandes....7
3.1.4Pression de Hertz....8
3.1.5Contrainte de Von Mises....8
3.2Grandeurs testées et résultats....9
4Modélisation B....10
4.1Mise en œuvre du TP....10
4.1.1Formulation continue....10
4.2Grandeurs testées et résultats....10
5Modélisation C....11
5.1Mise en œuvre du TP....11
5.1.1Réalisation de la géométrie....11
5.1.2Réalisation du maillage....11
5.2Grandeurs testées et résultats....12

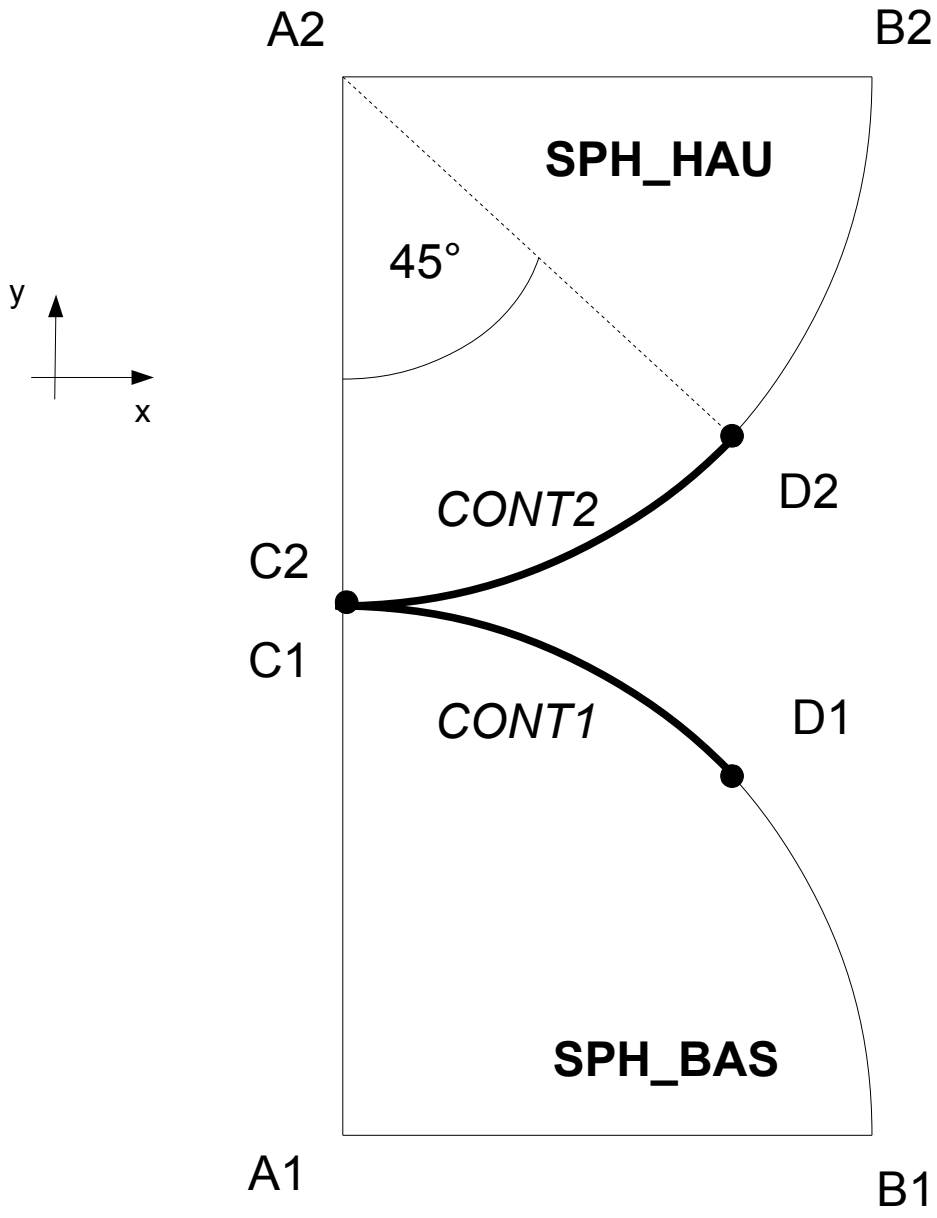
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Le modèle est constitué de deux demi-sphères. On choisit de traiter le problème en **axisymétrique**, on ne modélisera donc que des quarts de disque. Les données géométriques sont les suivantes :

