# SSNV150 - Traction triaxiale avec la loi de comportement BETON_DOUBLE_DP

**Résumé**

Ce cas de validation est destiné à vérifier le modèle de comportement 3D BETON_DOUBLE_DP formulé dans le cadre de la thermo-plasticité, pour la description du comportement non linéaire du béton, en traction, et en compression, avec la prise en compte des variations irréversibles des caractéristiques thermiques et mécaniques du béton, particulièrement sensibles à haute température.

La description de la fissuration est traitée dans le cadre de la plasticité, à l'aide d'une équivalence énergétique, en identifiant la densité d'énergie de fissuration en mode $I$, avec le travail plastique d'un milieu homogène équivalent, où la déformation plastique est uniformément répartie, dans une zone "élémentaire". Cette approche préserve la continuité de la formulation du modèle, sur l'ensemble de son comportement, et contribue à éviter les difficultés numériques possibles lors du changement d'état du matériau.
La sensibilité pathologique de la solution numérique à la discrétisation spatiale (maillage), engendrée par l'introduction d'un comportement adoucissant du béton en traction et en compression, est partiellement résolue en introduisant une énergie de fissuration ou de rupture, dépendant d'une longueur caractéristique $l_c$, liée à la taille des éléments. La résolution des équations constitutives du modèle est effectuée par un schéma implicite.

Il s'agit d'un cube à 8 nœuds soumis à une traction triaxiale, en déplacement imposé. Ce chargement conduit au cas particulier d'un état de contrainte hydrostatique, résolu par projection au sommet du cône de traction, lorsque l'on se place dans un diagramme contrainte équivalente/contrainte hydrostatique. Il s'agit d'un cas test avec solution analytique.



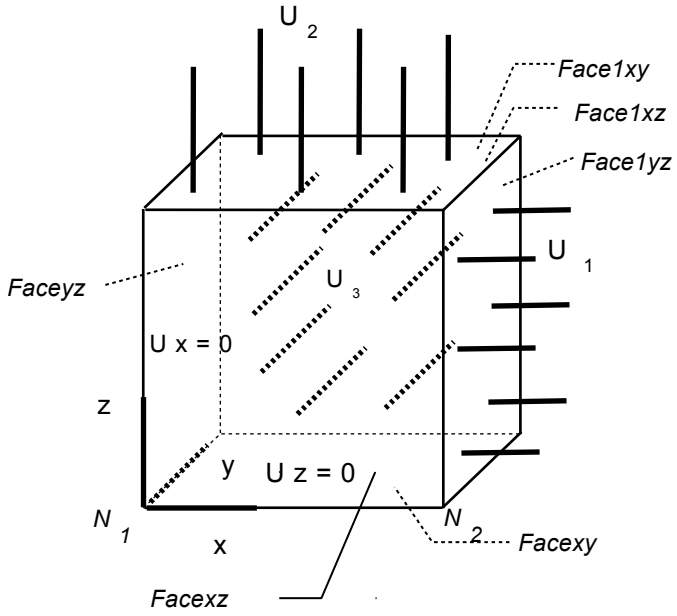
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Problème de référence

## 1.1 Géométrie

Il s'agit d'un cube à 8 nœuds, dont trois faces ont un déplacement normal nul et les trois faces opposées un déplacement normal imposé et identique.
Le cube fait $1\,mm$ de côté. Dans la modélisation A, le cube est orienté suivant le repère $Oxyz$ .

