SSNP179 – Membrane de Cook en grandes déformations plastiques

Résumé :

L'objectif de ce test est d'apporter une vérification supplémentaire des modélisations de type `incompressible` sur le problème de la membrane de Cook qui un problème très souvent utilisé pour tester les méthodes numériques dans la littérature.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

Le problème est issu d'un article de J.C. Simo *et F*. Armero [1].

1.1 Géométrie

La géométrie peut être visualisée sur la figure 1.1-1 et sera utilisé pour toutes les modélisations.

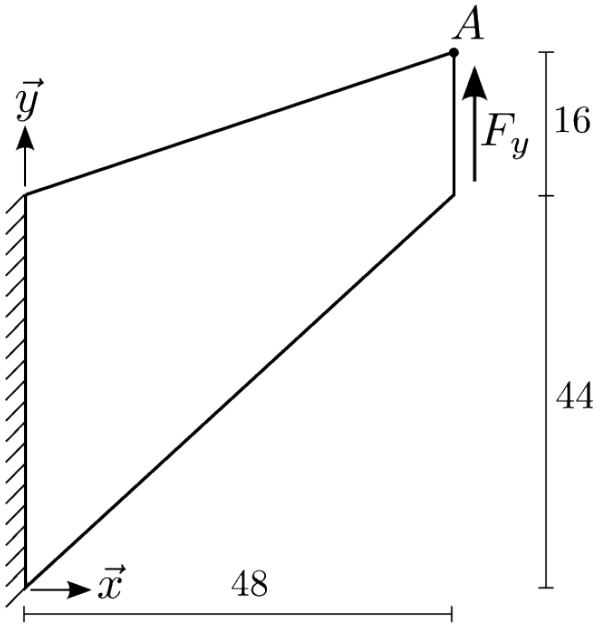


Figure 1.1-1: Géométrie de la membrane

Coordonnée du nœud A (48,60) et du nœud C (24,30).

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est élastique :

- Module d'élasticité : $E=206,9\,GPa$
- Coefficient de Poisson : $\nu=0,29$

Le modèle de plasticité est une modèle de Von Mises avec écrouissage non-linéaire isotrope linéaire. La courbe d'écrouissage est de la forme :

$$R(p)=\sigma_{y,0}+H\,p+(\sigma_{y,\infty}-\sigma_{y,0})*(1-e^{-\delta p}) \quad (1)$$

- Limite élastique : $\sigma_{y,0}=450\,MPa$
- Limite écrouissage : $\sigma_{y,\infty}=715\,MPa$
- Paramètre de saturation : $\delta=16.93$
- Paramètre d'écrouissage : $H=129.2$

La courbe d'écrouissage a été tabulée finement afin de décrire correctement la courbe avec le mot-clef `TRACTION`. Le modèle de déformation utilisé est `GDEF_LOG`.

1.3 Conditions aux limites et chargements

On encastre le coté gauche de la membrane ($DX=DY=0$), et on applique une force surfacique verticale sur le coté droittelle que $FY=0,3125\,kN/mm^2$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.4 Extension au 3D

L'extension au 3D est obtenue en extrudant dans la direction z (épaisseur $1 mm$). De plus, les déplacements selon DZ sont bloqués pour se ramener à la solution en déformations planes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Grandeurs et résultats de référence

La solution numérique de l'article [1] donne :

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	Valeur
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$

2.2 Incertitudes sur la solution

La solution provient d'un autre code de calcul sur un maillage très fin.

2.3 Référence bibliographique

[1] *Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*, J.C. Simo, F. Armero, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 33(7) (1992) 1413-1449

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN_INCO_UPG.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type QUAD8 (quadrangle quadratique), avec un total de 256 éléments.

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DY	$7.00031\,mm$	2 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

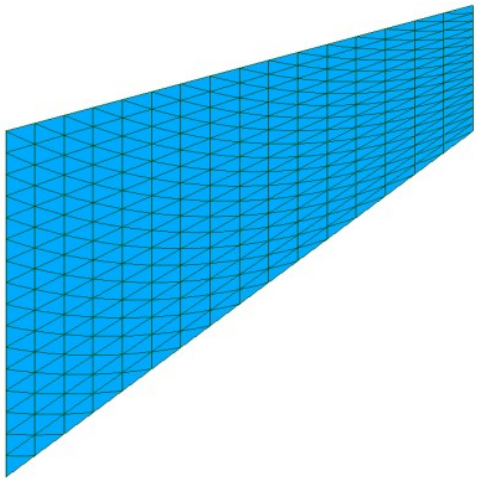
4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN_INCO_UPG .