- Rayon des sphères : $R=50\,mm$



1.2 Propriétés des matériaux

Le matériau est élastique linéaire :

- Module d'Young : $E=20000\,MPa$
- Coefficient de Poisson : $\nu=0.3$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Déplacement suivant DX bloqué sur l'axe $A1A2$ (cette condition est implicite en axisymétrique, on l'impose néanmoins pour les points qui ne seraient pas parfaitement sur l'axe)
- Déplacement suivant DY imposé :
  $+2\,mm$ sur $A1B1$
  $-2\,mm$ sur $A2B2$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

En 1881, Hertz a établi sous certaines hypothèses une solution au problème qui porte son nom[1]. Ainsi en supposant un contact sans frottement et pour lequel la demi-largeur de contact a est très petite devant le rayon des sphères R ($a \ll R$), la pression de contact aux points $C1$ et $C2$ vaut [2] :

$$P_0 = -\frac{E}{\pi(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{2h}{R}} \qquad \textbf{éq 2.1-1}$$

où h correspond à l'écrasement imposé, qui vaut ici $4\,mm$.

La demi-largeur de contact a s'exprime en fonction de l'écrasement imposé et du rayon des sphères :

$$a = \sqrt{\frac{Rh}{2}} \qquad \textbf{éq 2.1-2}$$

La surface de contact est un disque de rayon a, la distribution de pression en fonction du rayon r dans cette zone est la suivante :

$$\text{Si } r \leqslant a \text{ alors } \quad P(r) = P_0\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2} \qquad \textbf{éq 2.1-3}$$

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On comparera la pression obtenue au centre de la zone de contact et la demi-largeur de contact à la solution analytique ci-dessus.

2.3 Incertitudes sur la solution

Aucune (sous les hypothèses données ci-dessus).

2.4 Références

Table des Matières

1: HERTZ H, Über die Berührung fester elastischer Körper, 1881
2: DUMONT G, La méthode des contraintes actives appliquée au contact unilatéral, 1993

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Mise en œuvre du TP

3.1.1 Géométrie

Bien lire l'énoncé en entier avant de commencer

La géométrie est réalisée avec la plate-forme Salome-Meca, module `Geometry`.

L'outil « Sketcher » (Menu `New Entity → Basic → 2D Sketch`) permet de construire le contour du disque supérieur : $A2$, $B2$, $D2$ et $C2$. L'arc de cercle est fait en 2 fois afin que Le point $D2$ soit créé lors de la construction du contour. Pour $B2D2$, on donne le rayon à 50 et angle à -45° en utilisant `Direction` et `Perpendicular`, et pour $D2C2$, on donne le rayon à -50 et angle à 45° en utilisant `Direction` et `Tangent`.

On peut ensuite construire une face à partir de ce contour (Menu `New Entity → Build → Face`).

Par symétrie, on peut générer la deuxième sphère (Menu `Operations → Transformation → Mirror Image`) en choisissant l'axe `X` pour réaliser la symétrie.

Il rest e à assembler les deux sphères p our ne constituer qu'un seul objet `GEOM` (Menu `New Entity → Build → Compound`) . Attention : Dans cet objet, il y a toujours deux points, $C1$ et $C2$, qui superposent. Au contraire, les deux points se fusionnent si l'opération est `Partition` ,

Enfin il faut créer des groupes sur cette géométrie (avec les noms suggérés dans la figure ci-dessus) (Menu `New Entity → Group → Create Group`). On attire l'attention sur le fait que les groupes sont créés en dernier .

- Créer les groupes pour les surfaces des demi-sphères $SPHHAU$ et $SPHBAS$
- Afin de créer d es groupes pour les point superposés $C1$ et $C2$, on utilise la fonctionnalité permettant de sélectionner un sous élément d'une entité `GEOM` : coche r « *`Only Sub-shapes of the Second Shape`* », puis pour $C2$ par exemple, sélectionner comme « *`Second Shape`* » la demi-sphère supérieure dans l'arbre des objets, et seulement s es points sont soulignés .
- Créer les groupes pour l'application des conditions aux limites : le long d e l'axe d'axisymétrie ($A1A2$) et sur les parties supérieures et inférieures des demi-sphères ($A1B1$ et $A2B2$).
- Pour la modélisation du contact, on aura besoin de groupes de mailles représentant les surfaces potentielles de contact : créer les groupes $CONT1$ et $CONT2$.

