SSNL201 - Comportement non-linéaire d'une fondation superficielle

Résumé :
On considère dans ce test un élément discret à 1 nœud soumis avec une relation de comportement de comportement de type FONDATION, le matériau est FONDA_SUPERFI, soumis à des chargements en traction en moment et effort horizontal.

L'analyse est statique avec une relation de comportement non linéaire incrémentale exprimée par une variable interne adimensionnelle combinant les efforts et déplacements généralisés bidimensionnels.

La relation de comportement comprend 2 mécanismes de plasticité à écoulement associé, un mécanisme de glissement et un mécanisme de perte de capacité (noté par la suite CP) ainsi qu'un mécanisme de non-linéarité géométrique de décollement.

L'intérêt du test est de simuler des trajets de chargement simples en charge et décharge et les vérifications sur la base de solutions analytiques ou par comparaison avec les résultats de programmes développés au cours de la thèse de Youssef Abboud dont provient la formulation de ce comportement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Un élément discret de taille nulle à 1 nœud.
Repère local = repère global.
Une matrice de rigidité K_TR_D_N affectée par défaut (associée à un élément DIS_TR) :

- $K_{xx}=7.5\ 10^4 kN/m$ pour la translation selon x ;
- $K_{yy}=5.0\ 10^4 kN/m$ pour la translation selon y qui n'est pas utile ici (chargement uniquement en translation selon x ou en rotation autour de x) ;
- $K_{zz}=8.0\ 10^4 kN/m$ pour la translation verticale selon z ;
- $K_{rx,rx}=1.0\ 10^4 kN.m/rad$ pour la rotation autour de x ;
- $K_{ry,ry}=1.5\ 10^4 kN.m/rad$ pour la rotation autour de y (pas utile dans les calculs) ;
- $K_{rz,rz}=5.0\ 10^4 kN.m/rad$ pour la rotation autour de z(pas utile dans les calculs) ;

1.2 Propriétés de matériaux

Lié à un comportement incrémental FONDA_SUPERFI comprenant les paramètres communs à tous les tests :

- LONG_X : longueur de la fondation selon x pris égal à $L_x=1.0\ m$;
- LONG_Y : longueur de la fondation selon y pris égal à $L_y=1.0\ m$;

Ce comportement incrémental est aussi lié à 3 mécanismes de non-linéarité avec des paramètres associés :

- Un mécanisme de perte de capacité portante (ou noté CP) avec les paramètres suivants :
  - CP_SERVICE : Capacité portante de fluage de la fondation, obligatoire à renseigner et prise par défaut dans les cas tests à $V_{lim}=800\ kN$;
  - CP_ULTIME : Capacité portante ultime de la fondation (V_{ult}) qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque écrouissage isotrope est activé, sinon par défaut $V_{ult}=V_{lim}$;
  - DEPL_REFE : Tassement de référence ($v_{pl,r}^{CP}$) servant à définir l'évolution de l'écrouissage isotrope qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque écrouissage isotrope est activé, sinon par défaut $v_{pl,r}^{CP}=0\ m$;
  - RAID_CP_X : Coefficient d'écrouissage cinématique en translation selon x ($I_{h,x}$), assimilable à la raideur lorsque l'écrouissage commence et qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque écrouissage en translation selon x est activé, sinon par défaut ;
  - GAMMA_CP_X : Paramètre homogène à l'inverse d'une distance tenant compte des effets de mémoire dans l'écrouissage cinématique en translation x ($\gamma_{h,x}$), et qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque écrouissage en translation selon x est activé, sinon par défaut $\gamma_{h,x}=0\ m^{-1}$;
  - RAID_CP_RX : Coefficient d'écrouissage cinématique en rotation selon x ($I_{r,x}$), assimilable à la raideur lorsque l'écrouissage commence et qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque écrouissage en rotation selon x est activé, sinon par défaut ;
  - GAMMA_CP_RX : Paramètre homogène à l'inverse d'une distance tenant compte des effets de mémoire dans l'écrouissage cinématique en translation x ($\gamma_{r,x}$), et qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque écrouissage en rotation selon x est activé, sinon par défaut $\gamma_{r,x}=0\ m^{-1}$;
  - Les autres paramètres concernant les écrouissages cinématiques en translation et rotation selon y ne sont pas explorés (car parfaitement symétriques) et donc ne sont pas présentés ici ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Un mécanisme de glissement (ou noté G) avec les paramètres suivants :
  - PHI : Angle de frottement à l'interface entre le sol et l'élément de fondation (ϕ_{inter}) ;
  - COHESION : La cohésion à l'interface entre le sol et l'élément de fondation (c_{inter}) ;
  - RAID_GLISS : Coefficient d'écrouissage cinématique en translation selon x et y (H_h), assimilable à la raideur lorsque l'écrouissage commence et qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque écrouissage est activé, sinon par défaut ;
  - GAMMA_REFE : Paramètre homogène à l'inverse d'une distance tenant compte des effets de mémoire dans l'écrouissage cinématique en translation (γ_s), et qui n'est renseignée qu'uniquement lorsque l'écrouissage est activé, sinon par défaut $\gamma_s = 0\ m^{-1}$;
- Un mécanisme de décollement qui est activé si le paramètre DECOLLEMENT est OUI, par défaut c'est NON.

Les valeurs spécifiques des paramètres sont donnés cas-test par cas-test.

1.3 Conditions aux limites et chargements

L'élément étant un discret à un nœud, il comprend implicitement ces conditions limites, via la matrice de rigidité introduite.
Le chargement imposé est soit un chargement en force ou un chargement en déplacement suivant le cycle suivant :

- Chargement vertical imposé ;
- Chargement en translation ou rotation selon x (excepté les cas ou seul un chargement vertical est testé) ;
- Déchargement en translation ou rotation selon x (excepté les cas ou seul un chargement vertical est testé) ;
- Déchargement vertical imposé ;

1.4 Conditions initiales

Déplacements, efforts et variables internes nuls.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Modélisation

2.1 Caractéristiques de la modélisation

Un élément DIS_TR_N à 1 nœud de taille nulle (idem 1.1).
Un nœud N1 : chargement complet en force ou déplacement détaillé cas test par cas test. Ce chargement est effectué avec une option de subdivision.

2.2 Caractéristiques du maillage

1 POI1.
1 NŒUD.

2.3 Grandeurs testées et résultats

La grandeur testée est détaillée cas-test par cas-test

2.4 Solution de référence

La solution de référence est soit analytique pure ou calculée de manière incrémentale, elle est détaillée pour chaque cas.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Synthèse des modélisations

Modélisation	Identification	Détail
a	CPseul_Plas_U	Critère de capacité portante testé sans écrouissage avec chargement en déplacement.
b	CPseul_Qciné_U	Critère de capacité portante testé avec écrouissage cinématique avec chargement en déplacement.
c	CPseul_Qiso_U	Critère de capacité portante testé avec écrouissage isotrope avec chargement en déplacement.
d	Gseul_Plas_U	Critère de glissement testé sans écrouissage avec chargement en déplacement.
e	Gseul_Qciné_U	Critère de glissement testé avec écrouissage cinématique avec chargement en déplacement.
f	CPpuisG_Plas_U	Critère de capacité portante puis glissement testé sans écrouissage avec chargement en déplacement.
g	CPpuisG_QCPiso_U	Critère de capacité portante puis glissement testé avec écrouissage isotrope en capacité portante avec chargement en déplacement.
h	CPpuisG_QG_U	Critère de capacité portante puis glissement testé avec écrouissage cinématique en glissement avec chargement en déplacement.
i	CPpuisG_QGQCPiso _U	Critère de capacité portante puis glissement testé avec écrouissage cinématique en glissement et écrouissage isotrope en capacité portante avec chargement en déplacement.
j	GpuisCP_Plas_U	Critère de glissement puis de capacité portante testé sans écrouissage avec chargement en déplacement.
k	GpuisCP_QCPiso_U	Critère de glissement puis de capacité portante testé avec écrouissage isotrope en capacité portante avec chargement en déplacement.
m	GpuisCP_QG_U	Critère de glissement puis de capacité portante testé avec écrouissage cinématique en glissement avec chargement en déplacement.
n	GpuisCP_QGQCPiso_U	Critère de glissement puis de capacité portante testé avec écrouissage cinématique en glissement et écrouissage isotrope en capacité portante avec chargement en déplacement.
o	FseulCP	Chargement vertical en force uniquement avec critère de capacité portante et écrouissage isotrope.
p	FHiso	Chargement vertical puis horizontal en force avec critère de capacité portante et écrouissage isotrope.
q	FHcine	Chargement vertical puis horizontal en force avec critère de capacité portante et écrouissage cinématique.
r	FMiso	Chargement vertical puis rotation en force avec critère de capacité portante et écrouissage isotrope.
s	FMcine	Chargement vertical puis rotation en force avec critère de capacité portante et écrouissage cinématique.
t	FHslid	Chargement vertical puis horizontal en force avec critère de glissement et écrouissage cinématique.
u et v	FHslidCP	Chargement vertical puis horizontal en force avec critère de capacité portante et écrouissage isotrope et critère de glissement et écrouissage cinématique.
w	FMslid	Chargement vertical puis rotation en force avec critère de glissement et écrouissage cinématique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation a : Cpseul_Plas_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de perte de capacité portante selon 4 séries de chargement différents :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical uniquement (P001)
- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (P101, P102 et P103)
- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis rotation
  - Sans mécanisme de décollement (P401, P402 et P403)
  - Avec mécanisme de décollement (P701, P702 et P703)

4.1.1 Chargement en déplacement vertical uniquement

4.1.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 un chargement U_z avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	50.	100.
$U_z(m)$	0.	-0.3	0.

On nomme ce cas P001.

4.1.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=1000\,kPa$;

4.1.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0, \qquad U_z(t)=-6\ mm*t=U_z^{élas}(t)$$
$$F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-6\ mm*t*K_{zz}$$

Jusqu'à $t=t_{charge}$ où : $f_{cp}(t_{charge})=-F_z(t_{charge})-V_{lim}=0$
D'où :

$$t_{charge}=\frac{V_{lim}}{6\ mm*K_{zz}}$$

Entre $t=t_{charge}$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{élas}\ d'où\ F_z(t)=-V_{élas}\ ,$$

En écrivant le déplacement qui est une donnée d'entrée, on a :

$$-6mm*t=U_z(t)=U_{z,CP}^{pl}(t)+U_z^{élas}(t)=U_{z,CP}^{pl}(t)-\frac{V_{élas}}{K_{zz}}$$
$$U_{z,CP}^{pl}(t)=-6\,mm*t+\frac{V_{élas}}{K_{zz}}\ et\ U_{z,CP}^{pl}(50)=-30\ cm+\frac{V_{élas}}{K_{zz}}$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_{décharge}$, on est en élasticité :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=U_{z,CP}^{pl}(50)$$
$$U_z^{élas}(t)=U_z(t)-U_{z,CP}^{pl}(t)=-6\,mm*(100-t)-U_{z,CP}^{pl}(50)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$U_z^{élas}(t) = -6\,mm*(100-t) + 30\,cm - \frac{V_{élas}}{K_{zz}} = -6\,mm*(50-t) - \frac{V_{élas}}{K_{zz}}$$

$$F_z(t) = K_{zz}U_z^{élas}(t) = -6\,mm*K_z*(50-t) - V_{élas}$$

Jusqu'à $t = 50 + t_{décharge}$ où : $f_{cp}(50+t_{décharge}) = F_z(50+t_{décharge}) = 0$

D'où :

$$t_{décharge} = \frac{V_{lim}}{6\ mm*K_{zz}}$$

Entre $t = 50 + t_{décharge}$ et $t = 100$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$f_{cp}(t) = 0 = F_z(t)$,

En écrivant le déplacement qui est une donnée d'entrée, on a :

$$-6\,mm*(100-t) = U_z(t) = U_{z,CP}^{pl}(t) + U_z^{élas}(t) = U_{z,CP}^{pl}(t)$$

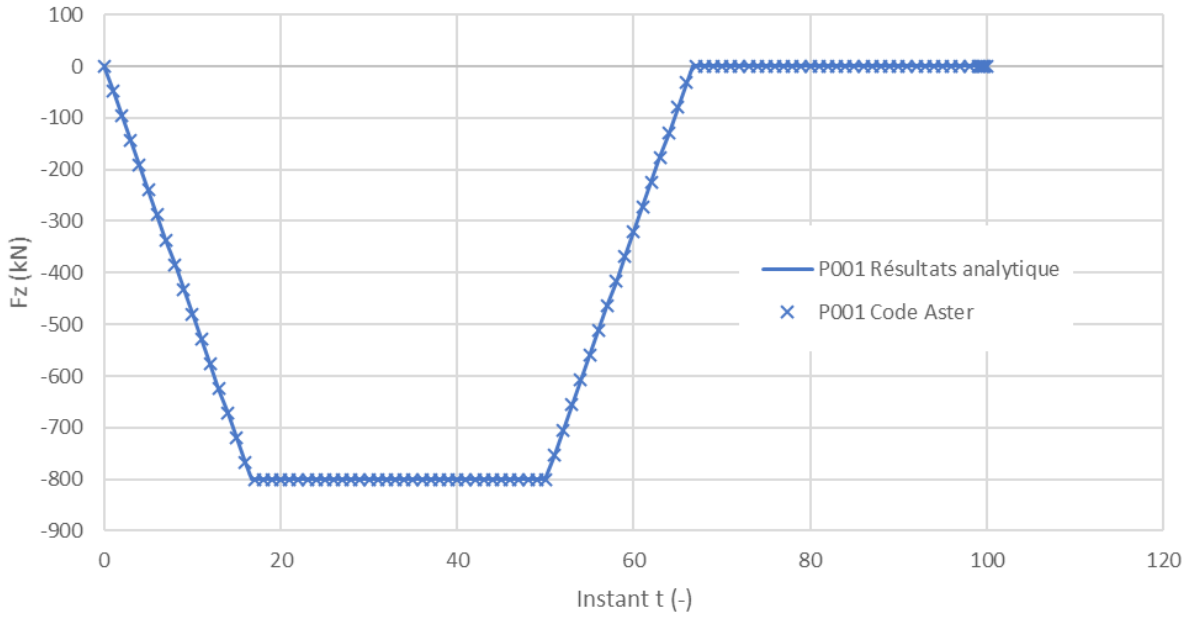
$$U_{z,CP}^{pl}(t=100) = 0$$

4.1.1.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instant	Chargement	Référence	différence
VZ	25	P001	-800 analytique	0.001 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	25	P001	-0.005 analytique	0.001 %
VZ	75	P001	0.0 analytique	0.001 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	P001	0.0 analytique	0.001 %

4.1.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :



Ils correspondent parfaitement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.1.2 Chargement en déplacement vertical puis en déplacement horizontal

4.1.2.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour le chargement P101, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=2\ mm$.
Avec pour le chargement P102, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=5\ mm$.
Avec pour le chargement P103, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=1\ cm$.

4.1.2.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test et tous les cas de charges :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=1000\,kPa$;

4.1.2.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_{charge}$ où : $f_{cp}(25+t_{charge})=-F_z(25+t_{charge})-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_{charge})}{F_z(25+t_{charge})}\right)^3=0$

D'où :

$$t_{charge}=\frac{25U_{z,max}K_{zz}}{U_{x,max}K_{xx}}\left(1-\left(\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Entre $t=25+t_{charge}$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$
$$\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\ et\left(\frac{-F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$d\,U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\,\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\ d\,\lambda_{CP}(t)$$

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\,\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\ d\,\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $U_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$U_{x,CP}^{pl}(t)=\begin{cases}U_{x,CP}^{pl}(25+t_{charge})\\ -\frac{9}{8}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)^{\frac{2}{3}}-\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(25+t_{charge})\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\ -\frac{27}{16}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(25+t_{charge})\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\ -\frac{81V_{lim}}{64K_{zz}}\ln\left(\frac{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(25+t_{charge})\right)\right)^{\frac{1}{3}}}\right)\end{cases}$$

On peut ainsi tout exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$:

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)\ et\ F_x(t)=-F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

On retrouve la valeur de t, en écrivant la définition du déplacement

$$U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,CP}^{pl}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)=\frac{1}{U_{x,max}}\left(\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U_{x,CP}^{pl}(t)\right)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_{décharge}$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max},\ U_x(t)=\frac{75-t}{25}U_{x,max}$$

$$F_x(t)=F_x(50)+\left(\frac{50-t}{25}\right)U_{x,max}K_{xx},\ F_z(t)=F_z(50)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Jusqu'à $t=50+t_{décharge}$ où : $f_{cp}(50+t_{décharge})=-F_z(50+t_{décharge})-V_{lim}\left(1+\frac{-F_x(50+t_{décharge})}{F_z(50+t_{décharge})}\right)^3=0$

D'où :

$$t_{décharge}=\frac{25}{U_{x,max}K_{xx}}\left(F_x(50)-F_z(50)\left(1-\left(\frac{-F_z(50)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

Entre $t=50+t_{décharge}$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1-\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad et \left(\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(-\frac{V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=-3\left(-\frac{V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=-\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(-\frac{F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient alors $U^{pl}_{x,CP}(t)$ directement fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=-\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)=\begin{cases}U^{pl}_{x,CP}(50+t_{décharge})\\ +\frac{9}{8}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)^{\frac{2}{3}}-\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(50+t_{décharge})\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\ +\frac{27}{16}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(50+t_{décharge})\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\ +\frac{81V_{lim}}{64K_{zz}}\ln\left(\frac{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(50+t_{décharge})\right)\right)^{\frac{1}{3}}}\right)\end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut ainsi exprimer à partir de $U^{pl}_{z,CP}$, $U^{pl}_{x,CP}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t) = -K_{zz}\left(U_{z,max} + U^{pl}_{z,CP}(t)\right) \quad et \quad F_x(t) = F_z(t)\left(1 - \left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

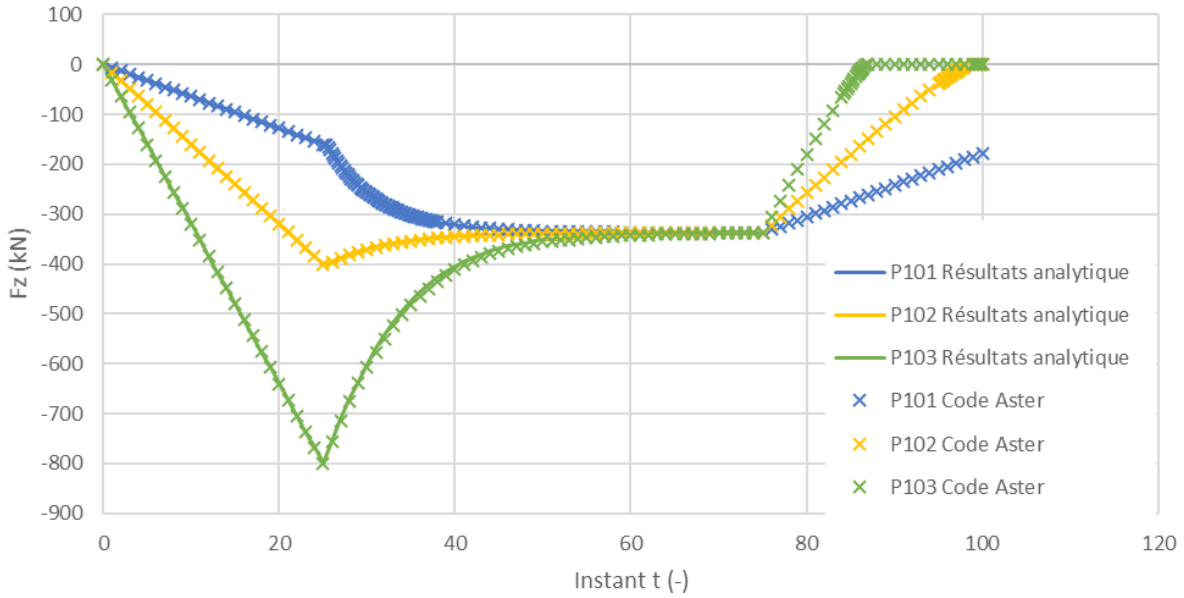
Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

4.1.2.4 Grandeurs testées et résultats

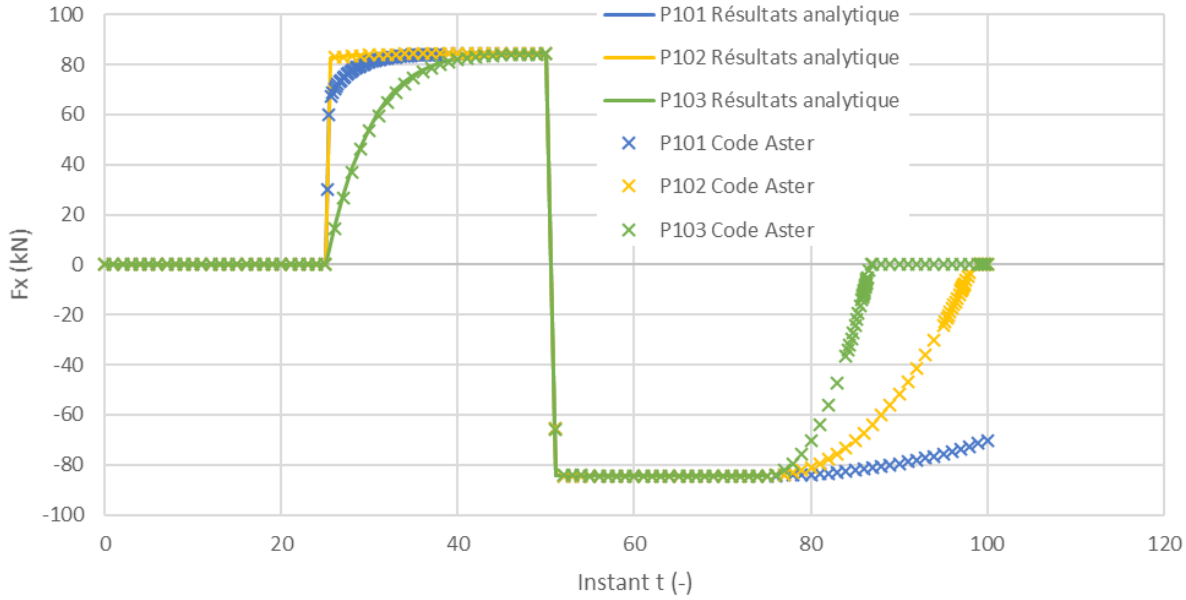
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	P101	-334.3971905	0.2 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	P101	0.002217861	0.1 %
V6 ($U^{pl}_{x,CP}$)	75	P101	0.001125 analytique	0.001 %
VZ	75	P102	-337.5320998	0.1 %
N	50	P102	84.37404046	0.2 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	75	P102	0.000780849	0.1 %
N	50	P103	84.27344077	0.1 %
V6 ($U^{pl}_{x,CP}$)	75	P103	0.001124999 analytique	0.001 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	50	P103	0.005777052	5.0 %

4.1.2.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



Les valeurs correspondent quasi parfaitement, toutefois le critère de capacité portante n'étant pas linéaire, l'étape du retour sur le critère (sur Code aster) lors d'un chargement en déplacement entraîne un léger décalage avec le résultat analytique. De plus la relation entre déplacement plastique horizontal et vertical étant non linéaire, on observe une différence entre les valeurs Aster (raisonnant de manière incrémentale) et les valeurs analytiques.