4.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type TRIA6 (triangle quadratique), avec un total de 512 éléments.



4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DX	$-6.23907\,mm$	1 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DY	$7.00031\,mm$	1 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN_HHO_121

5.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type QUAD8 (quadrangle quadratique), avec un total de 256 éléments.

5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DY	$7.00031\,mm$	3 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN_HHO_121

6.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type TRIA6 (triangle quadratique), avec un total de 512 éléments.

6.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	3 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

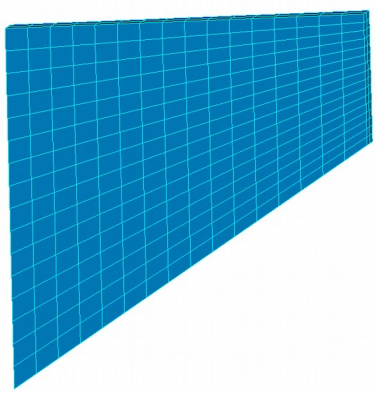
7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_INCO_UPG

7.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 512 mailles de type HEXA20.



7.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DX	$-6.23907\,mm$	1 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DY	$7.00031\,mm$	1 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

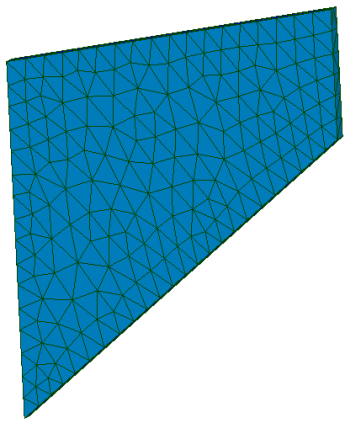
8 Modélisation F

8.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_INCO_UPG

8.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 1058 mailles de type TETRA10.



8.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1\,s$	DY	$7.00031\,mm$	2 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation G

9.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_HHO_121

9.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 512 mailles de type HEXA27.

9.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	3 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	3 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Modélisation H

10.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_HHO_222

10.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 512 mailles de type HEXA27.

10.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	1 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	1 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Modélisation I

11.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_HHO_121

11.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 1058 mailles de type TETRA8.

11.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Précision
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	0,2 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	1 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Modélisation J

12.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_HHO_222

12.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 1058 mailles de type TETRA8.

12.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Précision
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	0.2 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	0.2 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Modélisation K

13.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN_HHO_222

13.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type QUAD8 (quadrangle quadratique), avec un total de 256 éléments.

13.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	3 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14 Modélisation L

14.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN_HHO_222

14.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type TRIA6 (triangle quadratique), avec un total de 512 éléments.

14.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Precision
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	3 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15 Modélisation M

15.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_HHO_111

15.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type PENTA6 (prismes linéaires convertis en prismes quadratiques par CREA_MAILLAGE), avec un total de 512 éléments. La formulation est linéaire.

15.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Précision
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	1 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	1 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

16 Modélisation N

16.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_HHO_111

16.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de 256 PENTA6 et 128 HEXA8 (éléments convertis par la suite par CREA_MAILLAGE), avec un total de 384 éléments. La formulation est linéaire.

16.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Précision
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	1 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

17 Modélisation O

17.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation 3D_HHO_222

17.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de mailles de type PYRAM5 (éléments convertis par la suite par CREA_MAILLAGE), avec un total de 1056 éléments. La formulation est quadratique.

17.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les résultats de la modélisation par rapport à la solution numérique de référence présentée en 2, et également en non-régression .

Lieu	Instant	Composante (DEPL)	VALE_REFE	Précision
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DX	$-6.23907\,mm$	2 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	$t=1s$	DY	$7.00031\,mm$	2 %

Identification	Composante	Type de référence	Tolérance
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud A en $(48,60,0.5)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DX	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	DEPL/DY	NON_REGRESSION	0.001 %
Nœud C en $(24,30,0)$	SIEQ_ELNO/TRSIG	NON_REGRESSION	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

18 Synthèse des résultats

Les résultats concernant le déplacement du point A sont proches de la solution numérique de référence pour les modélisations utilisées .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)