SSNV187 - Validation de la loi ELAS_HYPER sur un cube

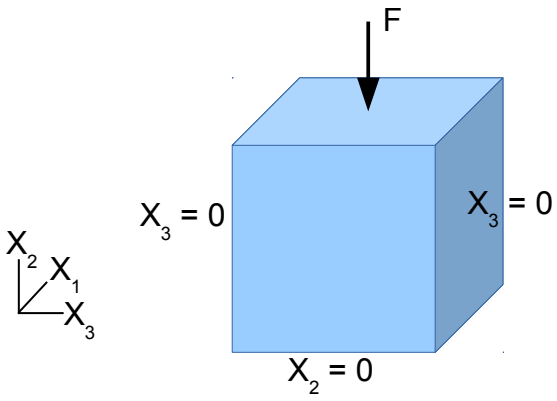
Résumé :

Ce test permet de valider le comportement hyper-élastique de type Signorini (matériau ELAS_HYPER). On s'appuie sur un test élémentaire en déformations planes et en $3D$, par rapport à une référence analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



On considère un cube de coté $1\mathrm{m}$ qui repose sur un plan ($x_2=0$ sur la face inférieure), soumis à une pression F sur la face supérieure et en situation de déformation plane suivant x_3 ($x_3=0$ sur les faces droite et gauche). Le cube ne peut donc que s'étirer suivant l'axe x_1).

1.2 Propriétés des matériaux

On teste sur trois matériaux différents, correspondant à trois modèles courants en hyper-élasticité.

Comportement ELAS_HYPER	Mooney-Rivlin	Néo-Hookéen	Signorini
C10	0.709	1.2345	0.1234
C01	2.3456	0	1.2345
C20	0	0	0.456
NU	0.499	0.499	0.499

1.3 Conditions aux limites et chargements

- Face inférieure : $DY=0$
- Face supérieure : $F=0.876\ \mathrm{Pa}$
- Face gauche et droite : $DZ=0$ en 3D, rien en D_PLAN

Le chargement est croissant de $F=0$ à $F=0.876\mathrm{Pa}$, en 20 incréments.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

On se repose sur le résultat de [bib1]. L'état de déformations planes permet d'écrire le champ de déplacement uniforme dans le cube très facilement :

$$\begin{cases} u_1 = a_1 . x_1 \\ u_2 = w . x_2 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec w le déplacement vertical (négatif) de la face supérieure et a_1 une constante arbitraire.
La condition d'incompressibilité permet d'écrire :

$$a_1 = \frac{-w}{1+w} \quad (2)$$

Et on trouve la relation entre la force appliquée F et le déplacement w de la face supérieure :

$$F = 2\mathrm{S}. \frac{w.(2+w).(1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} . \left(\frac{\partial \Psi}{\partial J_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial J_2} \right) \quad (3)$$

S est la surface, Ψ est le potentiel de déformation et J_1, J_2 sont les invariants du tenseur de Green-Lagrange. Le potentiel de déformation utilisé par ELAS_HYPER est le suivant :

$$\Psi = C_{10} . (J_1 - 3) + C_{01} . (J_2 - 3) + C_{20} . (J_1 - 3)^2 + \Psi_{vol} \quad (4)$$

Ψ_{vol} est le potentiel correspondant à l'incompressibilité. Il dépend des invariants J_1 et J_2 et de C_{10}, C_{01} et C_{20} qui sont les caractéristiques matériaux. Comme de plus $S = 1$ on obtient :

$$F = 2. \frac{w.(2+w).(1+(1+w)^2)}{(1+w)^3} . \left[C_{10} + C_{01} + 2. C_{20} . \frac{w^2.(2+w)^2}{(1+w)^2} \right] \quad (5)$$

La résolution de cette équation non linéaire en w se fait simplement par dichotomie pour les $w < 0$.

3 Références bibliographiques

[1] G. A. HOLZAPFEL: Nonlinear solid mechanics, 2001, Wiley.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation A

4.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en $2D$ avec déformations planes D_PLAN, en utilisant des mailles linéaires.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments linéaires : 228 TRIA3
Nombre de nœuds : 135

4.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation B

5.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation en $2D$ avec déformations planes D_PLAN, en utilisant des mailles quadratiques.

5.2 Caractéristiques du maillage.

Nombre d'éléments linéaires : 228 TRIA6
Nombre de nœuds : 497

5.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi la contrainte au milieu du carré :

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation C

6.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 455 nœuds.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation D

7.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_SI (éléments TETRA10 sous-intégrés).

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres et 3055 nœuds.

7.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation Q

8.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation D_PLAN_HHO_121 (éléments HHO linéaire et quadratique). On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

8.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 228 TRIA6

8.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation N

9.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation D_PLAN_HHO_121 (éléments HHO linéaire et quadratique). On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

9.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 256 QUAD8

9.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Modélisation O

10.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_HHO_121 (éléments HHO linéaire et quadratique).. On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

10.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres TETRA8.

10.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Modélisation P

11.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_HHO_121 (éléments HHO linéaire et quadratique).. On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

11.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 216 hexaèdres HEXA27

11.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Modélisation S

12.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation D_PLAN_HHO_222 (éléments HHO linéaire et quadratique). On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

12.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 256 QUAD8

12.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Modélisation T

13.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_HHO_222 (éléments HHO linéaire et quadratique).. On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

13.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 1918 tétraèdres TETRA8.

13.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14 Modélisation U

14.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation 3D_HHO_222 (éléments HHO linéaire et quadratique).. On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

14.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 216 hexaèdres HEXA27

14.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression
Contrainte σ_{ZZ}	1,0	Non-régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15 Modélisation V

15.1 Caractéristiques de la modélisation

C'est une modélisation D_PLAN_HHO_222 (éléments HHO linéaire et quadratique). On utilise la loi de comportement Signorini native avec le modèle GREEN_LAGRANGE.

15.2 Caractéristiques du maillage

Nombre d'éléments : 228 TRIA6

15.3 Grandeurs testées et résultats

Premier calcul (MOONEY-RIVLIN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	$-3{,}40091\text{E-}2$	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Deuxième calcul (NEO-HOOKEAN)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.078180	Analytique	0,30%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

Troisième calcul (SIGNORINI)

Valeur testée	Instant	Référence	Type	*Tolérance*
Déplacement w	1,0	-0.070936	Analytique	0,20%

On teste aussi les contraintes au milieu du cube:

Valeur testée	Instant	Type
Contrainte σ_{YY}	1,0	Non-régression

16 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont en bon accord avec la solution de référence. Les calculs sont plus précis en 3D quand on est en quadratique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)