4.1.3 Chargement en déplacement vertical puis en rotation sans décollement

4.1.3.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements θ_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$\theta_x(m)$	0.	0.	$\theta_{x,max}$	0.	0.

Avec pour le chargement P401, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=2\ mm$.
Avec pour le chargement P402, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=5\ mm$.
Avec pour le chargement P403, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=1\ cm$.

4.1.3.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test et tous les cas de charges :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=1000\,kPa$;

4.1.3.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=0,\quad M_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz}$$
$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\ \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max},\ M_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max}*K_{rx,rx}$$

Jusqu'à $t=25+t_{charge}$ où : $f_{cp}(t_{charge})=-F_z(25+t_{charge})-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(25+t_{charge})}{L_yF_z(25+t_{charge})}\right)=0$

D'où :

$$t_{charge}=\frac{25L_yU_{z,max}K_{zz}}{2\theta_{x,max}K_{rx,rx}}\left(1-\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)$$

Entre $t=25+t_{charge}$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)$$
$$\left(1+\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\ et\left(\frac{-2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$
$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $\theta_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{V_{lim}}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$
$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-V_{lim}}{L_yK_{zz}}\ln\left(\frac{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}-2K_{zz}U_{z,max}}\right)$$

On peut ainsi exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$, $\theta_{x,CP}^{pl}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)$$
$$M_x(t)=\left(\frac{-F_z(t)L_y}{2}\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On retrouve la valeur de t, en écrivant la définition du déplacement

$$\theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)+\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)=\frac{1}{\theta_{x,max}}\left(\frac{M_x(t)}{K_{rx,rx}}+\theta_{x,CP}^{pl}(t)\right)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_{décharge}$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max},\ \theta_x(t)=\frac{75-t}{25}\theta_{x,max},\ F_z(t)=F_z(50)$$

$$M_x(t)=M_x(50)+K_{rx,rx}\theta_{x,max}\left(\frac{50-t}{25}\right)$$

Jusqu'à $t=50+t_{décharge}$ où : $f_{cp}(50+t_{décharge})=-F_z(50+t_{décharge})-V_{lim}\left(1+\frac{-M_x(50+t_{décharge})}{F_z(50+t_{décharge})}\right)=0$

D'où :

$$t_{décharge}=\frac{25}{\theta_{x,max}K_{rx,rx}}\left(M_x(50)-\frac{F_z(50)L_y}{2}\left(1-\left(\frac{-F_z(50)}{V_{lim}}\right)\right)\right)$$

Entre $t=50+t_{décharge}$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)$$

$$\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\ et\left(\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $\theta_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{V_{lim}}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\theta_{x,CP}^{pl}(50+t_{décharge})+\frac{V_{lim}}{L_yK_{zz}}\ln\left(\frac{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(50+t_{décharge})\right)}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut ainsi exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$, $\theta_{x,CP}^{pl}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)$$

$$M_x(t)=\left(\frac{F_z(t)\,L_y}{2}\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\right)$$

On retrouve la valeur de t, en écrivant la définition du déplacement

$$\theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)+\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\left(3-\frac{t}{25}\right)\theta_{x,max}$$

$$\left(3-\frac{t}{25}\right)=\frac{1}{\theta_{x,max}}\left(\frac{M_x(t)}{K_{rx,rx}}+\theta_{x,CP}^{pl}(t)\right)$$

Entre $t=75$ et $t=75+t_3$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max}\left(\frac{100-t}{25}\right),\qquad \theta_x(t)=0,$$

$$F_z(t)=F_z(75)-U_{z,max}K_{zz}\left(\frac{75-t}{25}\right),\qquad M_x(t)=M_x(75)$$

Jusqu'à $t=75+t_3$ où : $f_{cp}(75+t_3)=-F_z(75+t_3)-V_{lim}\left(1+\frac{-2M_x(75+t_3)}{L_yF_z(75+t_3)}\right)=0$

D'où :

$$t_3=\begin{cases}25\left(\frac{-2F_z(75)-V_{lim}}{U_{z,max}K_{zz}}\right) & si\ -2F_z(75)>V_{lim}\\ 0 & sinon\end{cases}$$

Entre $t=75+t_3$ et $t=100$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)$$

$$\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right),\left(\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$

avec $F_z(t)=\frac{-V_{lim}}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{8(-M_x(t))}{L_yV_{lim}}}\right)$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right)\,d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\,d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$d\,U_{z,CP}^{pl}(t)=-\sqrt{1-\frac{8\left(-M_x(t)\right)}{L_y V_{lim}}}\,\frac{L_y}{2}\,d\theta_{x,CP}^{pl}(t)$$

Or avec la rotation est constante :

$$\theta_x(t)=0=\theta_x^{élas}(t)+\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{M_x(t)}{K_{rx,rx}}+\theta_{x,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $U_{z,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $\theta_{x,CP}^{pl}(t)$:

$$d\,U_{z,CP}^{pl}(t)=-\sqrt{1-\frac{8\,K_{rx,rx}\theta_{x,CP}^{pl}(t)}{L_y V_{lim}}}\,\frac{L_y}{2}\,d\theta_{x,CP}^{pl}(t)$$

$$d\,U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{L_y^2 V_{lim}}{24\,K_{rx,rx}}\,d\left(\sqrt{1-K_{rx,rx}\frac{8\,\theta_{x,CP}^{pl}(t)^3}{L_y V_{lim}}}\right)\theta$$

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=U_{z,CP}^{pl}(75+t_3)+\frac{L_y^2 V_{lim}}{24\,K_{rx,rx}}\left(\left(1-8\,\frac{K_{rx,rx}\theta_{x,CP}^{pl}(t)}{L_y V_{lim}}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-K_{rx,rx}\frac{8\theta_{x,CP}^{pl}(75+t_3)}{L_y V_{lim}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

On peut ainsi exprimer à partir de $\theta_{x,CP}^{pl}$, $U_{z,CP}^{pl}$ ainsi que les forces :

$$M_x(t)=-\theta_{x,CP}^{pl}(t)K_{rx,rx}\ \ et\ \ F_z(t)=\frac{-V_{lim}}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{8\,M_x(t)}{L_y V_{lim}}}\right)$$

On retrouve la valeur de t, en écrivant la définition du déplacement :

$$U_z(t)=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=-U_{z,max}\left(\frac{100-t}{25}\right)$$

Ces expressions sont valables tant que $F_z(t)<0$, dans un tel cas, on obtient juste $F_z(t)=0$ et $M_x(t)=0$.

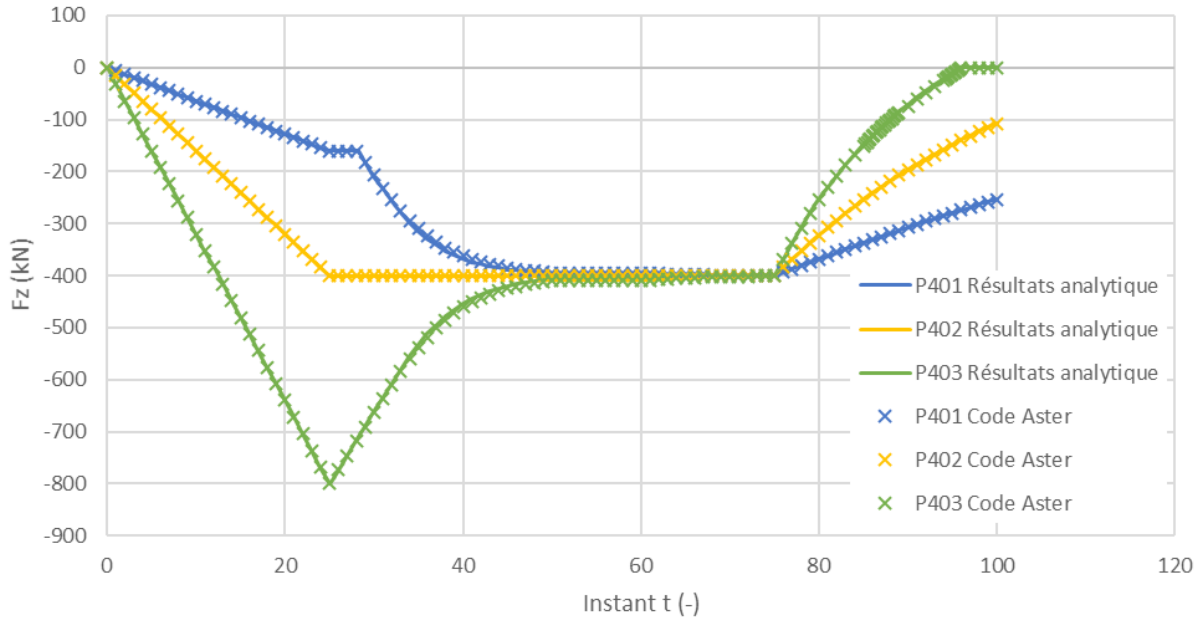
4.1.3.4 Grandeurs testées et résultats

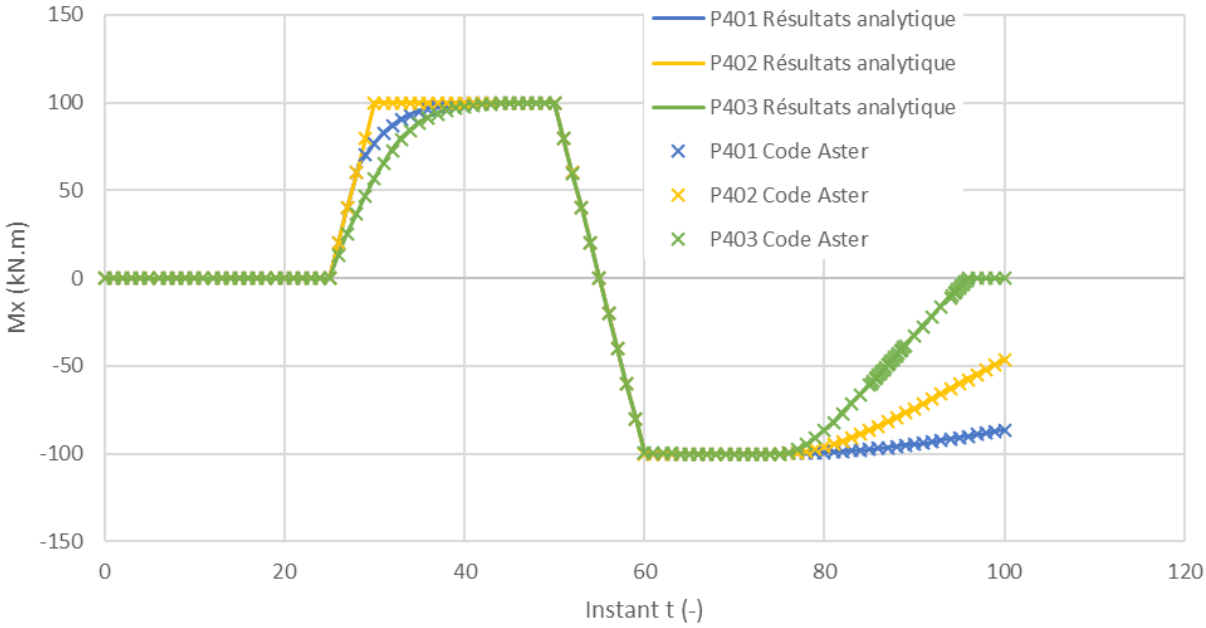
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	P401	-395.6047774	0.5 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	P401	0.002997265	0.1 %
V9 ($\theta_{x,CP}^{pl}$)	100	P401	0.008649679	0.1 %
VZ	100	P402	-105.9442971	2.0 %
MT	50	P402	100.0 analytique	0.001 %
V21 ($v_{z,CP}^{pl}$)	75	P402	0.0 analytique	0.001 %
MT	75	P403	-99.99991696 analytique	0.001 %
V9 ($\theta_{x,CP}^{pl}$)	100	P403	0.0 analytique	0.001 %
V21 ($v_{z,CP}^{pl}$)	50	P403	0.004908453	1.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.1.3.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





Les valeurs correspondent quasi parfaitement, toutefois le critère de capacité portante n'étant pas linéaire, l'étape du retour sur le critère (sur Code aster) lors d'un chargement en déplacement entraîne un léger décalage avec le résultat analytique. De plus, la relation entre déplacement plastique vertical et rotation étant non linéaire, on observe une différence entre les valeurs Aster (raisonnant de manière incrémentale) et les valeurs analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.1.4 Chargement en déplacement vertical puis en rotation avec décollement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements θ_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$\theta_x(m)$	0.	0.	$\theta_{x,max}$	0.	0.

Avec pour le chargement P701, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=2\ mm$.
Avec pour le chargement P702, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=5\ mm$.
Avec pour le chargement P703, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=1\ cm$.

4.1.4.1 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test et tous les cas de charges :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=1000\,kPa$;
- DECOLLEMENT = 'OUI' : Le décollement est ici activé ;

4.1.4.2 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=0,\quad M_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max},$$
$$M_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max}*K_{rx,rx}\ \ pour\ \ M_x\le\frac{-F_zL_y}{6}\ \ ou\ t\le t_{décol}=25\left(1+\frac{K_{zz}U_{z,max}L_y}{6K_{rx,rx}\theta_{x,max}}\right)$$

sinon :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yK_{zz}U_{z,max}}\right)^2}-\frac{1}{\left(1-\frac{2M_x(t_{décol})}{L_yK_{zz}U_{z,max}}\right)^2}=\frac{27}{2}\frac{K_{rx,rx}}{L_yK_{zz}U_{z,max}}\theta_{x,max}\frac{(t-t_{décol})}{25}$$
$$\frac{dM}{d\theta}=\frac{27}{8}K_{rz,rz}\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yK_{zz}U_{z,max}}\right)^3$$
$$\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yK_{zz}U_{z,max}}\right)^{-3}dM=\frac{27}{8}K_{rz,rz}d\theta$$
$$\frac{L_yK_{zz}U_{z,max}}{4}d\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yK_{zz}U_{z,max}}\right)^{-2}=\frac{27}{8}K_{rz,rz}d\theta$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Jusqu'à $t=25+t_{charge}$ où : $f_{cp}(t_{charge})=-F_z(25+t_{charge})-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(25+t_{charge})}{L_y F_z(25+t_{charge})}\right)=0$

Entre $t=25+t_{charge}$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(t)}{L_y F_z(t)}\right)$$

$$\left(1+\frac{2M_x(t)}{L_y F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right) \; et \left(\frac{-2M_x(t)}{L_y F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z} d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right) d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x} d\lambda_{CP}(t)=\frac{2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right) d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)} dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient alors $\theta^{pl}_{x,CP}(t)$ directement fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{V_{lim}}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)} dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-V_{lim}}{L_y K_{zz}}\ln\left(\frac{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}-2K_{zz}U_{z,max}}\right)$$

On peut ainsi exprimer à partir de $U^{pl}_{z,CP}$, $\theta^{pl}_{x,CP}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)$$

$$M_x(t)=\left(\frac{-F_z(t)L_y}{2}\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\right)$$

On retrouve la valeur de t, à partir du déplacement élastique :

$$\theta_x(t)=\theta^{élas}_x(t)+\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max} \; d'où \; : \; \theta^{élas}_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max}-\theta^{pl}_{x,CP}(t)$$

$$où: \; d\theta^{élas}_x(t)=\begin{cases} d\left(\frac{M_x}{K_{rx,rx}}\right) & si \; M_x<\frac{-F_z L_y}{6} \\ d\left(\frac{-4L_y V^3_{lim}}{2*27}\frac{(V_{lim}+4F_z)}{V_{lim}F^2_z}\right) & si \; M_x>\frac{-F_z L_y}{6} \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=50$ et $t=50+t_{décharge}$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max}, \qquad \theta_x(t)=\frac{75-t}{25}\theta_{x,max},$$

$$F_z(t)=F_z(50) \;et\; \begin{cases} dM_x(t)=d\left(\dfrac{-K_{rx,rx}\theta_{x,max}t}{25}\right) & si\ \dfrac{F_z L_y}{6}\le M_x\le\dfrac{-F_z L_y}{6} \\ d\left(\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2\left(M_x(t)\right)}{L_y F_z(50)}\right)^2}\right)=d\left(\dfrac{27}{2}\dfrac{K_{rx,rx}}{L_y K_{zz}}\dfrac{\theta_{x,max}t}{25}\right) & sinon \end{cases}$$

Jusqu'à $t=50+t_{décharge}$ où : $f_{cp}(50+t_{décharge})=-F_z(50+t_{décharge})-V_{lim}\left(1+\dfrac{-M_x(50+t_{décharge})}{F_z(50+t_{décharge})}\right)=0$

Entre $t=50+t_{décharge}$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_y F_z(t)}\right)$$

$$\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_y F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right) \;et\left(\frac{2M_x(t)}{L_y F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right)\,d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\,d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\dfrac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient alors $\theta^{pl}_{x,CP}(t)$ directement fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{V_{lim}}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\theta^{pl}_{x,CP}(50+t_{décharge})+\frac{V_{lim}}{L_y K_{zz}}\ln\left(\frac{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(50+t_{décharge})\right)}\right)$$

On peut ainsi exprimer à partir de $U^{pl}_{z,CP}$, $\theta^{pl}_{x,CP}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right) \text{ et } M_x(t)=\left(\frac{F_z(t)L_y}{2}\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On retrouve la valeur de t, en déterminant le déplacement élastique :

$$\theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)+\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\left(3-\frac{t}{25}\right)\theta_{x,max}$$

$$\text{où}\quad d\theta_x^{élas}(t)=\begin{cases} d\left(\dfrac{M_x}{K_{rx,rx}}\right) & si\ \ M_x>\dfrac{F_zL_y}{6} \\ d\left(\dfrac{4L_yV_{lim}^3}{2*27}\dfrac{(V_{lim}+4F_z)}{V_{lim}F_z^2}\right) & si\ \ M_x<\dfrac{F_zL_y}{6}\end{cases}$$

Entre $t=75$ et $t=75+t_3$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max}\frac{(100-t)}{25},\qquad \theta_x(t)=0,$$

$$F_z(t)=F_z(75)-\frac{(75-t)}{25}U_{z,max}K_{zz}\ \ et\ \ M_x(t)=M_x(75)$$

Jusqu'à $t=75+t_3$ où : $f_{cp}(75+t_3)=-F_z(75+t_3)-V_{lim}\left(1+\dfrac{-M_x(75+t_3)}{F_z(75+t_3)}\right)=0$

Entre $t=75+t_3$ et $t=100$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé en critère de :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)$$

$$\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right),\left(\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\ \ et\ \ F_z(t)=\frac{-V_{lim}}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{8(-M_x(t))}{L_yV_{lim}}}\right)$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\dfrac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=-\sqrt{1-\frac{8(-M_x(t))}{L_yV_{lim}}}\frac{L_y}{2}d\theta_{x,CP}^{pl}(t)$$

Or avec la rotation est constante :

$$\theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)+\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0\ \ d'où\ \ \ d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=-d\theta_{x,CP}^{elas}(t)$$

Or on considère qu'on est en décollement :

$$\frac{dM}{d\theta_{élas}}=\frac{27}{8}K_{rz,rz}\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)^3 avec\ \ F_z(t)=\frac{-V_{lim}}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{8(-M_x(t))}{L_yV_{lim}}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où : $$dM=\frac{27}{8}K_{rz,rz}\left(1+\frac{4M_x(t)}{L_yV_{lim}\left(1-\sqrt{1-\frac{8\left(-M_x(t)\right)}{L_yV_{lim}}}\right)}\right)^3 d\theta_{élas}$$

Ainsi, on obtient la relation entre la rotation élastique et le moment :

$$L_yV_{lim}d\left(\frac{2\sqrt{1-\frac{8\left(-M_x(t)\right)}{L_yV_{lim}}}-1}{\left(1-\sqrt{1-\frac{8\left(-M_x(t)\right)}{L_yV_{lim}}}\right)^2}\right)=\frac{27}{8}K_{rz,rz}d\theta_{élas}$$

De plus, on réécrit le tassement plastique :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{8L_y}{54K_{rx,rx}}\frac{\sqrt{1-\frac{8\left(-M_x(t)\right)}{L_yV_{lim}}}}{\left(1+\frac{4M_x(t)}{L_yV_{lim}\left(1-\sqrt{1+\frac{8M_x(t)}{L_yV_{lim}}}\right)}\right)^3}dM_x(t)$$

Ainsi, on obtient la relation entre moment et tassement plastique :

$$\frac{54K_{rx,rx}}{8L_y}dU_{z,CP}^{pl}(t)=L_yV_{lim}d\left(\frac{4\sqrt{1+\frac{8M_x(t)}{L_yV_{lim}}}-3}{\left(1-\sqrt{1+\frac{8M_x(t)}{L_yV_{lim}}}\right)^2}-2\ln\left(1-\sqrt{1+\frac{8M_x(t)}{L_yV_{lim}}}\right)\right)$$

Ainsi en fixant $M_x(t)$, on peut déterminer $U_{z,CP}^{pl}(t)$, $\theta_x^{élas}(t)$, $F_z(t)$ et par conséquent le reste des variables.