3.1.2 Maillage

On utilise le module `Mesh`. Le maillage est défini par le menu `Mesh → Create Mesh` avec la géométrie à mailler. Le maillage sera réalisé en triangles, et on utilisera les hypothèses de maillage automatique « `Assign a set of hypotheses → 2D: Automatic Triangulation` » en choisissant une longueur maximum de 2mm.

On calcule le maillage (Menu `Mesh → Compute`). On obtient alors un maillage contenant environ 3000 triangles et 1500 nœuds.

On importera ensuite les groupes à partir de la géométrie (Menu `Mesh → Create Groups from Geometry`).

On importera le maillage au format `MED`.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

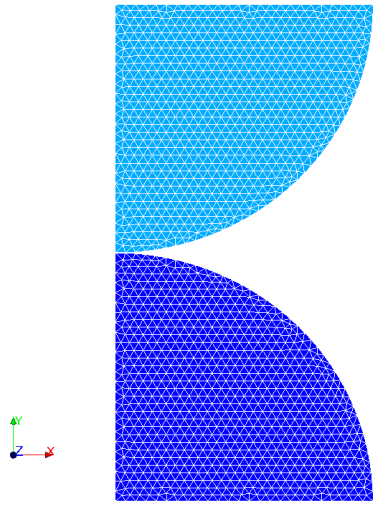


Illustration 3.1: Maillage obtenu pour la modélisation A

3.1.3 Fichier de commandes

On utilise le module AsterStudy. Puis en colonne gauche, cliquer sur l'onglet Case View .
On définit le fichier de commandes du cas de calcul. (cliquer à droite à CurrentCase et choisir Add Stage).
Nota : Pour ajouter des commandes : Menu Commands → Show All .

En utilisant la commande STAT_NON_LINE , construire le fichier de commandes relatif au cas-test en ne prenant pas le contact en compte dans un premier temps.

- Que constate-t-on sur la convergence ? Que faudrait-il faire pour converger ?
  Indice : comment le critère de convergence par défaut est-il construit ?

Aide pour co nstruire le fichier de commandes :

- Lire le maillage au format MED : Commande LIRE_MAILLAGE .
- Définir le matériau : Commande DEFI_MATERIAU.
- Affecter le matériau à tous les éléments : Commande AFFE_MATERIAU.
- Définir les éléments finis utilisés : Commande AFFE_MODELE pour affecter le phénomène MECANIQUE et la modélisation AXIS.
- Affecter les conditions aux limites / chargements mécaniques : AFFE_CHAR_MECA / DDL_IMPO pour la symétrie axiale et les déplacements imposés unitaires que l'on multipliera ensuite par une fonction rampe avec le temps.
- D éfinir la rampe de chargement (déplacement imposé) avec la commande DEFI_FONCTION . Par exemple, la fonction varie entre $(0.,0.)$ et $(2.,2.)$.
- Créer la discrétisation temporelle à l'aide des commandes DEFI_LIST_REEL. Par exemple, 20 pas de 0s à 2s.
- Résoudre le problème avec la c ommande STAT_NON_LINE . On met COMPORTEMENT / RELATION= ' ELAS ' , la liste d'instant définie précédemment dans INCREMENT , les matériaux dans CHAM_MATER , MODELE et également les conditions aux limites et le chargement (CHARGE + FONC_MULT) dans EXCIT .

Question bonus : combien y-a-t-il de mouvements de corps rigide en modélisation axisymétrique ?
Rappel : un mouvement de corps rigide est un mouvement à déformation nulle.

Ajouter la définition du contact : orienter les surfaces, définir la charge de contact avec la commande DEFI_CONTACT et adapter les options du solveur non linéaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Une alarme apparaît lors du calcul avec contact. On conservera la méthode de contact par défaut dans un premier temps (FORMULATION='DISCRETE' et 'ALGO_CONT='CONTRAINTE').

- Orienter la normale du maillage sur les contacts : Commande MODI_MAILLAGE / ORIE_PEAU_2D en utilisant les groupes CONT1 et CONT2. On garde le même nom du maillage en utilisant reuse.
- Définir le contact : Commande DEFI_CONTACT. On conservera la méthode de contact par défaut dans un premier temps (FORMULATION='DISCRETE' et 'ALGO_CONT='CONTRAINTE'). On affecte les groupes CONT1 et CONT2 au couple des zones de contact (maître et esclave).
- Adapter l'option de contact dans STAT_NON_LINE.