**Modélisation A**




$U_2 = U_1 = U_3$

## 1.2 Propriétés de matériaux

Pour tester l'évolution irréversible des caractéristiques mécaniques avec la température, on applique un champ de température décroissant. Certaines variables dépendent de la température, d'autres du séchage. Enfin, on applique un coefficient de retrait de dessiccation non nul, égal au coefficient de dilatation thermique, pour tester le fonctionnement "informatique". Les déformations thermiques seront ainsi égales et opposées aux déformations de retrait de dessiccation. Ces dépendances n'interviennent que pour des vérifications purement informatiques, les caractéristiques mécaniques peuvent être considérées comme constantes.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Pour les caractéristiques mécaniques linéaires usuelles :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Module de Young : | $E=32\,000\,MPa$ | de | $0\,°C$ à $20\,°C$ |
| | $E=15\,000\,MPa$ | à | $400\,°C$ (décroissance linéaire) |
| | $E=5\,000\,MPa$ | à | $800\,°C$ (décroissance linéaire) |
| Coefficient de Poisson : | $\nu=0.18$ | | |
| Coefficient de dilatation thermique : | $a=10^{-5}/°C$ | | |
| Coefficient de retrait de dessiccation : | $k=10^{-5}$ | | |

**Pour les caractéristiques mécaniques non linéaires du modèle BETON_DOUBLE_DP :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Résistance en compression uniaxiale : | $f'c=40\,N/mm^2$ | de | $0\,°C$ à $400\,°C$ |
| | $f'c=15\,N/mm^2$ | à | $800\,°C$ (décroissance linéaire) |
| Résistance en traction uniaxiale : | $f't=4\,N/mm^2$ | de | $0\,°C$ à $400\,°C$ |
| | $f't=1.5\,N/mm^2$ | à | $800\,°C$ (décroissance linéaire) |
| Rapport des résistances en compression biaxiale/compression uniaxiale : | $b=1.16$ | | |
| Énergie de rupture en compression : | $G_c=10\,Nmm/mm^2$ | | |
| Énergie de rupture en traction : | $G_t=0.1\,Nmm/mm$ | | |
| Rapport de la limite d'élasticité à la résistance en compression uniaxiale : | 30% | | |

## 1.3 Conditions aux limites et chargements mécaniques

| | |
|---|---|
| Champ de température décroissant de | $20\,°C$ à $0\,°C$. |
| Face inférieure du cube ( $facexy$ ) : | bloquée suivant $oz$. |
| Face supérieure du cube ( $face1xy$ ) : | déplacement $U_z=0{,}15\,mm$ |
| Face gauche du cube ( $faceyz$ ) : | bloquée suivant $ox$. |
| Face droite du cube ( $face1yz$ ) : | déplacement $U_x=0{,}15\,mm$ |
| Face avant du cube ( $facexz$ ) : | bloquée suivant $oy$. |
| Face arrière du cube ( $face1xz$ ) : | déplacement $U_y=0{,}15\,mm$ |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Solution de référence

## 2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est calculée de façon analytique, sachant qu'en traction, seul le critère de traction est activé, et que dans le cas d'un chargement hydrostatique, on se projette au sommet du cône de traction. Il faut donc résoudre un système linéaire d'une équation à une inconnue, qui permet d'obtenir la déformation plastique cumulée en traction. Celle-ci permet de calculer ensuite déformations et contraintes.

## 2.2 Calcul de la solution de référence de référence

Pour plus de détail sur les notations et la mise en équation, on se reportera au document de référence [R7.01.03]. Seules, les principales équations sont rappelées ici.
On note " $a$ ", le déplacement imposé suivant les directions $x$ , $y$ et $z$ . Le tenseur de déformation est de la forme $(a,a,a,0.,0.,0.)$ en prenant les notations usuelles de *Code_Aster* (trois composantes principales, trois composantes de cisaillement).
Le tenseur de contrainte est de la forme $(\sigma,\sigma,\sigma,0.,0.,0.)$ , dans la modélisation A.