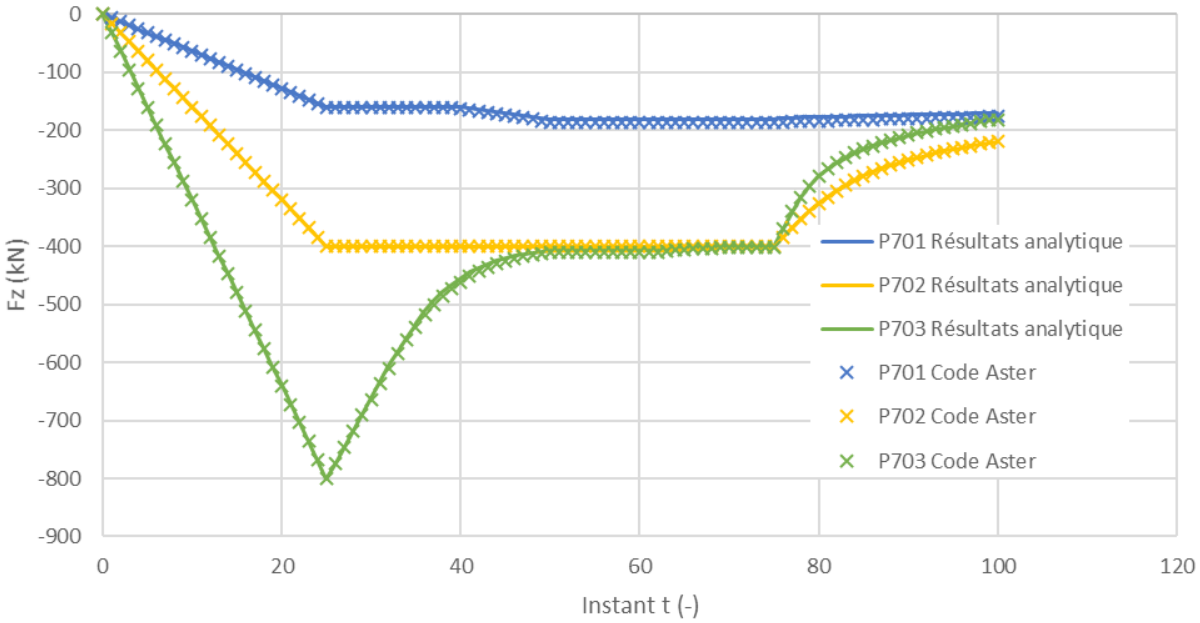
4.1.4.3 Grandeurs testées et résultats

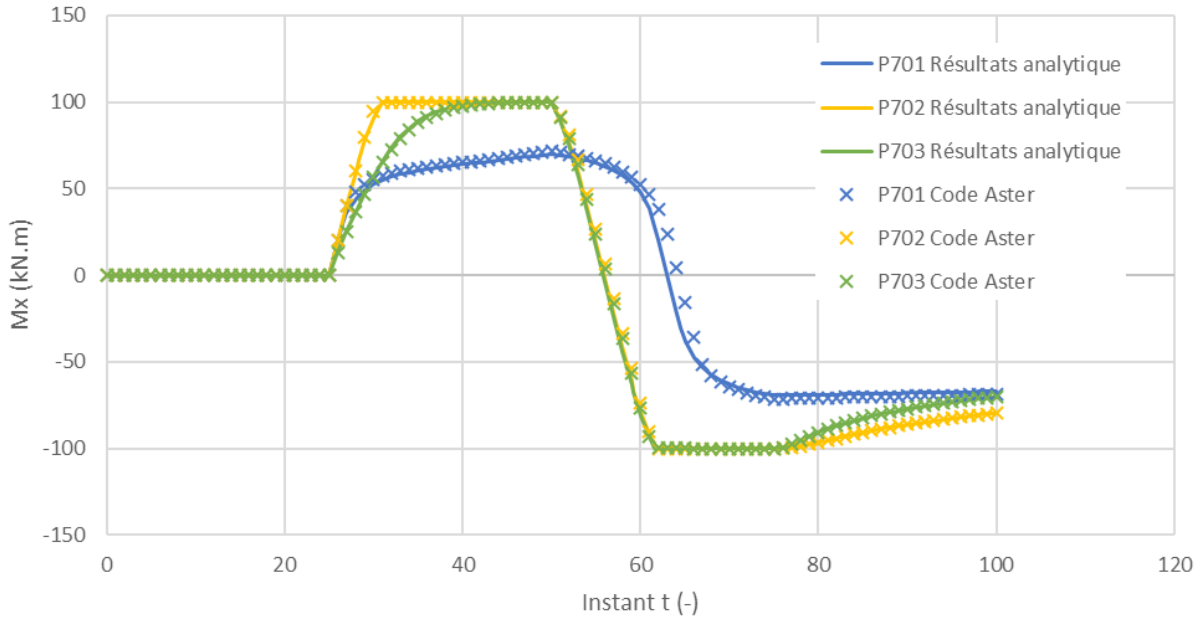
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	P701	-182.1149677	5.0 %
MT	75	P701	-69.4550891	5.0 %
V9 ($\theta_{x,CP}^{pl}$)	100	P701	-0.00562767	0.2 %
VZ	100	P702	-219.5401599	0.2 %
MT	50	P702	100.0 analytique	0.001 %
V21 ($v_{z,CP}^{pl}$)	75	P702	0.0 analytique	0.001 %
VZ	75	P703	-400.5245004	0.2 %
MT	100	P703	-70.3099226	0.5 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	50	P703	-0.004905045	1.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.1.4.4 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





Les valeurs correspondent, toutefois on observe un écart visible entre Code Aster et la solution analytique provenant du fait qu'en plus de toutes les causes mentionnées au §3.2.3.5, la gestion du décollement est faite de manière incrémentale (raideur constante pendant un pas de temps) alors que la solution analytique est continue (raideur variant au cours d'un pas de temps).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation b : Cpseul_Qciné_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de perte de capacité portante avec écrouissage cinématique selon 2 séries de chargement différents :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (PC101) avec écrouissage cinématique en en translation ;
- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis rotation (PC401) avec écrouissage cinématique en en rotation ;

5.1.1 Chargement en déplacement vertical puis en déplacement horizontal

On impose au nœud N1 un chargement U_z et un chargement U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour le chargement PC101, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=2\ mm$.

5.1.1.1 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test et tous les cas de charges :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=5000\,kPa$;
- RAID_CP_X : $I_{h,x}=15000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_CP_X : $\gamma_{h,x}=5000\ m^{-1}$;

5.1.1.2 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_c$ où : $f_{cp}(25+t_c)=-F_z(25+t_c)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_c)}{F_z(25+t_c)}\right)^3=0$

D'où :

$$t_c=\frac{25\,U_{z,max}K_{zz}}{U_{x,max}K_{xx}}\left(1-\left(\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=25+t_c$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{\left(F_x(t)-R_{h,x}(t)\right)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{\left(F_x(t)-R_{h,x}(t)\right)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}} \; et \left(\frac{-\left(F_x(t)-R_{h,x}(t)\right)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\; d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\; d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient alors $U^{pl}_{x,CP}(t)$ directement fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)=\begin{cases}U^{pl}_{x,CP}(25+t_{charge})\\ -\frac{9}{8}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)^{\frac{2}{3}}-\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(25+t_{charge})\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\ -\frac{27}{16}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(25+t_{charge})\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\ -\frac{81V_{lim}}{64K_{zz}}\ln\left(\frac{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(25+t_{charge})\right)\right)^{\frac{1}{3}}}\right)\end{cases}$$

On obtient aussi l'écrouissage $R_{h,x}(t)$ en fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$dR_{h,x}(t)=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}(t)\right)dU^{pl}_{x,CP}(t)$$

Or $U^{pl}_{z,CP}(t)>0$ est croissant pour le cas de charge étudié donc $U^{pl}_{z,CP}(t)=v^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$dR_{h,x}(t)=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}U^{pl}_{z,CP}(t)\right)dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{x,CP}(t)$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut ainsi tout exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$:

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right) \; et \; F_x(t)=-F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)+R_{h,x}(t)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max}, \qquad U_x(t)=\frac{75-t}{25}U_{x,max},$$

$$F_x(t)=F_x(50)+\left(\frac{50-t}{25}\right)U_{x,max}K_{xx}, \quad R_x(t)=R_x(50), \qquad F_z(t)=F_z(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_d$ où : $f_{cp}(50+t_{décharge})=-\left(F_z(50+t_d)-R_x(50+t_d)\right)-V_{lim}\left(1+\frac{-F_x(50+t_d)}{F_z(50+t_d)}\right)^3=0$

D'où :

$$t_{décharge}=\frac{25}{U_{x,max}K_{xx}}\left(F_x(50)-R_x(50)-F_z(50)\left(1-\left(\frac{-F_z(50)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

Entre $t=50+t_d$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{\left(F_x(t)-R_{h,x}(t)\right)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1-\frac{\left(F_x(t)-R_{h,x}(t)\right)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}} \; et \left(\frac{\left(F_x(t)-R_{h,x}(t)\right)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\,d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=-3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\,d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $U_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$U_{x,CP}^{pl}(t)=\begin{cases} U_{x,CP}^{pl}(50+t_{décharge}) \\ +\frac{9}{8}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)^{\frac{2}{3}}-\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(50+t_{décharge})\right)^{\frac{2}{3}}\right) \\ +\frac{27}{16}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(50+t_{décharge})\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\ +\frac{81V_{lim}}{64K_{zz}}\ln\left(\frac{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(50+t_{décharge})\right)\right)^{\frac{1}{3}}}\right) \end{cases}$$

On obtient aussi l'écrouissage $R_{h,x}(t)$ en fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$dR_{h,x}(t)=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)dU_{x,CP}^{pl}(t)$$

Car $U_{z,CP}^{pl}(t)>0$ est croissant pour le cas de charge étudié donc $U_{z,CP}^{pl}(t)=v_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$dR_{h,x}(t)=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}U_{z,CP}^{pl}(t)\right)dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{x,CP}^{pl}(t)$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée.

On peut ainsi tout exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$:

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)\ et\ F_x(t)=F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)+R_{h,x}(t)$$

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement

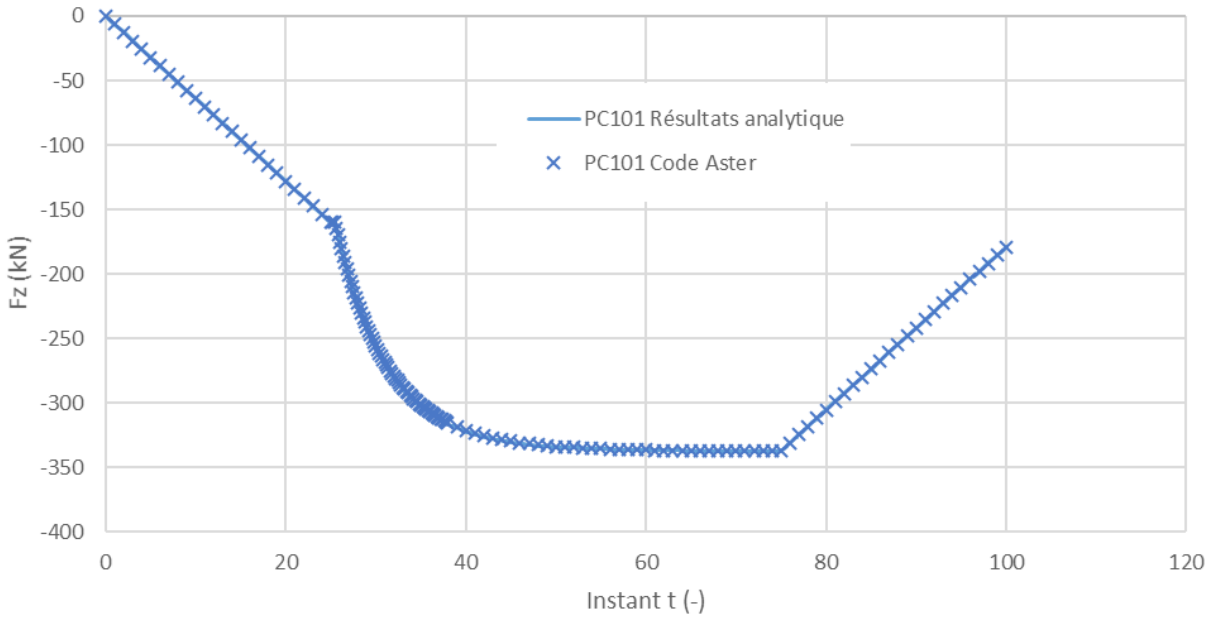
5.1.1.3 Grandeurs testées et résultats

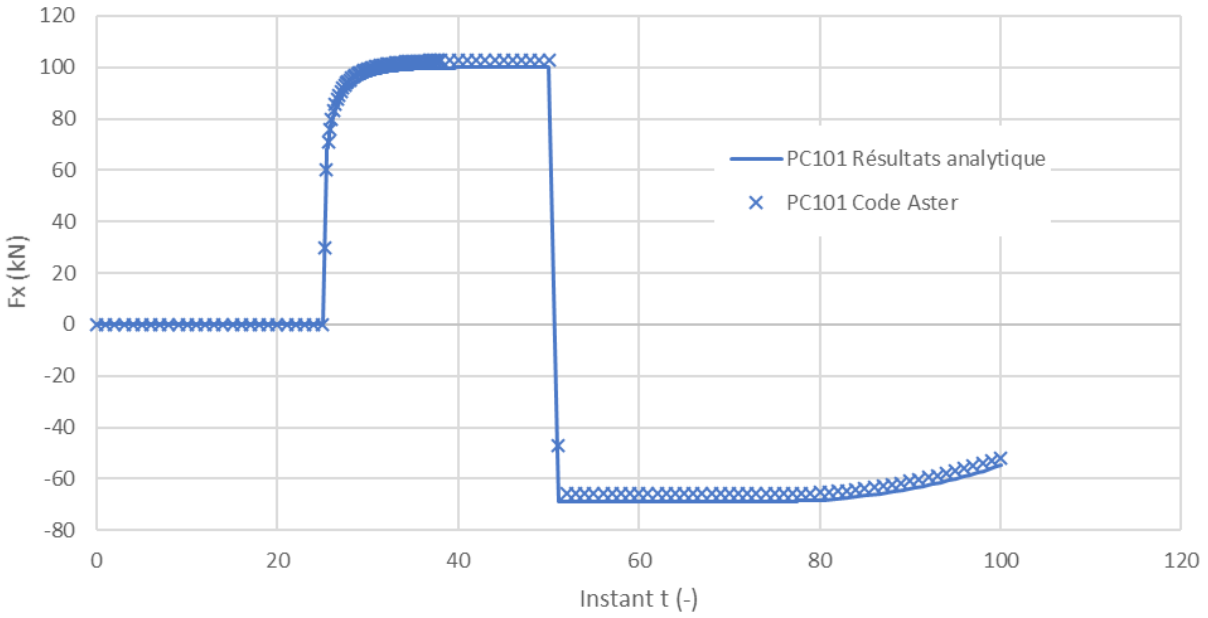
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	PC101	-334.3454894	0.5 %
N	75	PC101	-68.74869448	5.0 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	PC101	0.002217846	0.1 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	50	PC101	0.048666562	0.1 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.1.1.4 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





En plus des facteurs d'imprécision mentionné au §3.2.2.5, l'équation de l'écrouissage cinématique relie de manière non linéaire déplacement plastique et écrouissage cinématique. On observe ainsi une différence entre Code aster qui résout de manière incrémentale le système et la solution analytique exacte. Néanmoins, les évolutions des forces sont très semblables.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.1.2 Chargement en déplacement vertical puis en rotation sans décollement

On impose au nœud N1 un chargement U_z et un chargement θ_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$\theta_x(m)$	0.	0.	$\theta_{x,max}$	0.	0.

Avec pour le chargement P401, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=2\ mm$.

5.1.2.1 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test et tous les cas de charges :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=1000\,kPa$;
- RAID_CP_RX : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $I_{m,x}=5000\ kN.m.rad^{-1}$;
- GAMMA_CP_RX : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\gamma_{m,x}=2000\ m^{-1}$;

5.1.2.2 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=0,\quad M_x(t)=0,\quad R_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},\ R_x(t)=0$$
$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max},\quad M_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max}*K_{rx,rx}$$

Jusqu'à $t=25+t_c$ où : $f_{cp}(25+t_c)=-F_z(25+t_c)-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(25+t_c)}{L_yF_z(25+t_c)}\right)=0$

D'où :

$$t_c=\frac{25L_yU_{z,max}K_{zz}}{2\theta_{x,max}K_{rx,rx}}\left(1-\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)$$

Entre $t=25+t_c$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{2\left(M_x(t)-R_x(t)\right)}{L_yF_z(t)}\right)$$
$$\left(1+\frac{2\left(M_x(t)-R_x(t)\right)}{L_yF_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\ et\left(\frac{-2\left(M_x(t)-R_x(t)\right)}{L_yF_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$d\,U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\,\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right)\,d\,\lambda_{CP}(t)$$

$$d\,\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\,\lambda_{CP}(t)=\frac{2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\,d\,\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\,\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $\theta_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\,\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{V_{lim}}{V_{lim}-2\,K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-V_{lim}}{L_y K_{zz}}\ln\left(\frac{V_{lim}-2\,K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}-2\,K_{zz}U_{z,max}}\right)$$

On obtient aussi l'écrouissage $R_{m,x}(t)$ en fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\,R_{m,x}(t)=I_{m,x}\exp\left(-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)d\,\theta_{x,CP}^{pl}(t)$$

Or $U_{z,CP}^{pl}(t)>0$ est croissant pour le cas de charge étudié donc $U_{z,CP}^{pl}(t)=v_{z,CP}^{pl}(t)$:
¿

$$\begin{aligned}d\,R_{m,x}(t) &= I_{m,x}\exp\left(-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)d\,\theta_{x,CP}^{pl}(t)\\ &=\frac{2\,V_{\lim}}{L_y}\frac{I_{m,x}\exp\left(-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{\lim}-2\,K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}d\,U_{x,CP}^{pl}(t)\end{aligned}$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée.