3.1.4 Pression de Hertz

Application numérique : calculer à la main avec les données du problème, la valeur de la pression de Hertz et de la demi-largeur de contact (voir le chapitre 2). Les comparer aux valeurs obtenues par le calcul.

Que constate-t-on ? Pourquoi cet écart ?

Remarque : on prendra en première approximation la composante $SIYY$ du champ SIEF_NOEU (calculé avec la commande CALC_CHAMP / CONTRAINTE) comme pression de contact

Tracer la pression de contact en fonction du rayon dans la zone de contact, la comparer à la solution analytique.

- C alcule r l e champ des contraintes par éléments aux nœuds (*SIEF_NOEU*) : commande CALC_CHAMP / CONTRAINTE.
- Créer un groupe de nœuds avec une abscisse curviligne orientée : commande DEFI_GROUP . On gardera le même nom de maillage avec reuse. On utilisera l'option CREA_GROUP_NO / OPTION='NOEUD_ORDO' en donnant le groupe de maille ($CONT1$) et le point de départ ($C1$).
- Extraire dans une table la composante $SIYY$ du champ SIEF_NOEU au dernier instant : commande POST_RELEVE_T . On précisera le nom du groupe des nœuds, le instant, le champ et sa composante en utilisant l'opération EXTRACTION .
- Créer la fonction $\sigma_{YY}=f(x)$: commande RECU_FONCTION . On définira l'abscisse curviligne (ABSC_CURV) comme PARA_X et SIYY comme PARA_Y .
- Construire la solution analytique :
  - C alculer la pression aux points $C1$ et $C2$, P_0 et la demi-largeur de contact a
  - Créer la formule analytique : commande FORMULE. Elle dépend de la coordonnée curviligne x (NOM_PARA='x' / VALE='P_0*sqrt(1.-x*x/a/a)').
  - Créer une liste de s valeurs réel le s de x : Commande DEFI_LIST_REEL . Par exemple, 100 valeurs de 0 à 10mm.
  - Interpolation de la formule à partir de la liste de x : commande CALC_FONC_INTERP .
- Imprimer les deux fonctions au format XMGRACE par la commande IMPR_FONCTION .

3.1.5 Contrainte de Von Mises

Afficher la contrainte de Von Mises sur la configuration déformée avec Salomé. **Comment varie cette contrainte dans la sphère ? Où se situe le maximum ?**

On affichera la composante VMIS_SG du champ des contraintes équivalentes SIEQ_NOEU calculé avec la commande CALC_CHAMP / CRITERES.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut imprimer les résultats au format `MED` *à l'aide de commande* `IMPR_RESU` *afin de visualiser le champ des contraintes dans* `Results` *ou dans* `Paravis` *et la position du maximum (menu* `Edit → Find Data`*).*

3.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
σ_{yy} point $C1$	'ANALYTIQUE'	$-2798{,}3\ Mpa$	1,0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

On repartira de la modélisation A. Le maillage est le même que celui de la modélisation A **mais il est passé en quadratique**.

4.1 Mise en œuvre du TP

4.1.1 Formulation continue

Convertir le maillage de la modélisation A en maillage quadratique dans le module `Mesh` (Menu `Modification → Convert to/from quadratic`)

> *Afin de profiter pleinement des éléments quadratiques et d'obtenir un profil de pression lisse, il est important de placer les nœuds milieux sur la géométrie lors de la conversion (cocher pour cela la case « `Medium nodes on geometry` » lors de la conversion).*

Changer de méthode de contact et utiliser la formulation `'CONTINUE'`. **Observer la pression de contact obtenue à l'aide du degré de liberté `LAGS_C` du champ `DEPL`**. Comparer avec la méthode de contact par défaut. Que constate-t-on ? Laquelle des méthodes fournit la meilleure approximation ?

> *Pour obtenir un profil de pression correct, il faut utiliser un schéma d'intégration des termes de contact aux points de Gauss (`INTEGRATION='GAUSS'` dans la commande `DEFI_CONTACT / ZONE`).*
>
> *Afin de supprimer l'alarme qui apparaît avec les réglages par défaut, il est nécessaire d'imposer `REAC_ITER=1` sous le mot-clé facteur `NEWTON` de la commande `STAT_NON_LINE` (en formulation continue, la matrice tangente est forcément reconstruite à chaque itération).*

4.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
$DEPL$ $LAGS_C$ point $C1$	'ANALYTIQUE'	$-2798{,}3\ Mpa$	3,0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

Dans cette modélisation, on réalise un maillage en quadrangles, avec un raffinement à proximité de la zone de contact.