**Équations générales du modèle :**

Les équations constitutives du modèle sont écrites en distinguant la partie isotrope de la partie déviatorique des tenseurs de contraintes et de déformations.

$$\sigma_H = \frac{1}{3} tr(\sigma) \quad s = \sigma - \frac{1}{3} tr(\sigma) I \quad \varepsilon_H = \frac{1}{3} tr(\varepsilon) \quad \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{3} tr(\varepsilon) I$$
$$\sigma = s + \sigma_H I \quad \text{et} \quad \varepsilon = \widetilde{\varepsilon} + \varepsilon_H I$$

La contrainte équivalente s'écrit alors : $\sigma^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} tr(s^2)}$

Dans le cas d'une formulation incrémentale, et d'une loi de comportement variable, en notant avec un exposant *"e"* les composantes élastiques de la contrainte et de la déformation, on obtient :

$$s^e = \frac{\mu^+}{\mu^-} s^- + 2\mu^+ \Delta\widetilde{\varepsilon} \quad \text{et} \quad {\sigma_H}^e = \frac{K^+}{K^-} {\sigma_H}^- + 3K^+ \Delta\varepsilon_H$$

Les critères en compression $\left(f_{comp}\right)$ et en traction $\left(f_{trac}\right)$ s'expriment de la manière suivante :

$$f_{comp} = \frac{\tau_{oct} + a.\sigma_{oct}}{b} - f_c(\lambda_c) = \frac{\sqrt{2}}{3b}\sigma^{eq} + \frac{a}{b}\sigma_H - f_c(\lambda_c)$$
$$f_{trac} = \frac{\tau_{oct} + c.\sigma_{oct}}{d} - f_t(\lambda_t) = \frac{\sqrt{2}}{3d}\sigma^{eq} + \frac{c}{d}\sigma_H - f_t(\lambda_t)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{tr(s^2)}{3}}$

$\sigma_{oct} = \sqrt{\frac{tr(\sigma)}{3}}$

$\lambda_c$ : multiplicateur plastique en compression

$\lambda_T$ : multiplicateur plastique en traction

et $a,b,c,d$ les coefficients du modèle

Les déformations plastiques en traction et en compression s'expriment :

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^p{}_c = \frac{\Delta\lambda_c}{\sqrt{2}b}\frac{s}{\sigma^{eq}} \qquad \Delta\varepsilon^p{}_{H\,c} = \Delta\lambda_c\frac{a}{3b}$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^p{}_t = \frac{\Delta\lambda_t}{\sqrt{2}d}\frac{s}{\sigma^{eq}} \qquad \Delta\varepsilon^p{}_{H\,t} = \Delta\lambda_t\frac{c}{3d}$$

On obtient pour la contrainte :

$$s = s^e - 2\mu^+\left(\Delta\tilde{\varepsilon}^p{}_c + \Delta\tilde{\varepsilon}^p{}_t\right) \qquad \sigma_H = \sigma_H{}^e - 3K^+\left(\Delta\varepsilon_H{}^p{}_c + \Delta\varepsilon_H{}^p{}_t\right)$$

$$s = \left(1 - 2\mu^+\left(\frac{\Delta\lambda_c}{\sqrt{2}b} + \frac{\Delta\lambda_t}{\sqrt{2}d}\right)\frac{1}{\sigma^{eeq}}\right)s^e \qquad \sigma_H = \sigma_H{}^e - 3K^+\left(\Delta\lambda_c\frac{a}{3b} + \Delta\lambda_t\frac{c}{3d}\right)$$

pour la contrainte équivalente : $\sigma^{eq} = \sigma^{eeq} - 2\mu^+\left(\frac{\Delta\lambda_c}{\sqrt{2}b} + \frac{\Delta\lambda_t}{\sqrt{2}d}\right)$

Les deux critères conduisent alors à un système de deux équations à deux inconnues $\Delta\lambda_c$ et $\Delta\lambda_t$ à résoudre :

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{3b}\sigma^{eeq} + \frac{a}{b}\sigma_H{}^e - \Delta\lambda_c\left(\frac{2\mu^+}{3b^2} + \frac{K^+a^2}{b^2}\right) - \Delta\lambda_t\left(\frac{2\mu^+}{3bd} + \frac{K^+ac}{bd}\right) - f_c\left(\lambda_c^- + \Delta\lambda_c\right) = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3d}\sigma^{eeq} + \frac{c}{d}\sigma_H{}^e - \Delta\lambda_c\left(\frac{2\mu^+}{3bd} + \frac{K^+ac}{bd}\right) - \Delta\lambda_t\left(\frac{2\mu^+}{3d^2} + \frac{K^+c^2}{d^2}\right) - f_t\left(\lambda_t^- + \Delta\lambda_t\right) = 0\end{cases}$$