On peut aussi exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$, les forces :

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)\;et\;M_x(t)=\left(\frac{-F_z(t)L_y}{2}\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\right)+R_{m,x}(t)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max},\qquad \theta_x(t)=\frac{75-t}{25}\theta_{x,max},$$

$$F_z(t)=F_z(50),\qquad M_x(t)=M_x(50)+K_{rx,rx}\theta_{x,max}\left(\frac{50-t}{25}\right),\;R_{m,x}(t)=R_{m,x}(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_d$ où : $f_{cp}(50+t_d)=-F_z(50+t_d)-V_{lim}\left(1+\frac{-\left(M_x(50+t_d)-R_{m,x}(50+t_d)\right)}{F_z(50+t_d)}\right)=0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où :

$$t_d=\frac{25}{\theta_{x,max}K_{rx,rx}}\left(\left(M_x(50)-R_{m,x}(50)\right)-\frac{F_z(50)L_y}{2}\left(1-\left(\frac{-F_z(50)}{V_{lim}}\right)\right)\right)$$

Entre $t=50+t_d$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)$$

$$\left(1-\frac{2\left(M_x(t)-R_{m,x}(t)\right)}{L_yF_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\ et\left(\frac{2\left(M_x(t)-R_{m,x}(t)\right)}{L_yF_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $\theta_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{V_{lim}}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\theta_{x,CP}^{pl}(50+t_{décharge})+\frac{V_{lim}}{L_yK_{zz}}\ln\left(\frac{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(50+t_{décharge})\right)}\right)$$

On obtient aussi l'écrouissage $R_{m,x}(t)$ en fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$dR_{m,x}(t)=I_{m,x}\exp\left(-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)d\theta_{x,CP}^{pl}(t)$$

Or $U_{z,CP}^{pl}(t)>0$ est croissant pour le cas de charge étudié donc $U_{z,CP}^{pl}(t)=v_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$dR_{m,x}(t)=I_{m,x}\exp\left(-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)$$

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2V_{lim}}{L_y}\frac{I_{m,x}\exp\left(-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}-2K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}dU_{x,CP}^{pl}(t)$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On peut ainsi exprimer à partir de $U^{pl}_{z,CP}$, $\theta^{pl}_{x,CP}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t) = -K_{zz}\left(U_{z,max} + U^{pl}_{z,CP}(t)\right)$$

$$M_x(t) = \left(\frac{F_z(t)\,L_y}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\right) + R_{m,x}(t)$$

On retrouve la valeur de t, en écrivant la définition du déplacement :

$$\theta_x(t) = \theta^{élas}_x(t) + \theta^{pl}_{x,CP}(t) = \left(3 - \frac{t}{25}\right)\theta_{x,max}$$

$$\left(3 - \frac{t}{25}\right) = \frac{1}{\theta_{x,max}}\left(\frac{M_x(t)}{K_{rx,rx}} + \theta^{pl}_{x,CP}(t)\right)$$

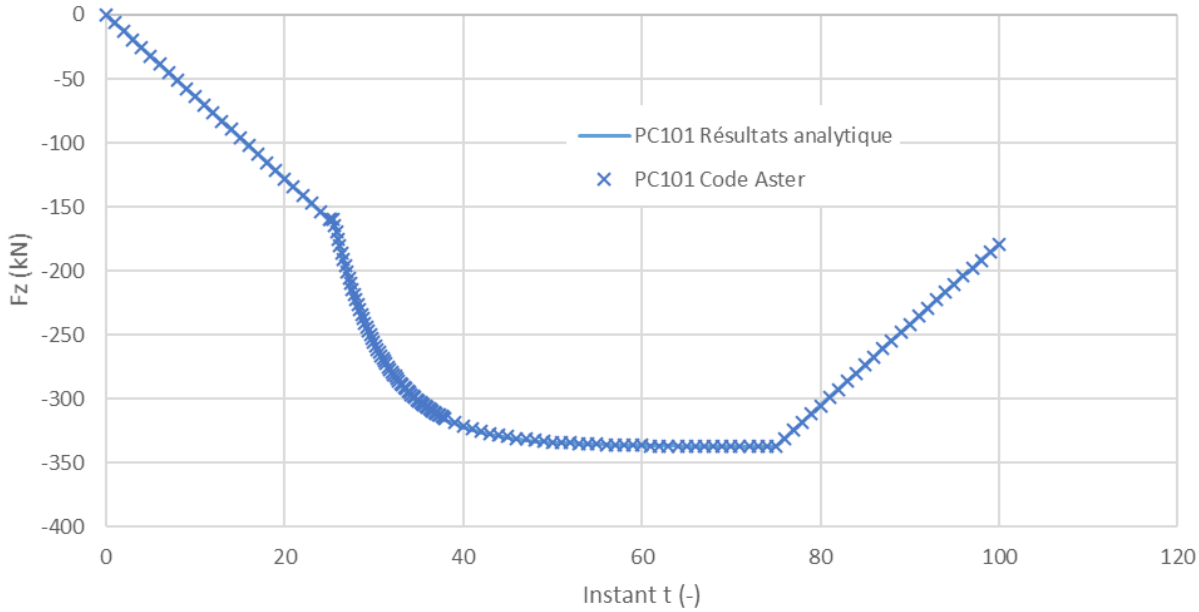
Entre $t = 75$ et $t = 100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

5.1.2.3 Grandeurs testées et résultats

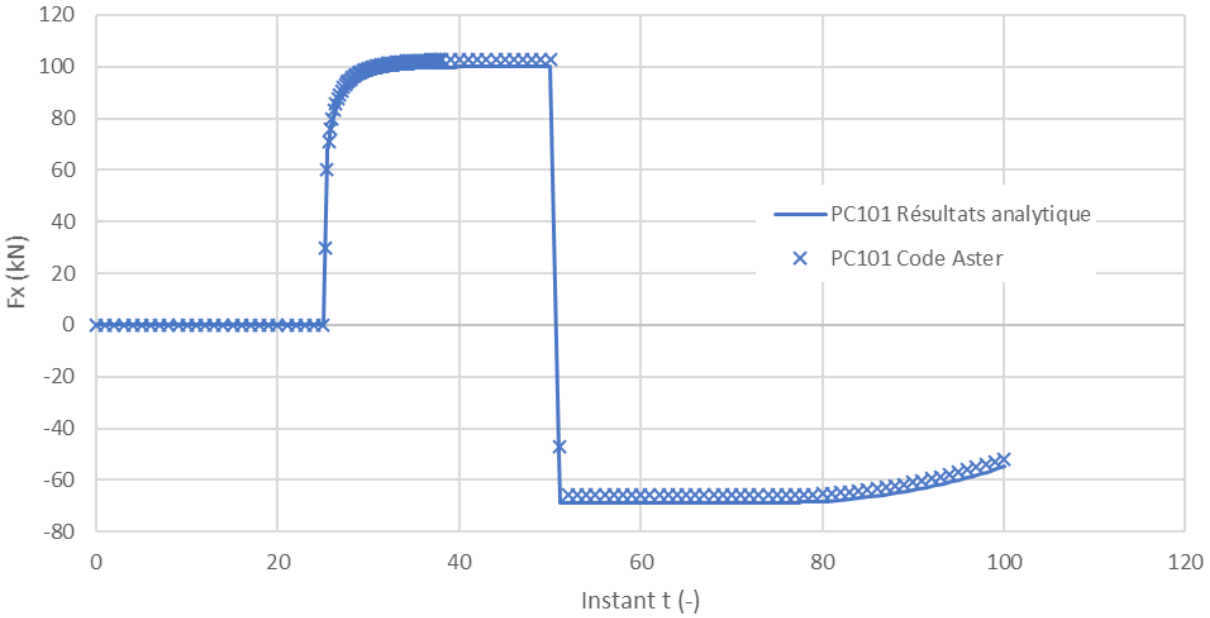
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	PC401	-395.102058	0.5 %
MT	75	PC401	-89.55151	5.0 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PC401	0.002996941	0.1 %
V9 ($\theta^{pl}_{x,CP}$)	50	PC401	0.038918238	0.1 %

5.1.2.4 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



En plus des facteurs d'imprécision mentionné au §3.2.3.5, l'équation dé l'écrouissage cinématique relie de manière non linéaire déplacement plastique et écrouissage cinématique. On observe ainsi une différence entre Code aster qui résout de manière incrémentale le système et la solution analytique exacte. Néanmoins, les évolutions des forces sont très semblables.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation c : Cpseul_Qiso_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de perte de capacité portante selon 4 séries de chargement différents :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical uniquement (PI001, PI002 et PI003)
- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (PI101, PI102 et PI103)
- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis rotation sans mécanisme de décollement (PI401, PI402 et PI403), le critère de décollement est seulement analysé au §3.2.4.

6.1.1 Chargement en déplacement vertical uniquement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	50.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}=-0,3\,m$	0.

Trois cas avec le même chargement sont étudiés, ils seront nommés PI001, PI002 et PI003.

6.1.1.1 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=5000\,kPa$;
- DEPL_REFE : Afin d'étudier un écrouissage isotrope $v_{pl,r}^{CP}=1\ cm$;
- CP_ULTIME : Afin d'étudier des écrouissages isotropes différent, on a :
  - PI001 : $V_{ult}=1200\ kN$;
  - PI002 : $V_{ult}=1700\ kN$;
  - PI003 : $V_{ult}=8000\ kN$;

6.1.1.2 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0$$

$$U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{50}=U_z^{élas}(t)$$

$$F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=\frac{-K_{zz}U_{z,max}t}{50},\quad R(t)=0$$

Jusqu'à $t=t_{charge}$ où : $f_{cp}(t_{charge})=-F_z(t_{charge})-V_{lim}=0$
D'où :

$$t_{charge}=\frac{50\,V_{lim}}{U_{z,max}K_{zz}}$$

Entre $t=t_{charge}$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-(V_{lim}+R)\ d'où\ F_z(t)=-(V_{élas}+R)\ ,$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant le déplacement qui est une donnée d'entrée, on a :

$$-U_{z,max}*\frac{t}{50}=U_z(t)=U_{z,CP}^{pl}(t)+U_z^{élas}(t)=U_{z,CP}^{pl}(t)-\frac{(V_{élas}+R)}{K_{zz}}$$

avec $$R=\frac{(V_{ult}-V_{lim})v_{pl,z}^{CP}}{v_{pl,z}^{CP}+v_{pl,r}^{CP}}$$

Or le tassement plastique est toujours négatif donc : $v_{pl,z}^{CP}=\int\left|dU_{z,CP}^{pl}\right|=-U_{z,CP}^{pl}$, on peut donc exprimer t en fonction de $U_{z,CP}^{pl}$:

$$t=\frac{-50}{U_{z,max}}\left(U_{z,CP}^{pl}(t)-\frac{V_{lim}}{K_{zz}}+\frac{(V_{ult}-V_{lim})U_{z,CP}^{pl}}{K_{zz}\left(v_{pl,r}^{CP}-U_{z,CP}^{pl}\right)}\right)$$

On peut donc exprimer l'ensemble des autres paramètres en fonction de $U_{z,CP}^{pl}$:

$$R=\frac{(V_{ult}-V_{lim})v_{pl,z}^{CP}}{v_{pl,z}^{CP}+v_{pl,r}^{CP}}\quad et\quad F_z(t)=-(V_{élas}+R)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_{décharge}$, on est en élasticité :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=U_{z,CP}^{pl}(50),\ U_z(t)=\frac{-U_{z,max}(100-t)}{50}$$

$$F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-K_{zz}\left(\frac{U_{z,max}(100-t)}{50}+U_{z,CP}^{pl}(50)\right),\ R(t)=R(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_{décharge}$ où : $f_{cp}(50+t_{décharge})=F_z(50+t_{décharge})=0$
D'où :

$$t_{décharge}=50\left(1+\frac{U_{z,CP}^{pl}(50)}{U_{z,max}}\right)$$

Entre $t=50+t_{décharge}$ et $t=100$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=F_z(t)$$

En écrivant le déplacement qui est une donnée d'entrée, on a :

$$U_z(t)=\frac{-U_{z,max}(100-t)}{50}=U_{z,CP}^{pl}(t)\ \ et\ \ \ v_{pl,z}^{CP}=v_{pl,z}^{CP}(50)+U_{z,CP}^{pl}(t)-U_{z,CP}^{pl}(50)\ \ car\ \ U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On retrouve l'écrouissage isotrope finalement :

$$R=\frac{(V_{ult}-V_{lim})v_{pl,z}^{CP}}{v_{pl,z}^{CP}+v_{pl,r}^{CP}}$$

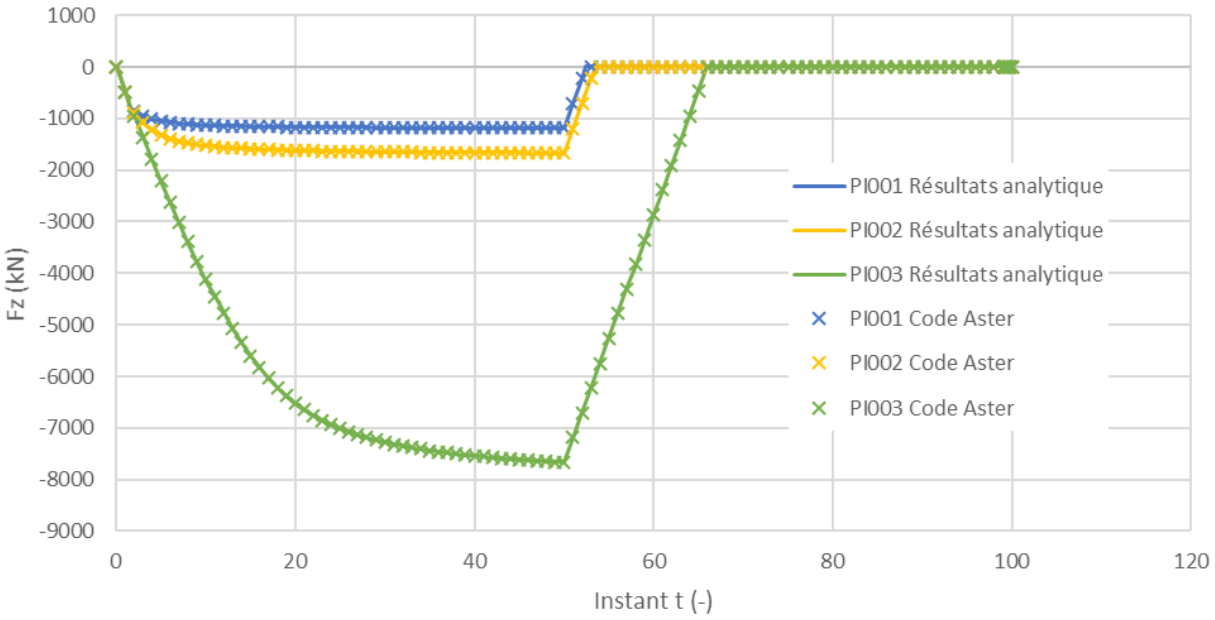
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.1.1.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	25	PI001	-1172.479086 analytique	0.001 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PI001	-0.15 analytique	0.001 %
V15 (R)	50	PI001	386.4484595 analytique	0.001 %
VZ	50	PI002	-1668.873112 analytique	0.001 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	100	PI002	0.558278172 analytique	0.001 %
V15 (R)	75	PI002	878.4832186 analytique	0.001 %
VZ	100	PI003	0.0 analytique	0.001 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	50	PI003	-0.204201648 analytique	0.001 %
V15 (R)	25	PI003	6205.8875 analytique	0.001 %

6.1.1.4 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :



Ils correspondent parfaitement, car l'écrouissage isotrope est calculé de manière exact et le critère dans ce cas est linéaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.1.2 Chargement en déplacement vertical puis en déplacement horizontal

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour le chargement PI101, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=2\ mm$.
Avec pour le chargement PI102, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=5\ mm$.
Avec pour le chargement PI103, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=1\ cm$.

6.1.2.1 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test et tous les cas de charges :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=1000\,kPa$;
- DEPL_REFE : Afin d'étudier un écrouissage isotrope $v_{pl,r}^{CP}=1\ cm$;
- CP_ULTIME : Afin d'étudier un écrouissage isotrope : $V_{ult}=1700\ kN$;

6.1.2.2 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx},\quad R=0$$

Jusqu'à $t=25+t_{chge}$ où : $f_{cp}(t_c)=-F_z(25+t_c)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_c)}{F_z(25+t_c)}\right)^3=0$

D'où :

$$t_c=\frac{25\,U_{z,max}K_{zz}}{U_{x,max}K_{xx}}\left(1-\left(\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Entre $t=25+t_c$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-(V_{lim}+R)\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$
$$\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}\ et\left(\frac{-F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$d\,U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\,\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\ d\,\lambda_{CP}(t)$$

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\,\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\ d\,\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)\ \ et\ \ R(t)=\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left(U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{\left(U_{z,CP}^{pl}(t)\right)+v_{pl,r}^{CP}}$$

On obtient alors $U_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}+\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|}{\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|+v_{pl,r}^{CP}}}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée.

On peut ainsi tout exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$:

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)$$

$$R(t)\ =\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left(U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{\left(U_{z,CP}^{pl}(t)\right)+v_{pl,r}^{CP}}$$

$$F_x(t)=-F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max},\ U_x(t)=\frac{75-t}{25}U_{x,max},$$

$$F_x(t)=F_x(50)+\left(\frac{50-t}{25}\right)U_{x,max}K_{xx},\ F_z(t)=F_z(50)\ \ et\ R(t)=R(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_d$ où : $f_{cp}(50+t_d)=-F_z(50+t_d)-\left(V_{lim}+R(50+t_d)\right)\left(1+\frac{-F_x(50+t_d)}{F_z(50+t_d)}\right)^3=0$

D'où :

$$t_d=\frac{25}{U_{x,max}K_{xx}}\left(F_x(50)-F_z(50)\left(1-\left(\frac{-F_z(50)}{V_{lim}+R(50)}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=50+t_{décharge}$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1-\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}} \; et \left(\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}+R(t)}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\,d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=-3\left(\frac{V_{lim}+R(t)}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\,d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R(t)}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t),$$

$$R(t)=(V_{ult}-V_{lim})\frac{\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(50)-U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(50)-U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}$$

On obtient alors $U^{pl}_{x,CP}(t)$ directement fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}+(V_{ult}-V_{lim})\frac{\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(50)-U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(50)-U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée.

