SSNV152- Traction élastique. Calcul des contraintes de Cauchy

Résumé

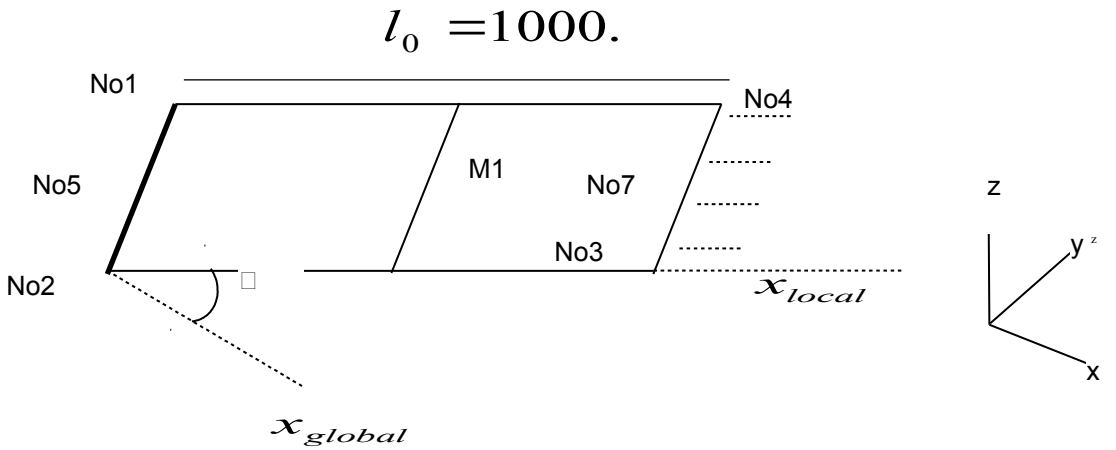
Le but de ce test est de valider le calcul des contraintes de Cauchy par l'option SIGM_ELNO.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

La géométrie de ce test est une plaque carrée dans le plan (x, y) tournée de $30°$ par rapport à x autour de z.



On appelle l la longueur de la plaque déformée, on notera x, y, z les coordonnées de la configuration déformée et X, Y, Z les coordonnées de la configuration initiale

1.2 Propriétés des matériaux

On prend $E = 200000.MPa$ et $\nu = 0$

1.3 Conditions aux limites et chargements mécaniques

On bloque les nœuds $No1$, $No5$ et $No2$ de sorte que $DX = DY = DZ = DRX = DRY = DRZ = 0$,
et on impose un déplacement local $Dx = 100.$ sur les nœuds $No3$, $No4$ et $No7$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est analytique.

Passage de l'état initial à l'état déformé :

$$x = \frac{1}{l_0} X,\ y = \frac{a}{a_0} Y,\ z = \frac{b}{b_0} Z$$

où

a est la longueur de la déformée de la plaque suivant Y,
a_0 est la longueur initiale de la plaque,
b est l'épaisseur de la plaque déformée,
b_0 est l'épaisseur initiale de la plaque.

Du fait que $\nu = 0$ et des hypothèses de coque, on a $a = a_0,\ b = b_0$

Tenseur Green-Lagrange :

Par définition du tenseur de Green-Lagrange, on a $E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$

Avec $u = x - X = \frac{l - l_0}{l_0} X$, on a donc $E_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{l - l_0}{l} + \frac{l - l_0}{l} + \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2}\right)$

En remplaçant , on a $E_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{1100^2 - 1000^2}{1000^2}\right) = 0.105$

Gradient de déformation :

Par définition :

$$F = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dX} & \frac{dx}{dY} & \frac{dx}{dZ} \\ \frac{dy}{dX} & \frac{dy}{dY} & \frac{dy}{dZ} \\ \frac{dz}{dX} & \frac{dz}{dY} & \frac{dz}{dZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $J = \det F = \frac{l}{l_0}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce :

Soit S la contrainte de $PK2$, dans notre cas, $S_{11} = E.E_{11} = 200000 \times 0.105 = 21000$

Contrainte de Cauchy

Soit s le tenseur de contraintes de Cauchy, on a la relation $s = \left(\frac{1}{\det F}\right)\left(F.S.F^T\right)$, on en déduit alors que $s_{xx} = \left(\frac{1}{\frac{l}{l_0}}\right)\left(\frac{l}{l_0}.S_{11}.\frac{l}{l_0}\right) = \frac{l}{l_0}.S_{11} = \frac{1100}{1000}.21000 = 23100$

2.2 Résultats de référence

On calcule des déplacements DX et DY au nœud $NO3$, les contraintes de $PK2$ et les contraintes de Cauchy sur la maille $M1$.

2.3 Incertitude sur la solution

Résultat analytique.

2.4 Références bibliographiques

Néant.

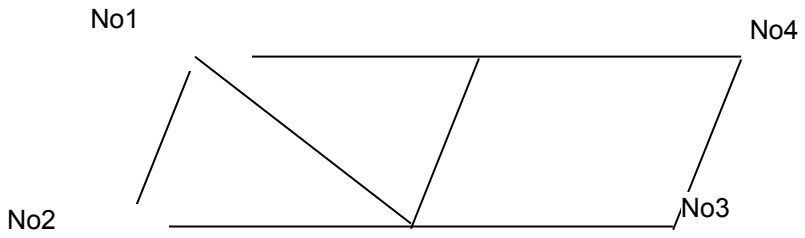
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise des éléments COQUE_3D

3.2 Caractéristiques du maillage



Les coordonnées des principaux nœuds :

Nœud	$Coor_x$	$Coor_y$	$Coor_z$
N01	–500	866.025	0.
N02	0	0	0.
N03	866.025	500	0.
N04	366.025	1366.025	0.

Les mailles utilisées sont :
1 maille QUAD9
2 mailles TRIA7

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	*Aster*	Différence
DX (*No4*)	8.66025 E+01	8.66025 E+01	4.66 E-05%
DY (*No4*)	50.0	50.0	0%
PK2 - $SIXX$ (*M1*)	21000.	21000.	2.04 E-08%
Cauchy- $SIXX$ (*M1*)	23100.	23100.	2.14 E-08%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Synthèse des résultats

Les résultats trouvés sont en accord avec la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)