De façon analogue, dans le cas du seul critère de traction activé, **configuration du cas test**, on obtient un système d'une équation à une inconnue $\Delta\lambda_t$ à résoudre :

$$\frac{\sqrt{2}}{3d}\sigma^{eeq} + \frac{c}{d}\sigma_H{}^e - \Delta\lambda_t\left(\frac{2\mu^+}{3d^2} + \frac{K^+c^2}{d^2}\right) - f_t\left(\lambda_t^- + \Delta\lambda_t\right) = 0$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Résolution avec projection au sommet du cône de traction :**
On cherche donc à résoudre ce système, en utilisant la forme particulière des tenseurs de contraintes et de déformations, uniformes sur la structure.
En partant de $\varepsilon=(a,a,a,0.,0.,0.)$ et de $\sigma=(\sigma,\sigma,\sigma,0.,0.,0.)$. on obtient :

Le tenseur de contrainte élastique $\begin{cases}\sigma_x=a(3\lambda+2\mu)\\ \sigma_y=a(3\lambda+2\mu)\\ \sigma_z=a(3\lambda+2\mu)\end{cases}$

Le déviateur de contrainte élastique $\begin{cases}s_x=0\\ s_y=0\\ s_z=0\end{cases}$

La contrainte hydrostatique élastique $\sigma^e{}_H=(3\lambda+2\mu)(a)=3aK$

La contrainte équivalente élastique $\sigma^e{}_{eq}=0$

Dans le cas d'une courbe d'écrouissage post-pic linéaire en traction, l'expression du paramètre d'écrouissage est la suivante :

$$f_t\left(\theta,\left\|\varepsilon_t^p\right\|\right)=\tau(\theta,\kappa)=f_t(\theta)\left(1-\frac{\left\|\varepsilon_t^p\right\|}{\kappa_u(\theta)}\right) \text{ avec } \kappa_u(\theta)=\frac{2.G_f(\theta)}{l_c.f_t(\theta)}$$

où $\theta$ désigne le maximum de température au cours de l'historique de chargement, $f_t(\theta)$ la résistance en traction.

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^p{}_t=0 \qquad \Delta\varepsilon^p{}_{H_t}=\Delta\lambda_t\frac{c}{3d} \qquad \sigma_H=\sigma_H{}^e-3K^+\left(\Delta\lambda_t\frac{c}{3d}\right)$$

L'équation caractérisant la projection au sommet du cône de traction est la suivante :

$$\left(\frac{c}{d}\sigma_H{}^e-\Delta\lambda_t\frac{K^+c^2}{d^2}-f_t\left(1-\Delta\lambda_t\frac{l_c.f_t}{2.G_t}\right)\right)=0 \qquad \text{éq 2.2-1}$$

$G_t$ étant l'énergie de rupture en traction (caractéristique du matériau).

Ce qui permet d'obtenir le multiplicateur plastique :

$$\Delta\lambda_t=\frac{\frac{c}{d}\sigma_H{}^e-f_t}{\frac{K^+c^2}{d^2}-\frac{l_c.(f_t)^2}{2.G_t}}=\frac{\frac{c}{d}(3aK)-f_t}{\frac{K^+c^2}{d^2}-\frac{l_c.(f_t)^2}{2.G_t}}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Puis la contrainte : $\sigma_H = {\sigma_H}^e - 3K^+\left(\Delta\lambda_t \frac{c}{3d}\right) = K\left(3.a - \Delta\lambda_t \frac{c}{d}\right)$

Connaissant a, le déplacement imposé, on obtient toutes les inconnues du problème.

## 2.3 Incertitude sur la solution

La solution étant analytique, l'incertitude est négligeable, de l'ordre de la précision de la machine.