On peut ainsi exprimer à partir de $U^{pl}_{z,CP}$, $U^{pl}_{x,CP}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right) \; et \quad F_x(t)=F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{(V_{lim}+R(t))}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$R(t)=(V_{ult}-V_{lim})\frac{\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(50)-U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(50)-U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}$$

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

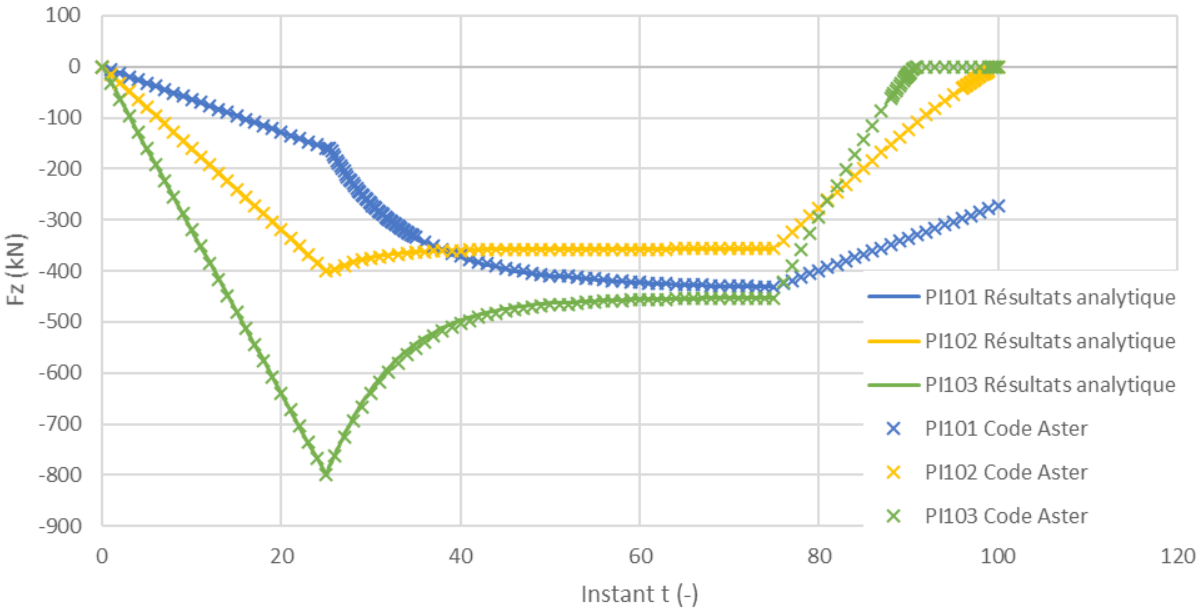
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.1.2.3 Grandeurs testées et résultats

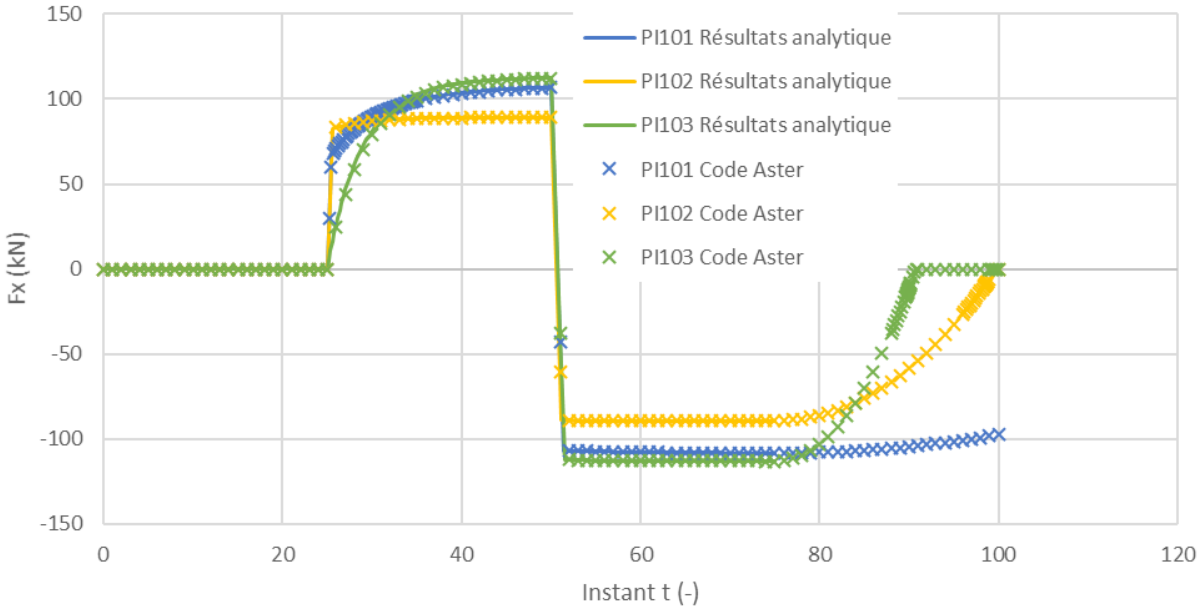
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	PI101	-410.4147087	1.0 %
N	75	PI101	-108.4373584	0.1 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PI101	0.003396095	1.0 %
V15 (R)	50	PI101	214.5564375	1.0 %
VZ	50	PI102	-357.1430242	0.1 %
N	75	PI102	-89.22658438	0.01 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PI102	-0.000538644	0.1 %
V6 ($U^{pl}_{x,CP}$)	50	PI102	0.048810647	0.01 %
VZ	75	PI103	-452.8343425	0.1 %
N	50	PI103	112.449324	0.2 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	50	PI103	0.004212834	1.0 %
V15 (R)	75	PI103	272.3661485	0.1 %

6.1.2.4 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les chargements donnés, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendues :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



A part les facteurs d'imprécision mentionnés au §3.2.2.5, l'équation de l'écrouissage isotrope étant résolue de manière exacte, il n'y a pas plus de déviation entre Code Aster et les résultats analytiques qu'au §3.2.2.5.

6.1.3 Chargement en déplacement vertical puis en rotation sans décollement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements θ_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$\theta_x(m)$	0.	0.	$\theta_{x,max}$	0.	0.

Avec pour le chargement PI401, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=2\ mm$.
Avec pour le chargement PI402, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=5\ mm$.
Avec pour le chargement PI403, $\theta_{x,max}=0{,}05\ rad$ et $U_{z,max}=1\ cm$.

6.1.3.1 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test et tous les cas de charges :

- PHI : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $\phi_{inter}=45°$;
- COHESION : Afin de ne pas rencontrer le critère de glissement $c_{inter}=1000\,kPa$;
- DEPL_REFE : Afin d'étudier un écrouissage isotrope $v_{pl,r}^{CP}=1\ cm$;
- CP_ULTIME : Afin d'étudier un écrouissage isotrope : $V_{ult}=1700\ kN$;

6.1.3.2 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\ \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=0,\ M_x(t)=0,\ R(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz}$$

$$\theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\ \theta_x(t)=\theta_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max},\ M_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)\theta_{x,max}*K_{rx,rx},\ R(t)=0$$

Jusqu'à $t=25+t_c$ où : $f_{cp}(t_c)=-F_z(25+t_c)-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(25+t_c)}{L_yF_z(25+t_c)}\right)=0$

D'où :

$$t_c=\frac{25L_yU_{z,max}K_{zz}}{2\theta_{x,max}K_{rx,rx}}\left(1-\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)$$

Entre $t=25+t_c$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-(V_{lim}+R(t))\left(1+\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)$$

$$\left(1+\frac{2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R(t)}\right)\ et\left(\frac{-2M_x(t)}{L_yF_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R(t)}\right)$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(-2+\left(\frac{-V_{lim}+R(t)}{F_z(t)}\right)\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{2}{L_y}\left(\frac{-V_{lim}+R(t)}{F_z(t)}\right)\ d\lambda_{CP}(t)\ \ et\ \ R(t)=\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|}{\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|+v_{pl,r}^{CP}}$$

Ainsi :

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|}{\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|+v_{pl,r}^{CP}}}\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $\theta_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}+\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|}{\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|+v_{pl,r}^{CP}}}\right)}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Donnant

- si $U_{z,CP}^{pl}(t)>0$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$d\left(\frac{L_y}{2}\theta^{pl}_{x,CP}(t)\right)=\frac{-1}{4K_{zz}}d\left(\frac{V_{ult}\ln\left(2K_{zz}\left(U^{pl}_{z,CP}+v^{CP}_{pl,r}\right)\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}\right)-v^{CP}_{pl,r}V_{lim}-V_{ult}U^{pl}_{z,CP}\right)}{\left(V^2_{ult}-2K_{zz}\left(v^{CP}_{pl,r}\left(V_{ult}-2V_{lim}\right)+V_{ult}U_{z,max}\right)\right)}\ln\left(\frac{1-f^{+}\left(U^{pl}_{z,CP}\right)}{1+f^{+}\left(U^{pl}_{z,CP}\right)}\right)\right)$$

$$où\ :\ f^{+}\left(U^{pl}_{z,CP}\right)=\frac{\left(2K_{zz}\left(v^{CP}_{pl,r}+U_{z,max}+2U^{pl}_{z,CP}\right)-V_{ult}\right)}{\sqrt{4K^2_{zz}\left(v^{CP}_{pl,r}-U_{z,max}\right)^2-4K_{zz}\left(v^{CP}_{pl,r}\left(V_{ult}-2V_{lim}\right)+V_{ult}U_{z,max}\right)+V^2_{ult}}}$$

- si $U^{pl}_{z,CP}(t)<0$:

$$d\left(\frac{L_y}{2}\theta^{pl}_{x,CP}(t)\right)=\frac{-1}{4K_{zz}}d\left(\frac{V_{ult}\ln\left(2K_{zz}\left(U^{pl}_{z,CP}-v^{CP}_{pl,r}\right)\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}\right)+v^{CP}_{pl,r}V_{lim}-V_{ult}U^{pl}_{z,CP}\right)}{\left(V^2_{ult}-2K_{zz}\left(v^{CP}_{pl,r}\left(2V_{lim}-V_{ult}\right)+V_{ult}U_{z,max}\right)\right)}\ln\left(\frac{1-f^{-}\left(U^{pl}_{z,CP}\right)}{1+f^{-}\left(U^{pl}_{z,CP}\right)}\right)\right)$$

$$où\ :\ f^{-}\left(U^{pl}_{z,CP}\right)=\frac{\left(2K_{zz}\left(U_{z,max}-v^{CP}_{pl,r}+2U^{pl}_{z,CP}\right)-V_{ult}\right)}{\sqrt{4K^2_{zz}\left(v^{CP}_{pl,r}+U_{z,max}\right)^2+4K_{zz}\left(v^{CP}_{pl,r}\left(V_{ult}-2V_{lim}\right)-V_{ult}U_{z,max}\right)+V^2_{ult}}}$$

On peut ainsi exprimer à partir de $U^{pl}_{z,CP}$, $\theta^{pl}_{x,CP}$ ainsi que les forces :

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)$$

$$M_x(t)=\left(\frac{-F_z(t)L_y}{2}\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)\right)et\quad R(t)=\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}$$

Entre $t=50$ et $t=75$, la même résolution est réalisée, elle n'est pas détaillée ci-après.

$$d\,\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R(t)}\right)}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right),\ R(t)=\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(t)-U^{pl}_{z,CP}(50)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+\left|U^{pl}_{z,CP}(t)-U^{pl}_{z,CP}(50)\right|+v^{CP}_{pl,r}}$$

Ici : $R(t)=\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}$

$$et\,\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}+\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}}\right)}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

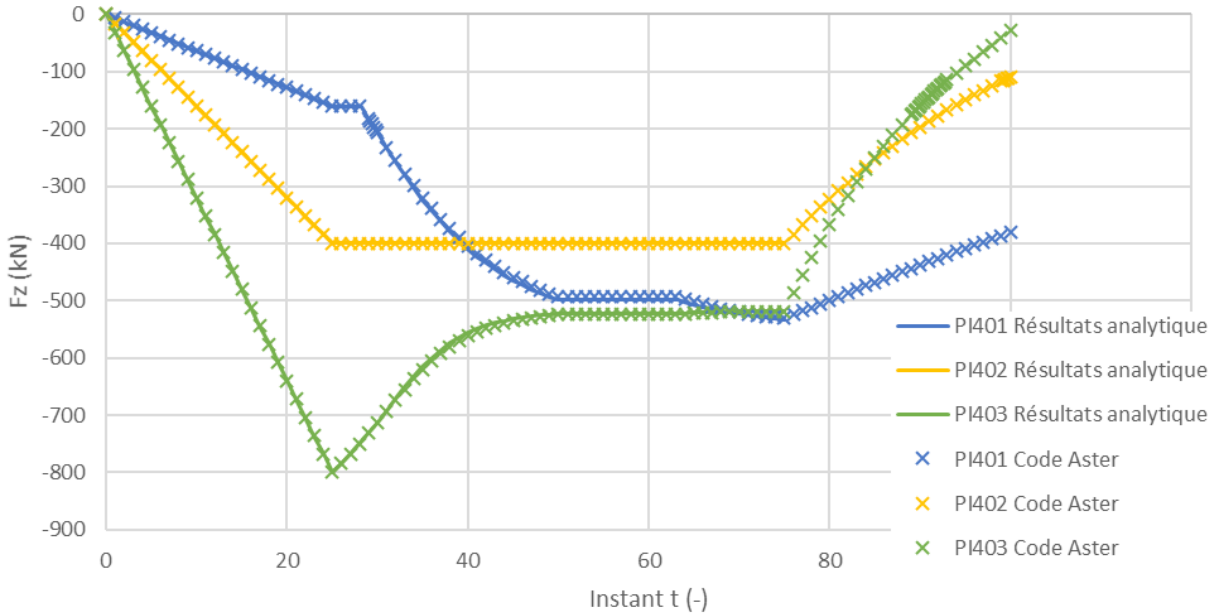
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.1.3.3 Grandeurs testées et résultats

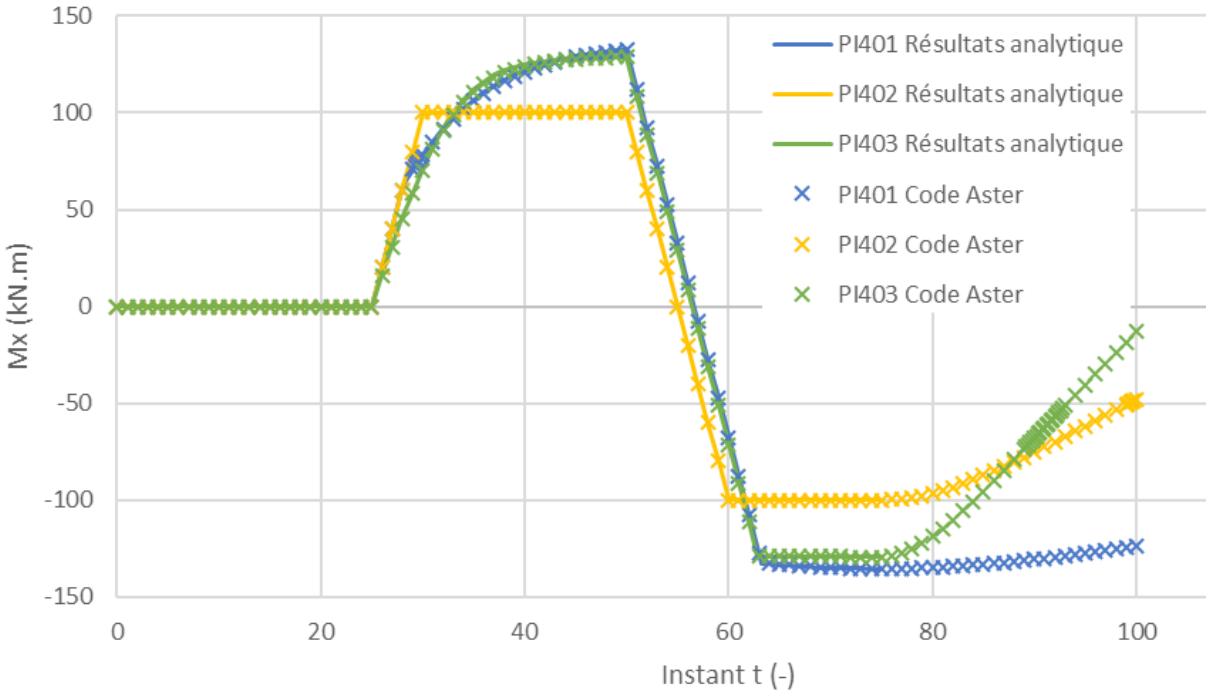
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	PI401	-498.3926103	1.0 %
MT	75	PI401	-135.7290081	0.2 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PI401	0.004662891	1.0 %
V15 (R)	50	PI401	267.5292746	1.0 %
VZ	50	PI402	-400	0.1 %
MT	75	PI402	-100	0.1 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PI402	0.0 analytique	0.001 %
V9 ($\theta^{pl}_{x,CP}$)	50	PI402	0.04	0.01 %
VZ	75	PI403	-517.8991994	0.1 %
MT	50	PI403	128.9416476	1.0 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	50	PI403	0.003467222	1.0 %
V15 (R)	75	PI403	234.62761	0.5 %

6.1.3.4 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les chargements donnés, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendues :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



A part les facteurs d'imprécision mentionnés au §3.2.3.5, l'équation de l'écrouissage isotrope étant résolue de manière exacte, il n'y a pas plus de déviation entre Code Aster et les résultats analytiques qu'au §3.2.3.5.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation d : Gseul_Plas_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de glissement selon 1 série de chargement différents :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (G101, G102)

7.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 deux chargements U_z et deux chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements G101 et G102, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=6{,}25\ mm$.

7.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour le chargement G101 et G102 $\phi_{inter}=15°$;
- COHESION : Pour le chargement G101 $c_{inter}=0\,kPa$ et pour le chargement G102, $c_{inter}=200\,kPa$;
- CP_SERVICE : Avec une valeur élevée, afin de ne pas rencontrer le critère de capacité $V_{lim}=80\ 000\ kN$

7.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,s}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$U_{x,s}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,s}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,s}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_c$ où : $f_s(25+t_c)=F_x(25+t_c)+F_z(25+t_c)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y=0$
D'où :

$$t_c=25\frac{U_{z,max}K_{zz}\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Entre $t=25+t_c$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_s(t)=0=F_x(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$$
$$F_x(t)=-F_z(t)\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$d U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z} d\lambda_s(t)=\tan\left(\phi_{inter}\right) d\lambda_s(t)$$

$$d U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x} d\lambda_s(t)= d\lambda_s(t)$$

Ainsi :

$$\tan\left(\phi_{inter}\right) d U_{x,s}^{pl}(t)=d U_{z,s}^{pl}(t) \quad donc \quad \tan\left(\phi_{inter}\right) U_{x,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t) \quad donc \quad F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

On obtient t à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$ directement à l'aide de la formule du déplacement horizontal :

$$\left(\frac{t}{25}-1\right) U_{x,max}=U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right) U_{x,max}=U_{z,s}^{pl}(t)\left(\frac{1}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}+\frac{K_{zz}}{K_{xx}}\tan\left(\phi_{inter}\right)\right)+\frac{K_{zz}U_{z,max}\tan\left(\phi_{inter}\right)+c_{inter}L_xL_y}{K_{xx}}$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max},\ U_x(t)=\frac{75-t}{25}U_{x,max},$$

$$F_x(t)=F_x(50)+\left(\frac{50-t}{25}\right)U_{x,max}K_{xx},\ F_z(t)=F_z(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_d$ où : $f_s(50+t_d)=-F_x(50+t_d)+F_z(50+t_d)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y=0$

D'où :

$$t_d=25\frac{F_x(50)-F_z(50)\tan\left(\phi_{inter}\right)+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Entre $t=50+t_d$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_s(t)=0=-F_x(t)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$$

$$F_x(t)=+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$d U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z} d\lambda_s(t)=\tan\left(\phi_{inter}\right) d\lambda_s(t)$$

$$d U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x} d\lambda_s(t)=- d\lambda_s(t)$$

Ainsi :

$$-\tan\left(\phi_{inter}\right) d U_{x,s}^{pl}(t)=d U_{z,s}^{pl}(t) \quad donc \quad \tan\left(\phi_{inter}\right)\left(U_{x,s}^{pl}(50)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)=U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(50)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t) \quad donc \quad F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

On obtient t à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$ directement à l'aide de la formule du déplacement horizontal :

$$\frac{75-t}{25}U_{x,max}=U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U_{x,s}^{pl}(50)-\frac{U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(50)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{75-t}{25}U_{x,max} = -\left(\frac{K_{zz}\tan(\phi_i)}{K_{xx}}+\frac{1}{\tan(\phi_i)}\right)U_{z,s}^{pl}(t)-\frac{K_{zz}U_{z,max}\tan(\phi_i)+c_i L_x L_y}{K_{xx}} + U_{x,s}^{pl}(50)+\frac{U_{z,s}^{pl}(50)}{\tan(\phi_i)}$$

Entre $t=75$ et $t=100$, on ne considère pas le critère de capacité portante, on est toujours en plasticité

$$U_x(t)=0, \quad U_z(t)=\frac{-100-t}{25}U_{z,max}, \quad et \ f_s(t)=0=-F_x(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_x L_y$$

En écrivant la condition d'écoulement associé, on a :

$$\tan(\phi_{inter})\left(U_{x,s}^{pl}(75)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)=U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(75)$$

Or avec le déplacement horizontal constant :

$$U_x(t)=0=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U_{x,s}^{pl}(t) \ \ donc \quad F_x(t)=-K_{xx}U_{x,s}^{pl}(t)$$

On obtient t à partir de $U_{x,s}^{pl}(t)$ directement à l'aide de la formule du déplacement vertical :

$$\frac{-100-t}{25}U_{z,max}=U_z(t)=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+\tan(\phi_{inter})\left(U_{x,s}^{pl}(75)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)+U_{z,s}^{pl}(75)$$

$$\frac{-100-t}{25}U_{z,max}=-\left(\frac{K_{xx}}{K_{zz}\tan(\phi_i)}+\tan(\phi_i)\right)U_{x,s}^{pl}(t)+\frac{c_i L_x L_y}{K_{zz}\tan(\phi_i)}+\tan(\phi_i)U_{x,s}^{pl}(75)+U_{z,s}^{pl}(75)$$