5.1 Mise en œuvre du TP

5.1.1 Réalisation de la géométrie

Dans cette modélisation, on doit partitionner la géométrie de manière à pouvoir la mailler en quadrangles.

Dans le module GEOM, une illustration de la partition possible est donnée dans la figure 5.1 :

- Prendre la face $SPHHAU$ et expliciter tous ses points (menu New Entity → Explode : Vertex), puis on obtient les 4 points $A2$, $B2$, $C2$ et $D2$
- Créer l es points M , N et P afin de générer les lignes de partition en rouge (menu New Entity → Basic → Point) : $(0,25,0)$, $(25,25,0)$ et $(25,50,0)$
- Générer les lignes de partition (menu New Entity → Basic → Line)
- Partitionner $SPHHAU$ avec les lignes ci-dessus (Menu Operations → Partition).
- Par symétrie, on peut générer une nouvelle face inférieure (Menu Operations → Transformation → Mirror I mage) en choisi ssant l'axe X pour réaliser la symétrie
- Il reste à assembler les deux nouvelles sphères pour ne constituer qu'un seul objet GEOM (Menu New Entity → Build → Compound) .
- Définir tous les groupes comme dans la modélisation A, dont on aura besoin pour affecter les conditions aux limites et les chargements (menu New Entity → Groupe → Create Groupe)

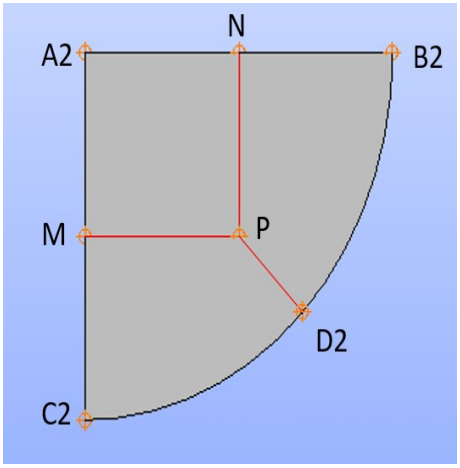


Illustration 5.1: Partition du disque supérieur

5.1.2 Réalisation du maillage

Pour le maillage, on choisit de raffiner autour de la zone de contact en utilisant une progression géométrique sur la circonférence et sur le rayon. Il peut être nécessaire de réorienter certains segments dans le module Mesh :

- L e maillage est défini par le m enu Mesh → Create Mesh avec la géométrie à mailler. Le maillage sera réalisé en triangles, et o n utilisera les hypothèses de maillage automatique « Assign a set of hypotheses → 2D: Automatic Qua drangulation » en choisissant le nombre des segments 15 . On c alcul e le maillage (Menu Mesh → Compute) .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- On définit le sous-maillage (Menu `Mesh → Creat Sub-mesh`) avec les groupes $CONT1$ et $CONT2$. Il est réalisé à l'aide de l'algorithme `Wire Discretisation`, l'hypothèse `Start and End Length` (par exemple, 0.2mm et 2.0mm) et l'hypothèse avancée `Propagation of Node Distribution on Opposite Edges`. On obtient alors un maillage linéaire contenant environ 3500 quadrangles et 4000 nœuds.
- P asser le maillage de linéaire à quadratique : « `Modification -> Convert to/from quadratic` ».
- On importera ensuite les groupes à partir de la géométrie (Menu `Mesh → Create Groups from Geometry`).

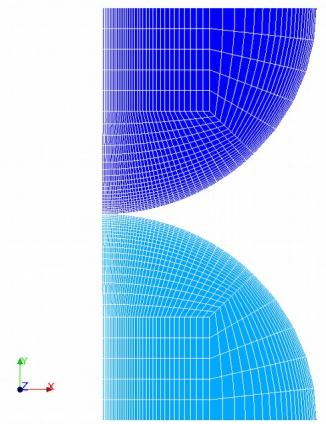


Illustration 5.2: Maillage en quadrangles obtenu pour la modélisation C

5.2 Grandeurs testées et résultats

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance
σ_{yy} point $C1$	'ANALYTIQUE'	$-2798,3\ Mpa$	5,0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)