## 2.4 Références bibliographiques

Le modèle a été défini à partir des thèses suivantes et est décrit dans le rapport de spécification :

- G. Heinfling, lors de sa thèse "Contribution à la modélisation numérique du comportement du béton et des structures en béton armé sous sollicitations thermo-mécaniques à haute température",
- J. F. Georgin, lors de sa thèse "Contribution à la modélisation du béton sous sollicitation de dynamique rapide. La prise en compte de l'effet de vitesse par la viscoplasticité".
- SCSA/128IQ1/RAP/00.034 Version 1.2, Développement d'un modèle de comportement 3D béton avec double critère de plasticité dans le *Code_Aster* - Spécifications ".



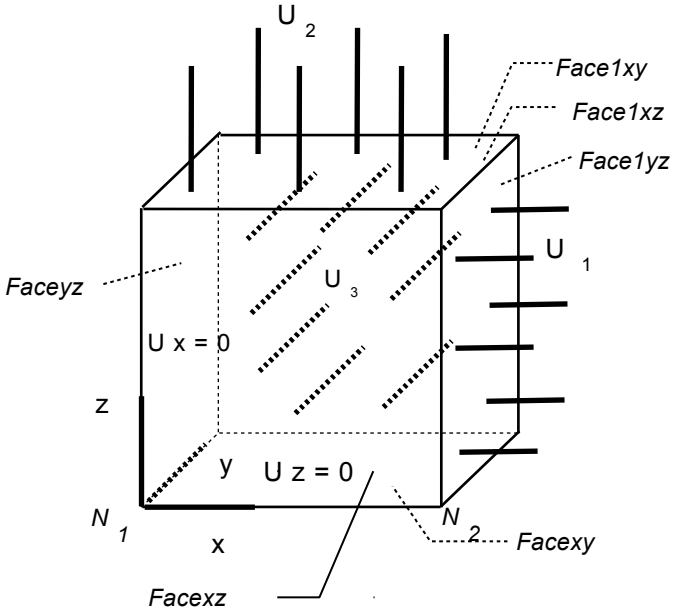
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Modélisation A

## 3.1 Caractéristiques de la modélisation

**3D (HEXA8)**

1 élément, champ de contrainte et déformation uniforme.




## 3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 8
Nombre de mailles et type : 1 HEXA8

## 3.3 Valeurs testées

Ont été testées les composantes $xx$ et $zz$ du champ de contraintes SIGM_ELNO, et la déformation plastique cumulée en traction (deuxième variable interne, deuxième composante du champ VARI_ELNO). Le déplacement étant imposé, le champ EPSI_ELNO n'est pas testé.

Les trois instants correspondent à un déplacement de $0.005$ , $0.01$ et $0.015\,mm$ .

**Champ SIGM_ELNO composante SIXX**

| Identification | Référence |
|---|---|
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.005$ | 1.9182065 |
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.010$ | 1.161 6770 |
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.015$ | 0.4051470 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Champ SIGM_ELNO composante SIZZ**

| Identification | Référence |
|---|---|
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.005$ | 1.9182065 |
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.010$ | 1.1616770 |
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.015$ | 0.4051470 |

**Champ VARI_ELNO composante V2 (déformation plastique cumulée en traction)**

| Identification | Référence |
|---|---|
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.005$ | 0.0099232717 |
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.010$ | 0.0199535329 |
| Pour un déplacement imposé en charge $U_1=U_2=U_3=0.015$ | 0.0299837941 |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Synthèse des résultats

Ce cas test offre des résultats très satisfaisants par rapport à la solution analytique, inférieurs à $7.10^{-5}$ % avec un nombre d'itérations faible (1 ou 2 itérations). La solution est obtenue à partir d'une équation linéaire dans le cas d'une courbe d'écrouissage linéaire en traction, mais la résolution utilise un algorithme de Newton dans un cadre plus général.

On peut noter l'écrouissage du critère de traction qui a lieu au cours du chargement, entraînant une diminution de la contrainte (composante $xx$, $yy$ et $zz$) par ailleurs égale à la contrainte hydrostatique.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)