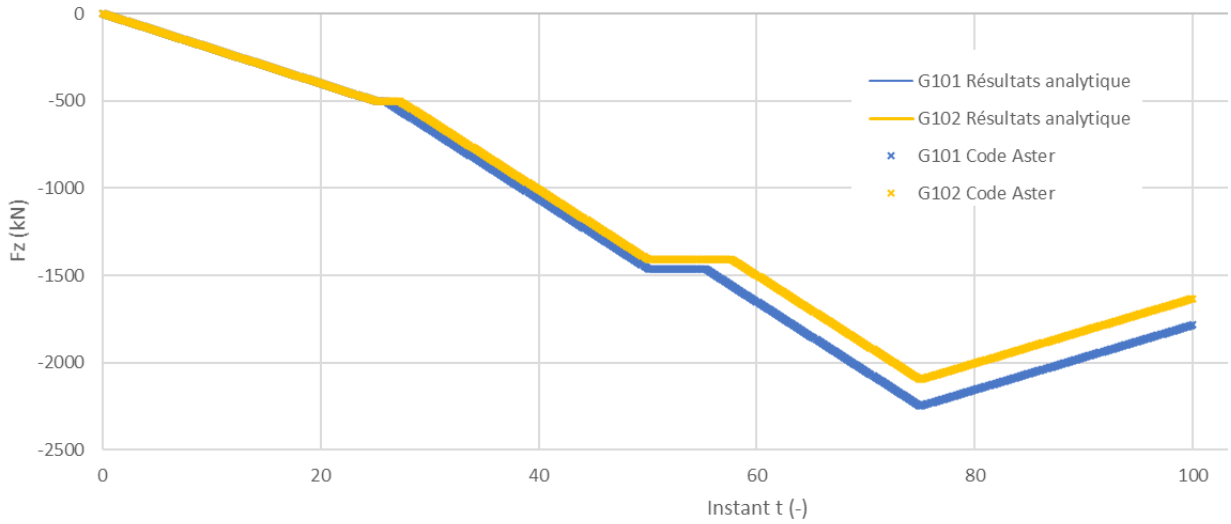
7.1.4 Grandeurs testées et résultats

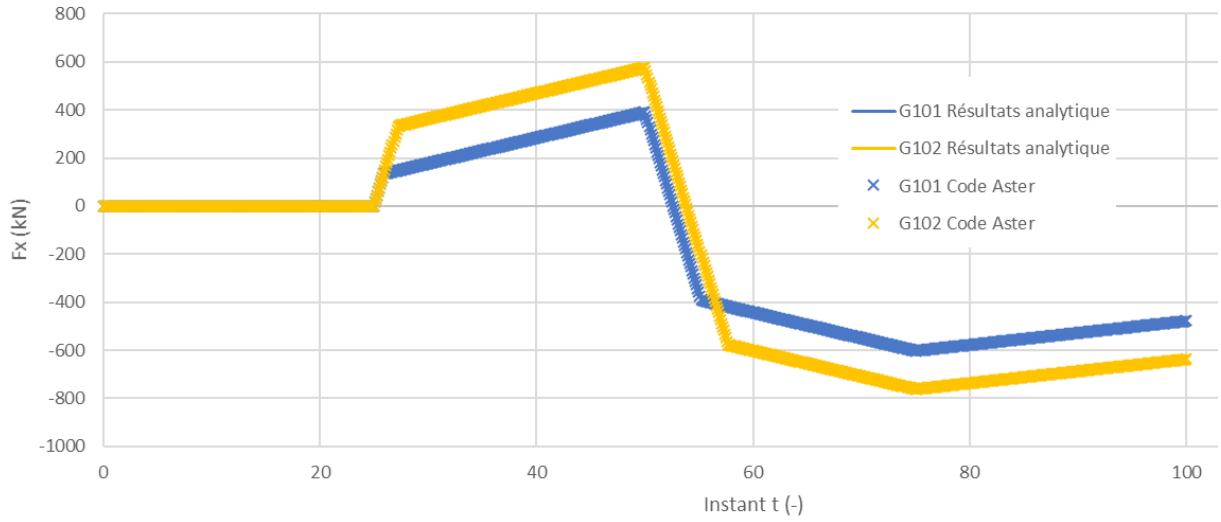
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	G101	-1459.986315	1.0 %
N	75	G101	-602.3033791	0.1 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	100	G101	0.022292432	1.0 %
V1 ($U_{x,CP}^{pl}$)	50	G101	0.044783971	1.0 %
VZ	75	G102	-2096.092212	0.1 %
N	100	G102	-637.2019611	0.01 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	50	G102	0.01133613	0.1 %
V19 ($v_{x,CP}^{pl}$)	75	G102	0.074458715	0.01 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les chargements donnés, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendues :





Les courbes correspondent parfaitement car le critère de glissement est linéaire et donc le code Aster (fonctionnant de manière incrémental) et le calcul analytique donne les mêmes résultats. Les erreurs sont apportées par l'écrouissage cinématique qui n'est pas ici modélisé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Modélisation e : Gseul_Qciné_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de glissement avec écrouissage selon 1 série de chargement:

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (GC101 et GC102)

8.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 deux chargements U_z et deux chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les trois chargements, $U_{x,max}=5\ cm$ et $U_{z,max}=6{,}25\ mm$.

8.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour les chargements GC101 et GC102 $\phi_{inter}=15°$, pour le chargement GC103 $\phi_{inter}=0°$;
- COHESION : Pour le chargement GC101 $c_{inter}=0\,kPa$ et pour les chargements GC102 et GC103, $c_{inter}=200\,kPa$;
- CP_SERVICE : Avec une valeur élevée, afin de ne pas rencontrer le critère de capacité $V_{lim}=80\ 000\ kN$
- RAID_GLIS : Pour tous les chargements $H_h=20\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour tous les chargements $\gamma=50\ m^{-1}$;

8.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,s}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$

$$U_{x,s}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0\quad et\ q_{h_x}=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,s}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz}$$

$$U_{x,s}^{pl}(t)=0,\ U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\ F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx},\ q_{h_x}(t)=0$$

Jusqu'à $t=25+t_c$ où : $f_s(25+t_c)=F_x(25+t_c)+F_z(25+t_c)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y=0$

D'où :

$$t_c=25\frac{U_{z,max}K_{zz}\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Entre $t=25+t_c$ et $t=50$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_s(t)=0=(F_x(t)-q_{h_x}(t))+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F_x(t)=q_{h_x}(t)-F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)+c_{inter}L_xL_y$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z}d\lambda_s(t)=\tan\left(\phi_{inter}\right)d\lambda_s(t)$$

$$dU_{x,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x}d\lambda_s(t)=\ d\lambda_s(t)$$

Ainsi :

$$\tan\left(\phi_{inter}\right)dU_{x,s}^{pl}(t)=dU_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ \tan\left(\phi_{inter}\right)U_{x,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ \ F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

En écrivant la condition sur l'écrouissage :

$$dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(t)\right)dU_{x,s}^{pl}(t)\ \ car\ \ U_{x,s}^{pl}(t)>0$$

Donc :

$$q_{h_x}(t)=\frac{H_h}{\gamma}\left(1-\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)=\frac{H_h}{\gamma}\left(1-\exp\left(\frac{-\gamma U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}\right)\right)$$

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ \ F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

On obtient t à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$ directement à l'aide de la formule du déplacement horizontal :

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{q_{h_x}(t)-F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)+c_{inter}L_xL_y}{K_{xx}}+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=\frac{H_h}{\gamma K_{xx}}\left(1-\exp\left(\frac{-\gamma U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_i\right)}\right)\right)+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_i\right)}+\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)\tan\left(\phi_i\right)+c_iL_xL_y}{K_{xx}}$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le critère :

$$U_z(t)=-U_{z,max},\ U_x(t)=\frac{75-t}{25}U_{x,max},$$

$$F_x(t)=F_x(50)+\left(\frac{50-t}{25}\right)U_{x,max}K_{xx},\ F_z(t)=F_z(50),\ q_{h_x}(t)=q_{h_x}(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_d$ où : $f_s(50+t_d)=-\left(F_x(50+t_d)-q_{h_x}(50+t_d)+F_z(50+t_d)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y=0\right.$

D'où :

$$t_d=25\frac{\left(F_x(50)-q_{h_x}(50)\right)-F_z(50)\tan\left(\phi_{inter}\right)+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=50+t_d$ et $t=75$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_s(t)=0=-\left(F_x(t)-q_{h_x}(t)\right)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$$

$$F_x(t)=q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z}d\lambda_s(t)=\tan\left(\phi_{inter}\right)d\lambda_s(t)$$

$$dU_{x,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x}d\lambda_s(t)=-\ d\lambda_s(t)$$

Ainsi :

$$-\tan\left(\phi_{inter}\right)dU_{x,s}^{pl}(t)=dU_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ \tan\left(\phi_{inter}\right)\left(U_{x,s}^{pl}(50)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)=U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(50)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\quad F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

En écrivant l'écrouissage :

$$dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma\left(\left(U_{x,s}^{pl}(50)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)+U_{x,s}^{pl}(50)\right)\right)dU_{x,s}^{pl}(t)\ \ car\ \ U_{x,s}^{pl}(t)\,décroissant\,après\ \ t=50$$

$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(50)=\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(50)\right)\left(\exp\left(-\gamma\left(U_{x,s}^{pl}(50)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)-1\right)$$

On obtient ensuite $F_x(t)=q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$;

On peut ensuite en déduire la valeur de t

Entre $t=75$ et $t=100$, on ne considère pas le critère de capacité portante, on est toujours en plasticité

$$U_x(t)=0,\ \ U_z(t)=\frac{-100-t}{25}U_{z,max}$$

$$f_s(t)=0=-\left(F_x(t)-q_{h_x}(t)\right)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$$

En écrivant la condition d'écoulement associé, on a :

$$\tan\left(\phi_{inter}\right)\left(U_{x,s}^{pl}(75)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)=U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(75)$$

Or avec le déplacement horizontal constant :

$$U_x(t)=0=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U_{x,s}^{pl}(t)\ \ donc\quad F_x(t)=-K_{xx}U_{x,s}^{pl}(t)$$

En écrivant l'écrouissage :

$$dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma\left(\left(U_{x,s}^{pl}(75)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)+U_{x,s}^{pl}(75)\right)\right)dU_{x,s}^{pl}(t)\ \ car\ \ U_{x,s}^{pl}(t)\,décroissant\,après\ \ t=75$$

$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(75)=\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(75)\right)\left(\exp\left(-\gamma\left(U_{x,s}^{pl}(75)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)-1\right)$$

On peut en déduire la valeur de $F_z(t)=\frac{\left(\left(F_x(t)-q_{h_x}(t)\right)+c_{inter}L_xL_y\right)}{\tan\ \phi_{inter}}$ et en déduire la valeur de t

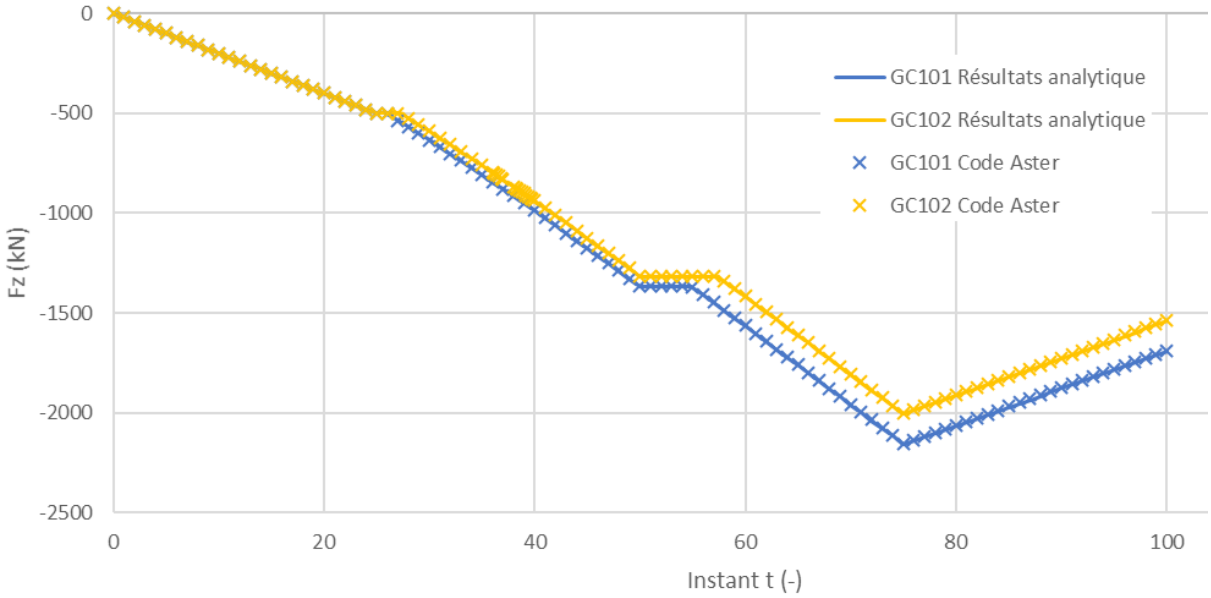
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8.1.4 Grandeurs testées et résultats

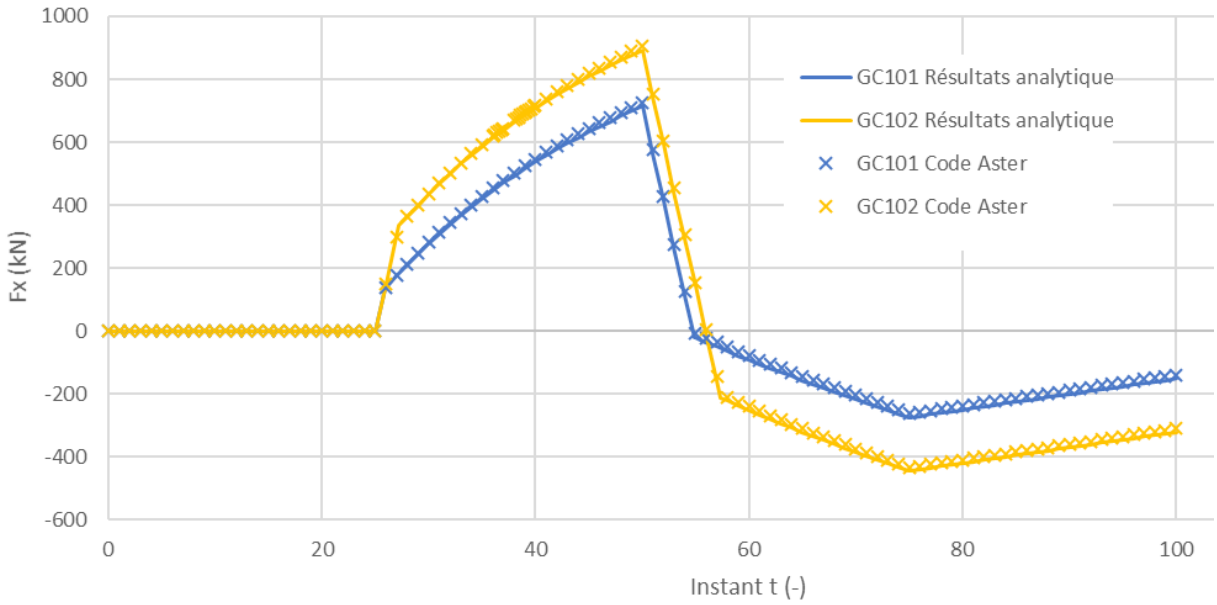
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	GC101	-1367.82155	1.0 %
N	75	GC101	-275.2508436	5.0 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	75	GC101	0.02071216	1.0 %
V1 ($U^{pl}_{x,s}$)	50	GC101	0.040484426	1.0 %
V11 (q_{h_x})	100	GC101	302.043879	5.0 %
VZ	75	GC102	-2005.924922	0.5 %
N	100	GC102	-321.1040395	5.0 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	100	GC102	0.019265528	0.5 %
V19 ($v^{pl}_{x,s}$)	75	GC102	0.070252354	1.0 %
V11 (q_{h_x})	50	GC102	340.4431314	5.0 %

8.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



L'équation de l'écrouissage cinématique relie de manière non linéaire déplacement plastique et écrouissage cinématique. On observe ainsi une différence entre Code aster qui résout de manière incrémentale le système et la solution analytique exacte. Néanmoins, les évolutions des forces sont très semblables.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Modélisation f : CppuisG_Plas_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de capacité portante puis critère de glissement selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (PG101, PG102 et PG103) ;

9.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	- $U_{z,max}$	- $U_{z,max}$	- $U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements PG101 et PG102, $U_{x,max}=2{,}5\ cm$ et $U_{z,max}=7{,}5\ mm$.
Pour PG103, $U_{x,max}=1{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=1{,}25\ mm$.

9.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour les chargements PG101 et PG102 $\phi_{inter}=10°$, pour PG103 $\phi_{inter}=0$;
- COHESION : Pour le chargement PG101 $c_{inter}=0\,kPa$, pour le chargement PG102 $c_{inter}=10\,kPa$ et pour PG103, $c_{inter}=70\,kPa$;

9.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{CP}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_{CP}$ où : $f_{cp}(25+t_{CP})=-F_z(25+t_{CP})-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_{CP})}{F_z(25+t_{CP})}\right)^3=0$

D'où :

$$t_{CP}=\frac{25U_{z,max}K_{zz}}{U_{x,max}K_{xx}}\left(1-\left(\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=25+t_{CP}$ et $t=25+t_S$, on est en plasticité sur le critère de capacité portante avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad et \quad \left(\frac{-F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\ d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient alors $U^{pl}_{x,CP}(t)$ directement fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)=\begin{cases}U^{pl}_{x,CP}(25+t_{charge})\\ \frac{-9}{8}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)^{\frac{2}{3}}-\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(25+t_{charge})\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\ -\frac{27}{16}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(25+t_{charge})\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\ -\frac{81V_{lim}}{64K_{zz}}\ln\left(\frac{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(25+t_{charge})\right)\right)^{\frac{1}{3}}}\right)\end{cases}$$

On peut ainsi tout exprimer à partir de $U^{pl}_{z,CP}$:

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)\ et\ F_x(t)=-F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

On retrouve la valeur de t, en écrivant la définition du déplacement

$$U_x(t)=U^{élas}_x(t)+U^{pl}_{x,CP}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)=\frac{1}{U_{x,max}}\left(\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t)\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces formules sont valables jusqu'à $t=25+t_S$ où : $f_S=F_x(25+t_s)+F_z(25+t_s)\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y$

Dans ce cas entre $t=25+t_S$ et $t=50$, deux solutions sont possibles :

- Soit on change de critère de rupture, dans ce cas, seul l'écoulement lié au critère de glissement s'applique : $f_s(t)=0=F_x(t)+F_z(t)\tan\phi_{inter}-c_{inter}L_xL_y$
  - Avec les écoulements :
    $$dU^{pl}_{z,S}(t)=\frac{\partial f_S}{\partial F_z}d\lambda_S(t)=\tan\phi_{inter}d\lambda_S \quad et \quad dU^{pl}_{x,S}(t)=d\lambda_S$$
    $$donc \quad U^{pl}_{z,S}(t)-U^{pl}_{z,S}(25+t_s)=\tan\phi_{inter}\left(U^{pl}_{x,S}(t)-U^{pl}_{x,S}(25+t_s)\right)$$
  - A partir du déplacement vertical constant, on retrouve $F_z(t)$ puis à partir de $f_s(t)=0$ on déduit la force horizontale $F_x(t)$;
  - On vérifie que le critère de portance n'est plus dépassé : $f_{CP}(t)<0$ et on en déduit t ;
  - On applique ce mécanisme jusqu'à être en double critère
- Soit on est en double critère ce qui implique que : $f_s(t)=0$ et $f_{CP}(t)=0$
  - $F_x(t)$ et $F_z(t)$ restent alors constant à : $F_{x,CP,S}$ et $F_{z,CP,S}$
  - On écrit alors les écoulements :
    - En capacité portante :
      $$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}}{F_{z,CP,S}}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP}$$
      $$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{-V_{lim}}{F_{z,CP,S}}\right)^{\frac{1}{3}}d\lambda_{CP}$$
    - En glissement : $dU^{pl}_{z,S}(t)=\frac{\partial f_S}{\partial F_z}d\lambda_S(t)=\tan\phi_{inter}d\lambda_S \quad et \quad dU^{pl}_{x,S}(t)=d\lambda_S$
    - Tel que : $\begin{cases} dU_z(t)=0=dU^{pl}_{z,CP}(t)+dU^{pl}_{z,S}(t) \\ dU_x(t)=\frac{U_{x,max}}{25}dt=dU^{pl}_{x,CP}(t)+dU^{pl}_{x,S}(t) \end{cases}$
    - Ainsi on obtient : $\begin{cases} \frac{d\lambda_{CP}}{dt}=\frac{U_{x,max}}{25}\frac{\tan\phi_{inter}}{4-3(1-\tan\phi_{inter})\left(\frac{-V_{lim}}{F_{z,CP,S}}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ \frac{d\lambda_S}{dt}=\frac{U_{x,max}}{25}\frac{3\left(\frac{-V_{lim}}{F_{z,CP,S}}\right)^{\frac{1}{3}}-4}{\left(3\left(\frac{-V_{lim}}{F_{z,CP,S}}\right)^{\frac{1}{3}}(1-\tan\phi_{inter})-4\right)} \end{cases}$

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en déchargement élastique jusqu'à atteindre le double critère. Par symétrie, si on atteint le double critère au déchargement, on l'atteint directement en déchargement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ainsi on est en double critère :

- $F_x(t)$ et $F_z(t)$ restent alors constant à $F_{x,CP,S}$ et $F_{z,CP,S}$
- On écrit alors les écoulements :
  - En capacité portante :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}}{F_{z,CP,S}}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP}$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=-3\left(\frac{-V_{lim}}{F_{z,CP,S}}\right)^{\frac{1}{3}}d\lambda_{CP}$$

  - En glissement : $dU^{pl}_{z,S}(t)=\frac{\partial f_S}{\partial F_z}d\lambda_S(t)=\tan\phi_{inter}d\lambda_S \quad et \quad dU^{pl}_{x,S}(t)=-d\lambda_S$
  - Tel que : $\begin{cases} dU_z(t)=0=dU^{pl}_{z,CP}(t)+dU^{pl}_{z,S}(t) \\ dU_x(t)=\frac{-U_{x,max}}{25}dt=dU^{pl}_{x,CP}(t)+dU^{pl}_{x,S}(t) \end{cases}$

On écrit alors les deux écoulement plastiques :

- En capacité portante :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1-\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3 donc \left(1-\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}} et \left(\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

  En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP}$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=-3\left(\frac{V_{lim}}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}d\lambda_{CP}$$

- En glissement :
  $f_s(t)=0=-F_x(t)+F_z(t)\tan\phi_{inter}-c_{inter}L_xL_y \quad donc \quad F_x(t)=F_z(t)\tan\phi_{inter}-c_{inter}L_xL_y$
  En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU^{pl}_{z,S}(t)=\frac{\partial f_S}{\partial F_z}d\lambda_S(t)=\tan\phi_{inter}d\lambda_S \quad et \quad dU^{pl}_{x,S}(t)=-d\lambda_S$$

Entre t=75 et t=100, on ne décharge plus que sur un critère, il faut alors se reporter au §3.2.2.3 dans le cas d'un déchargement sur le critère de capacité portante (PG103) ou au §3.5.1.3 dans le cas d'un déchargement sur le critère de glissement.

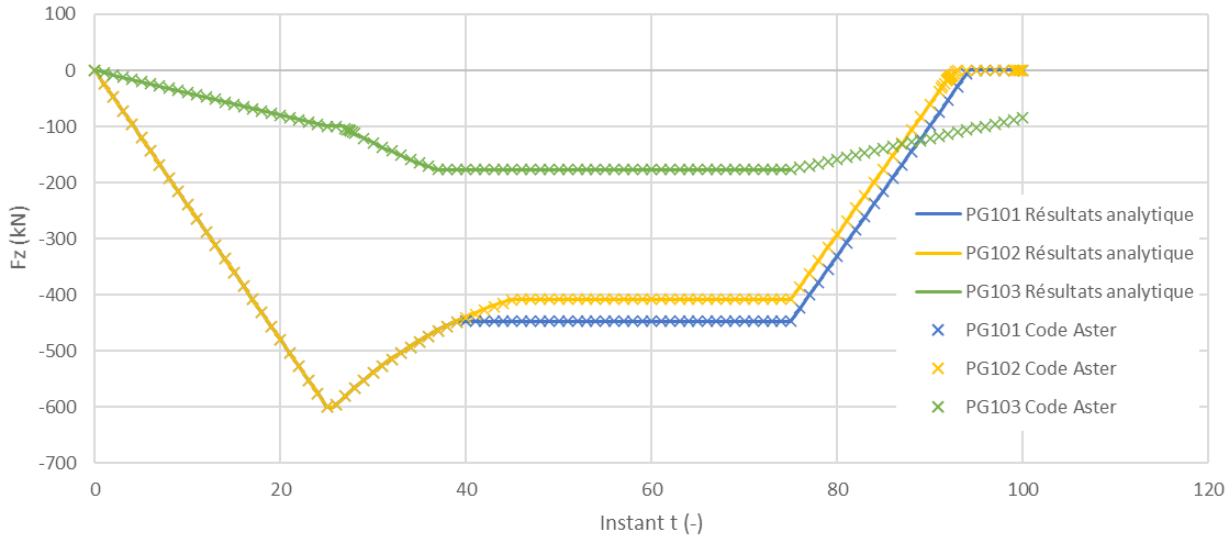
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9.1.4 Grandeurs testées et résultats

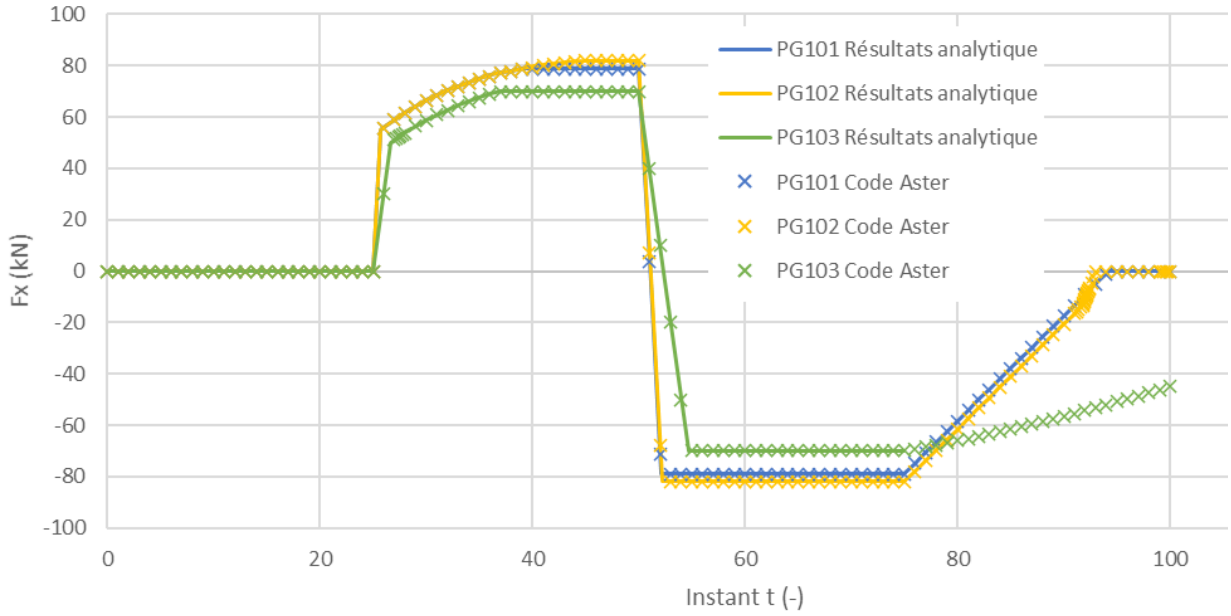
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	100	PG101	0.0 analytique	0.001 %
N	75	PG101	-78.82668785 analytique	0.001 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	75	PG101	0.002148657	2.0 %
V6 ($U^{pl}_{x,CP}$)	50	PG101	0.019955725	1.0 %
VZ	75	PG102	-408.3480659 analytique	0.001 %
N	50	PG102	82.00278154 analytique	0.001 %
V1 ($U^{pl}_{x,s}$)	50	PG102	0.001394662	15.0 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PG102	-0.00373206	1.0 %
VZ	50	PG103	-177.276884 analytique	0.001 %
N	75	PG103	-70 analytique	0.001 %
V19 ($v^{pl}_{x,s}$)	75	PG103	0.01337514	1.0 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	50	PG103	0.000965961 analytique	0.001 %

9.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



La seule source d'écart entre la solution analytique et le calcul code aster est le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Modélisation g : CppuisG_QCPiso_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de capacité portante puis critère de glissement avec écrouissage isotrope selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (PIG101, PIG102 et PIG103) ;

10.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements PIG101 et PIG102, $U_{x,max}=3{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=7{,}5\ mm$.
Pour PIG103, $U_{x,max}=3{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=1{,}25\ mm$.

10.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour les chargements PIG101 et PIG102 $\phi_{inter}=10°$, pour PIG103 $\phi_{inter}=0$;
- COHESION : Pour le chargement PIG101 $c_{inter}=0\,kPa$, pour le chargement PIG102 $c_{inter}=10\,kPa$ et pour PIG103, $c_{inter}=70\,kPa$;
- CP_ULTIME : Pour tous les chargements, $V_{ult}=1700\ kN$;
- DEPL_REFE : Pour tous les chargements, $v_{pl,r}^{CP}=1\ cm$;

10.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{charge}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx},\quad R=0$$

Jusqu'à $t=25+t_c$ où : $f_{cp}(25+t_c)=-F_z(25+t_c)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_c)}{F_z(25+t_c)}\right)^3=0$

D'où :

$$t_c=\frac{25\,U_{z,max}K_{zz}}{U_{x,max}K_{xx}}\left(1-\left(\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=25+t_c$ et $t=25+t_s$, on est en plasticité en capacité portante avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-(V_{lim}+R)\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}} \quad et \left(\frac{-F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\ d\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t) \quad et \quad R(t)=\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|}{\left|U_{z,CP}^{pl}(t)\right|+v_{pl,r}^{CP}}$$

On obtient alors $U_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}+\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left(U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{\left(U_{z,CP}^{pl}(t)\right)+v_{pl,r}^{CP}}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée jusqu'à $t=25+t_s$ où $f_s(25+t_s)=0=F_x(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$.

Dans ce cas entre $t=25+t_S$ et $t=50$, on est en double critère ce qui implique que :

- $f_s(t)=0$ et $f_{CP}(t)=0$;
- On obtient une relation entre $F_z(t)$, $F_x(t)$ et $R(t)$.
- En imposant $F_z(t)$, on obtient $R(t)$ et $F_x(t)$ donc $U_{z,CP}^{pl}(t)$, on peut donc obtenir $U_{z,s}^{pl}(t)$ car le déplacement vertical est constant
- On peut obtenir $U_{x,CP}^{pl}(t)$ par résolution pas à pas de la relation :

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

- On connaît aussi $F_x(t)$, et on peut obtenir à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$, $U_{x,s}^{pl}(t)$ car $\tan(\phi_{inter})dU_{x,s}^{pl}(t)=dU_{z,s}^{pl}(t)$
- Ainsi on peut obtenir la valeur de t.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le double critère (par symétrie du critère). Ensuite entre $t=50+t_d$ et $t=75$, on est en double critère :

- $f_s(t)=0$ et $f_{CP}(t)=0$;
- On obtient une relation entre $F_z(t)$, $F_x(t)$ et $R(t)$.
- En imposant $F_z(t)$, on obtient $R(t)$ et $F_x(t)$ donc $U^{pl}_{z,CP}(t)$, on peut donc obtenir $U^{pl}_{z,s}(t)$ car le déplacement vertical est constant
- On peut obtenir $U^{pl}_{x,CP}(t)$ par résolution pas à pas de la relation :

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

- On connaît aussi $F_x(t)$, et on peut obtenir à partir de $U^{pl}_{z,s}(t)$, $U^{pl}_{x,s}(t)$ car $-\tan(\phi_{inter})dU^{pl}_{x,s}(t)=dU^{pl}_{z,s}(t)$
- Ainsi on peut obtenir la valeur de t.

Entre $t=75$ et $t=100$, on est soit en déchargement sur le critère de glissement (se reporter alors au §3.5.1.3) ou en critère de capacité portante (cf §.3.4.2.3).

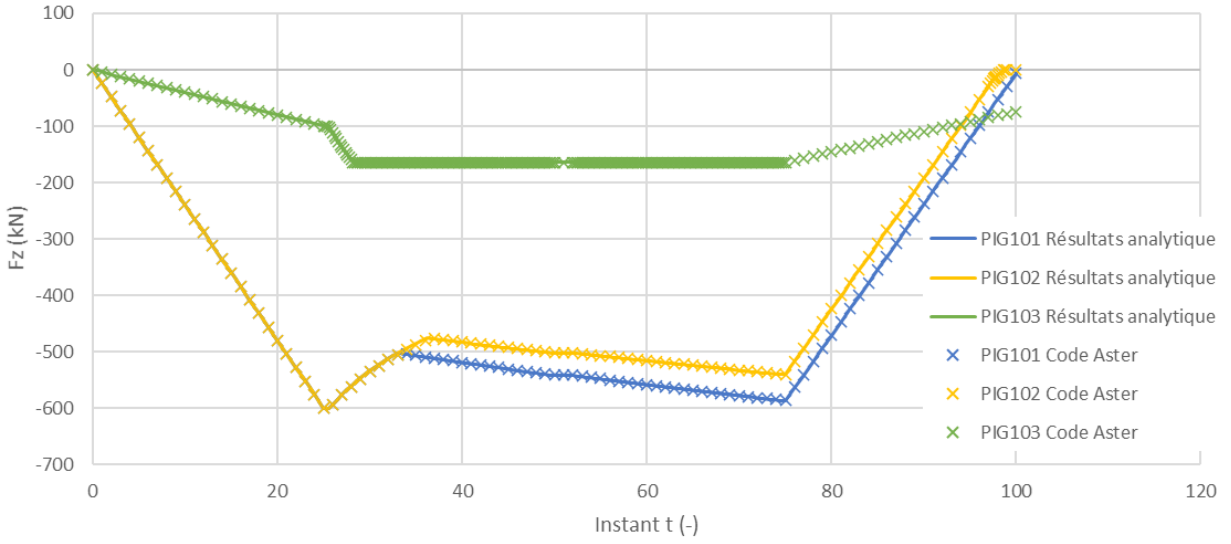
10.1.4 Grandeurs testées et résultats

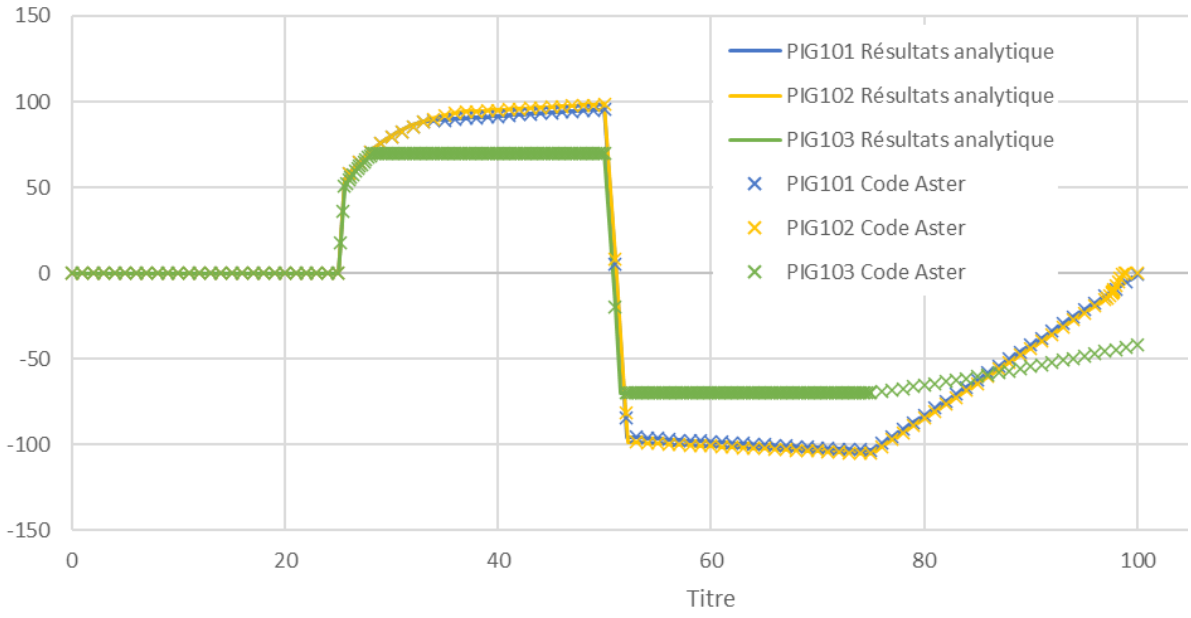
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	75	PIG101	-586.971836	0.1 %
N	75	PIG101	-103.4989717	0.2 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	75	PIG101	0.003691726	1.0 %
V6 ($U^{pl}_{x,CP}$)	50	PIG101	0.019615593	1.0 %
V15 (R)	100	PIG101	250.3952356	1.0 %
VZ	75	PIG102	-540.702185	0.5 %
N	50	PIG102	98.5824622	1.0 %
V1 ($U^{pl}_{x,s}$)	50	PIG102	0.00604494	5.0 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PIG102	-0.003550409	1.0 %
V15 (R)	50	PIG102	167.4699104	1.0 %
VZ	50	PIG103	-164.5741021 analytique	0.001 %
N	75	PIG103	-70 analytique	0.001 %
V19 ($v^{pl}_{x,s}$)	75	PIG103	0.054288491	0.1 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	50	PIG103	0.000807176 analytique	0.001 %
V15 (R)	75	PIG103	67.22002397 analytique	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





La seule source d'écart entre la solution analytique et le calcul code aster est le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement). Comme l'écrouissage isotrope est calculé de manière exacte sur Aster (comme le calcul analytique), il n'apporte pas d'erreur supplémentaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Modélisation h : CppuisG_QG_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de capacité portante puis critère de glissement avec écrouissage sur le glissement selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (PGC101 et PGC102) ;

11.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 deux chargements U_z et deux chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour tous les chargements PGC101 et PGC102, $U_{x,max}=5{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=9{,}0\ mm$.

11.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements PGC101 et PGC102 $\phi_{inter}=5°$;
- COHESION : Pour le chargement PGC101 $c_{inter}=0\,kPa$, pour le chargement PGC102 $c_{inter}=10\,kPa$;
- RAID_GLIS : Pour tous les chargements, $H_h=20\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour tous les chargements, $\gamma=50\ m^{-1}$;

11.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\qquad U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t)$$

$$F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$

$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\qquad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_{CP}$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\qquad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz}$$

$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\qquad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_{CP}$ où : $f_{cp}(25+t_{CP})=-F_z(25+t_{CP})-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_{CP})}{F_z(25+t_{CP})}\right)^3=0$

D'où :

$$t_{CP}=\frac{25U_{z,max}K_{zz}}{U_{x,max}K_{xx}}\left(1-\left(\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=25+t_{CP}$ et $t=25+t_S$, on est en plasticité sur le critère de capacité portante avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad et \quad \left(\frac{-F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$d\,U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\,\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\,d\,\lambda_{CP}(t)$$

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\,\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{V_{lim}}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\,d\,\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient alors $U_{x,CP}^{pl}(t)$ directement fonction de $U_{z,CP}^{pl}(t)$:

$$d\,U_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$U_{x,CP}^{pl}(t)=\begin{cases}U_{x,CP}^{pl}\left(25+t_{charge}\right)\\ -\frac{9}{8}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)^{\frac{2}{3}}-\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}\left(25+t_{charge}\right)\right)^{\frac{2}{3}}\right)\\ -\frac{27}{16}\left(\frac{V_{lim}}{K_{zz}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)^{\frac{1}{3}}-\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}\left(25+t_{charge}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\ -\frac{81V_{lim}}{64K_{zz}}\ln\left(\frac{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}{3\left(V_{lim}\right)^{\frac{1}{3}}-4\left(K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}\left(25+t_{charge}\right)\right)\right)^{\frac{1}{3}}}\right)\end{cases}$$

On peut ainsi tout exprimer à partir de $U_{z,CP}^{pl}$:

$$F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,CP}^{pl}(t)\right)\ et\ F_x(t)=-F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

On retrouve la valeur de t, en écrivant la définition du déplacement

$$U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,CP}^{pl}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)=\frac{1}{U_{x,max}}\left(\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U_{x,CP}^{pl}(t)\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces formules sont valables jusqu'à $t=25+t_S$ où : $f_S=F_x(25+t_s)+F_z(25+t_s)\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y$
Dans ce cas entre $t=25+t_S$ et $t=50$, on est en double critère ce qui implique que :

- $f_s(t)=0$ et $f_{CP}(t)=0$;
- On obtient une relation entre $F_z(t)$, $F_x(t)$ et $q_{h_x}(t)$, en imposant $F_z(t)$, on obtient $q_{h_x}(t)$ et $F_x(t)$;
- A partir de la relation d'écrouissage :
  $dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(t)\right)dU_{x,s}^{pl}(t)\ car\ U_{x,s}^{pl}(t)>0$
  On peut obtenir la valeur de $U_{x,s}^{pl}(t)$ tel que :
  $$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(t_0)=\frac{H_h}{\gamma}\left(\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(t_0)\right)-\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)$$
- On peut en déduire $U_{z,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(t_0)+\tan(\phi_{inter})\left(U_{x,s}^{pl}(t)-U_{x,s}^{pl}(t_0)\right)$ donc on obtient $U_{z,CP}^{pl}(t)$, on peut donc obtenir $U_{z,s}^{pl}(t)$ car le déplacement vertical est constant
- On peut obtenir $U_{x,CP}^{pl}(t)$ par résolution pas à pas de la relation :
  $$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$
- On connait aussi $F_x(t)$, on peut obtenir à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$, $U_{x,s}^{pl}(t)$ car $\tan(\phi_{inter})dU_{x,s}^{pl}(t)=dU_{z,s}^{pl}(t)$
- Ainsi on peut obtenir la valeur de t.

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le glissement seul :
$$f_s=-F_x(50+t_d)+q_{h_x}(50+t_d)+F_z(50+t_d)\tan\phi_{inter}-C_{inter}L_xL_y$$
Entre $t=50+t_d$ et $t=50+t_{dCP}$, on est en plasticité sur le critère de glissement avec écrouissage cinématique :
$$f_s(t)=0=-\left(F_x(t)-q_{h_x}(t)\right)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$$
$$F_x(t)=q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$$
En écrivant la condition d'écoulement associé :
$$dU_{z,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z}d\lambda_s(t)=\tan(\phi_{inter})d\lambda_s(t)$$
$$dU_{x,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x}d\lambda_s(t)=-\,d\lambda_s(t)$$
Ainsi :
$$-\tan(\phi_{inter})dU_{x,s}^{pl}(t)=dU_{z,s}^{pl}(t)\ donc\ \tan(\phi_{inter})\left(U_{x,s}^{pl}(50)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)=U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(50)$$
Or avec le déplacement vertical constant :
$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t)$$
donc $F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)+U_{z,CP}^{pl}(50)\right)$

En écrivant l'écrouissage :
$$dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma\left(\left|U_{x,s}^{pl}(50)-U_{x,s}^{pl}(t)\right|+U_{x,s}^{pl}(50)\right)\right)dU_{x,s}^{pl}(t)\ car\ U_{x,s}^{pl}(t)\ décroissant\ après\ t=50$$
$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(50)=\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma U_{x,s}^{pl}(50)\right)\left(\exp\left(-\gamma\left(U_{x,s}^{pl}(50)-U_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)-1\right)$$
On obtient ensuite $F_x(t)=q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$, on peut donc en déduire t.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces formules sont valables jusqu'à $t=50+t_{dCP}$ où on rentre en double critère ce qui implique que :

- $f_s(t)=0$ et $f_{CP}(t)=0$;
- On obtient une relation entre $F_z(t)$, $F_x(t)$ et $q_{h_x}(t)$, en imposant $F_z(t)$, on obtient $q_{h_x}(t)$ et $F_x(t)$;
- A partir de la relation d'écrouissage :
  $dq_{h_x}(t)=-H_h\exp\left(-\gamma V_{x,s}^{pl}(t)\right)dV_{x,s}^{pl}(t)\ car\ où\ dV_{x,s}^{pl}(t)=\left|dU_{x,s}^{pl}(t)\right|$
  On peut obtenir la valeur de $U_{x,s}^{pl}(t)$ tel que :
  $$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(t_0)=\frac{-H_h}{\gamma}\left(\exp\left(-\gamma V_{x,s}^{pl}(t_0)\right)-\exp\left(-\gamma V_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)$$
- On peut en déduire $U_{z,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(t_0)+\tan\left(\phi_{inter}\right)\left(U_{x,s}^{pl}(t)-U_{x,s}^{pl}(t_0)\right)$ donc on obtient $U_{z,CP}^{pl}(t)$, on peut donc obtenir $U_{z,s}^{pl}(t)$ car le déplacement vertical est constant
- On peut obtenir $U_{x,CP}^{pl}(t)$ par résolution pas à pas de la relation :
  $$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$
  On connaît aussi $F_x(t)$, et on peut obtenir à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$, $U_{x,s}^{pl}(t)$ car $\tan\left(\phi_{inter}\right)dU_{x,s}^{pl}(t)=-dU_{z,s}^{pl}(t)$
- Ainsi on peut obtenir la valeur de t.

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

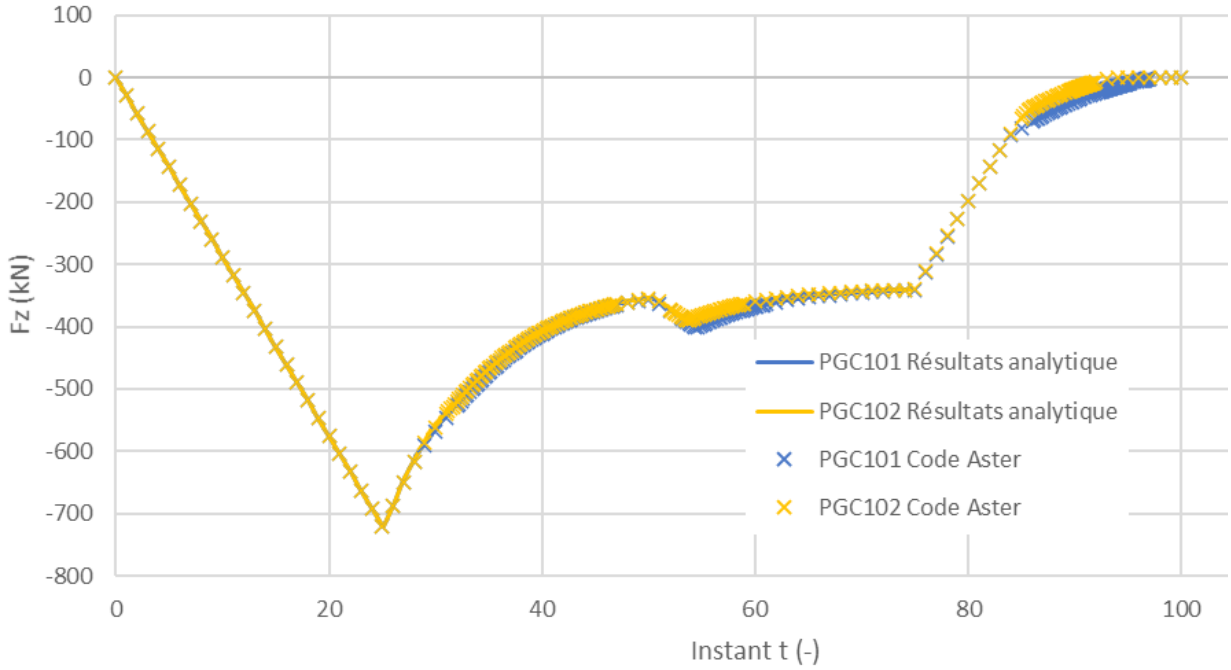
11.1.4 Grandeurs testées et résultats

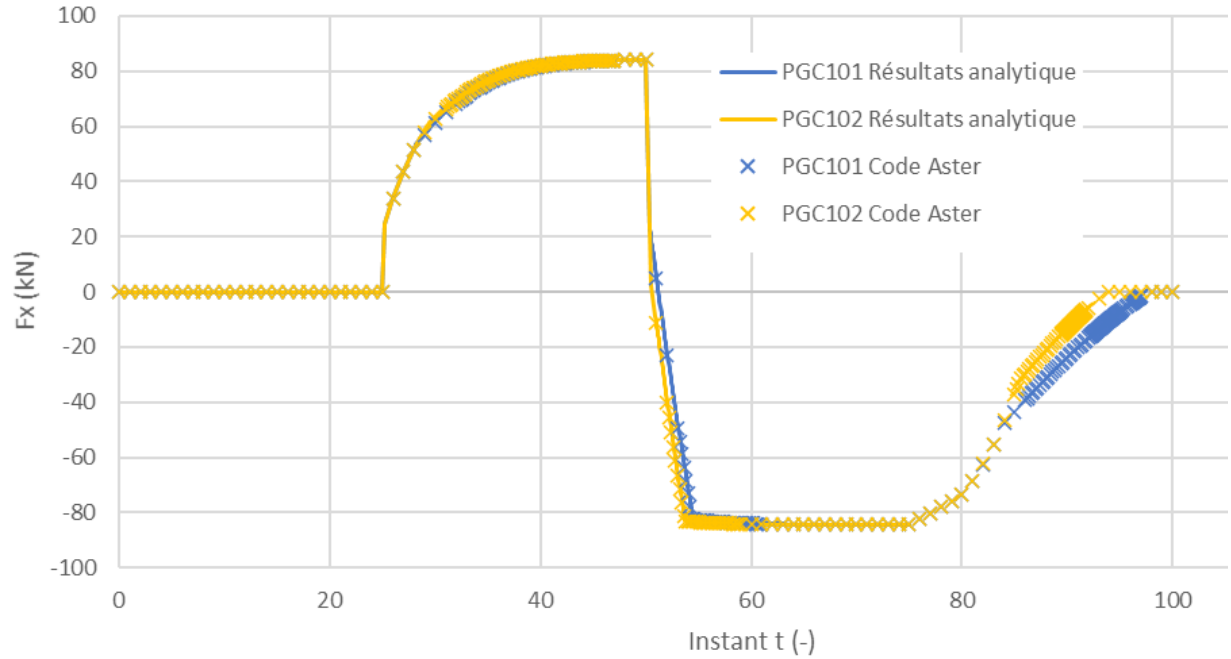
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	75	PGC101	-340.9489321	1.0 %
N	75	PGC101	-84.36913914	0.01 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	75	PGC101	0.000900969	5.0 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	50	PGC101	0.046021482	0.1 %
V11 (q_{h_x})	50	PGC101	53.21864516	1.0 %
VZ	75	PGC102	-339.8635744	0.5 %
N	50	PGC102	84.25034409	0.1 %
V1 ($U_{x,s}^{pl}$)	50	PGC102	0.002292829	1.0 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	PGC102	-0.005447817	1.0 %
V11 (q_{h_x})	50	PGC102	43.32567738	1.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





Les sources d'écart entre la solution et le calcul Code aster sont :

- Le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement).
- L'écrouissage qui est calculé de manière incrémentale sur Code Aster et non de manière exacte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Modélisation i : CppuisG_QGQCPiso_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de capacité portante avec écrouissage isotrope puis critère de glissement avec écrouissage selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (PIGC101, PIGC102 et PIGC103) ;

12.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements U_z et trois chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements PIGC101 et PIGC103, $U_{x,max}=6{,}2\ cm$ et $U_{x,max}=4{,}4\ cm$.
Pour PIGC102. Pour PIGC101 $U_{z,max}=9{,}0\ mm$ et $U_{z,max}=9{,}5\ mm$ pour PIGC102 et PIGC103.

12.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour les chargements PIGC101 et PIGC102 $\phi_{inter}=10°$, pour PIGC103 $\phi_{inter}=0$;
- COHESION : Pour le chargement PIGC101 $c_{inter}=0\,kPa$, pour le chargement PIGC102 $c_{inter}=20\,kPa$ et pour PIGC103, $c_{inter}=70\,kPa$;
- CP_ULTIME : Pour tous les chargements, $V_{ult}=1700\ kN$;
- DEPL_REFE : Pour tous les chargements, $v_{pl,r}^{CP}=1\ cm$;
- RAID_GLIS : Pour tous les chargements, $H_h=20\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour tous les chargements, $\gamma=50\ m^{-1}$;

12.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx},\quad R=0$$

Jusqu'à $t=25+t_c$ où : $f_{cp}(25+t_c)=-F_z(25+t_c)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_c)}{F_z(25+t_c)}\right)^3=0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'où :

$$t_c=\frac{25\,U_{z,max}K_{zz}}{U_{x,max}K_{xx}}\left(1-\left(\frac{U_{z,max}K_{zz}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Entre $t=25+t_c$ et $t=25+t_s$, on est en plasticité en capacité portante avec un écoulement plastique associé :

$$f_{cp}(t)=0=-F_z(t)-(V_{lim}+R)\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$\left(1+\frac{F_x(t)}{F_z(t)}\right)=\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}\ et\left(\frac{-F_x(t)}{F_z(t)}\right)=1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}$$

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$d\,U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\,\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\ d\,\lambda_{CP}(t)$$

$$d\,U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\,\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{-V_{lim}}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\ d\,\lambda_{CP}(t)$$

Ainsi :

$$d\,U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)\ \ et\ \ R(t)=\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}$$

On obtient alors $U^{pl}_{x,CP}(t)$ directement fonction de $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$d\,U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)\right)}{V_{lim}+\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{CP}_{pl,r}}}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Cette relation n'a pas de solution explicite, ainsi l'intégration de cette équation est faite de manière approchée jusqu'à $t=25+t_s$ où $f_s(25+t_s)=0=F_x(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$.

Dans ce cas entre $t=25+t_S$ et $t=50$, on est en double critère ce qui implique que :

- $f_s(t)=0$ et $f_{CP}(t)=0$;
- On impose $U^{pl}_{z,CP}(t)$, on obtient la valeur de $R(t)$ et de plus :

$$-U_{z,max}-U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,S}(t)$$

- On peut donc exprimer la valeur de

$$U^{pl}_{x,S}(t)=\frac{U^{pl}_{z,S}(t)}{\tan\phi_{inter}}=\frac{-U_{z,max}-U^{pl}_{z,CP}(t)-\left(F_z(t)\middle/K_{zz}\right)}{\tan\phi_{inter}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- ainsi : $$d\,q_{h_x}=d\left(\frac{-H_h}{\gamma}\exp\left(\frac{\gamma\left(U_{z,pl}(t)+\left(F_z(t)\middle/K_{zz}\right)\right)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}\right)\right)$$
- En écrivant la condition de glissement :
  $$f_s(t)=0=F_x(t)-q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)+C_{inter}L_xL_y$$
  $$d\,q_{h_x}=d\,F_x(t)+\tan\left(\phi_{inter}\right)d\,F_z(t)$$
  On obtient alors une formulation de $F_x(t)$ ne dépendant que de $F_z(t)$ et de $U_{z,pl}(t)$
  $$F_x(t)=F_x(t_0)-\frac{H_h}{\gamma}\left(e^{\left(\gamma\left(\frac{U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t)+\left(F_z(t)\middle/K_{zz}\right)}{\tan(\phi_{inter})}\right)\right)}-e^{\left(\gamma\left(\frac{U_{z,max}+U^{pl}_{z,CP}(t_0)+\left(F_z(t_0)\middle/K_{zz}\right)}{\tan(\phi_{inter})}\right)\right)}\right)-\tan\phi_i\left(F_z(t)-F_z(t_0)\right)$$
- On réinjecte cette formulation dans le critère de capacité portante afin de trouver la valeur de $F_z(t)$ telle que $f_{CP}(t)=0$
- On obtient ainsi $F_x(t)$ et $q_{h_x}(t)$ et on peut obtenir $U^{pl}_{x,CP}(t)$ par résolution pas à pas de la relation :
  $$d\,U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$
- Ainsi à partir de la valeur du déplacement, on peut obtenir la valeur de t.

Entre $t=50$ et $t=50+t_d$, on est en élasticité jusqu'à atteindre le glissement seul :
$$f_s=-F_x(50+t_d)+q_{h_x}(50+t_d)+F_z(50+t_d)\tan\phi_{inter}-C_{inter}L_xL_y$$
Entre $t=50+t_d$ et $t=50+t_{dCP}$, on est en plasticité sur le critère de glissement avec écrouissage cinématique :
$$f_s(t)=0=-\left(F_x(t)-q_{h_x}(t)\right)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$$
$$F_x(t)=q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$$
En écrivant la condition d'écoulement associé :
$$d\,U^{pl}_{z,s}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z}d\,\lambda_s(t)=\tan\left(\phi_{inter}\right)d\,\lambda_s(t)$$
$$d\,U^{pl}_{x,s}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x}d\,\lambda_s(t)=-\,d\,\lambda_s(t)$$
Ainsi :
$$-\tan\left(\phi_{inter}\right)d\,U^{pl}_{x,s}(t)=d\,U^{pl}_{z,s}(t)\;donc\;\tan\left(\phi_{inter}\right)\left(U^{pl}_{x,s}(50)-U^{pl}_{x,s}(t)\right)=U^{pl}_{z,s}(t)-U^{pl}_{z,s}(50)$$
Or avec le déplacement vertical constant :
$$U_z(t)=-U_{z,max}=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,s}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,s}(t)$$
donc $F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U^{pl}_{z,s}(t)+U^{pl}_{z,CP}(50)\right)$

En écrivant l'écrouissage :
$$d\,q_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma\left(\left|U^{pl}_{x,s}(50)-U^{pl}_{x,s}(t)\right|+U^{pl}_{x,s}(50)\right)\right)d\,U^{pl}_{x,s}(t)\;\;car\;\;U^{pl}_{x,s}(t)\,décroissant\,après\;\;t=50$$
$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(50)=\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma\,U^{pl}_{x,s}(50)\right)\left(\exp\left(-\gamma\left(U^{pl}_{x,s}(50)-U^{pl}_{x,s}(t)\right)\right)-1\right)$$
On obtient ensuite $F_x(t)=q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}L_xL_y$, on peut donc en déduire t.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ces formules sont valables jusqu'à $t=50+t_{dCP}$ où on rentre en double critère ce qui implique que :

- $f_s(t)=0$ et $f_{CP}(t)=0$;
- On impose $U^{pl}_{z,CP}(t)$, on obtient la valeur de $R(t)$ et de plus : $-U_{z,max}-U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,S}(t)$
- On peut donc exprimer la valeur de : $dU^{pl}_{x,S}(t)=\frac{-dU^{pl}_{z,S}(t)}{\tan\phi_{inter}}=d\left(\frac{U^{pl}_{z,CP}(t)+F_z(t)}{\tan\phi_{inter}}\right)$
- ainsi : $d\,q_{h_x}=d\left(\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma\left(v^{pl}_{x,sl}(50)-\frac{U^{pl}_{z,CP}(t)-U^{pl}_{z,CP}(50)}{\tan\phi_{inter}}-\frac{F_z(t)-F_z(50)}{K_{zz}\tan\phi_{inter}}\right)\right)\right)$
- En écrivant la condition de glissement : $f_s(t)=0=F_x(t)-q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})+C_{inter}L_xL_y$:
$$d\,q_{h_x}=d\,F_x(t)+\tan(\phi_{inter})\,d\,F_z(t)$$
On obtient alors une formulation de $F_x(t)$ ne dépendant que de $F_z(t)$ et de $U^{pl}_{z,CP}(t)$
-
- On réinjecte cette formulation dans le critère de capacité portante afin de trouver la valeur de $F_z(t)$ telle que $f_{CP}(t)=0$
- On obtient ainsi $F_x(t)$ et $q_{h_x}(t)$ et on peut obtenir $U^{pl}_{x,CP}(t)$ par résolution pas à pas de la relation :
$$d\,U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$
- Ainsi à partir de la valeur du déplacement, on peut obtenir la valeur de t.

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

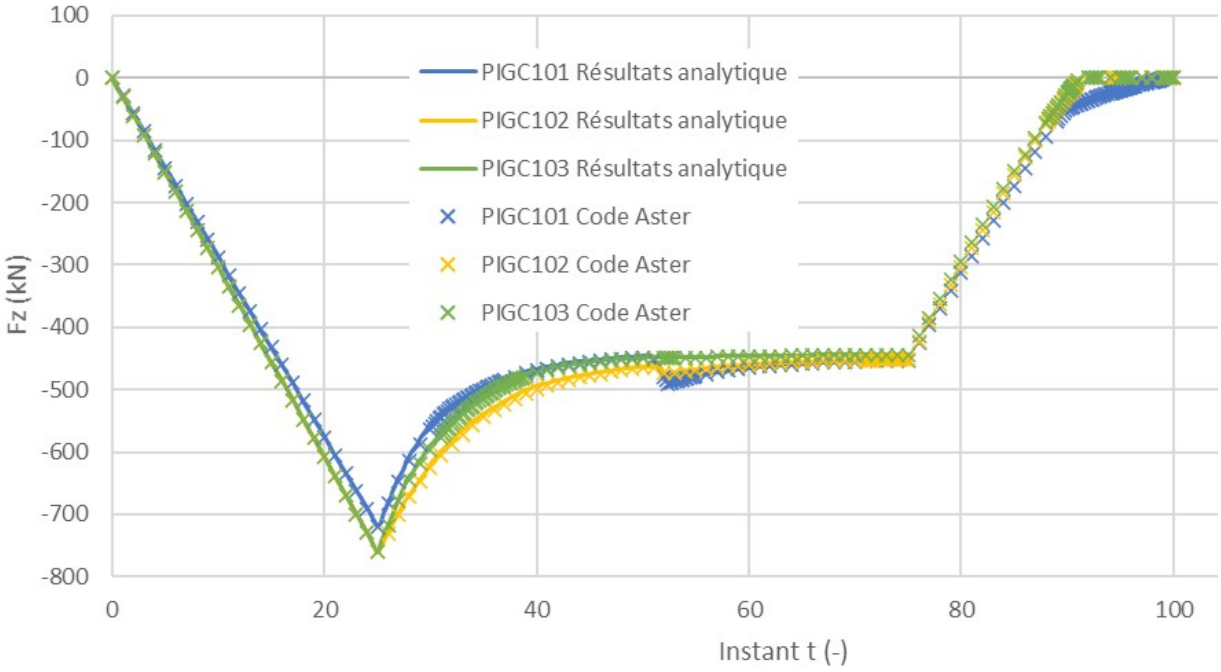
12.1.4 Grandeurs testées et résultats

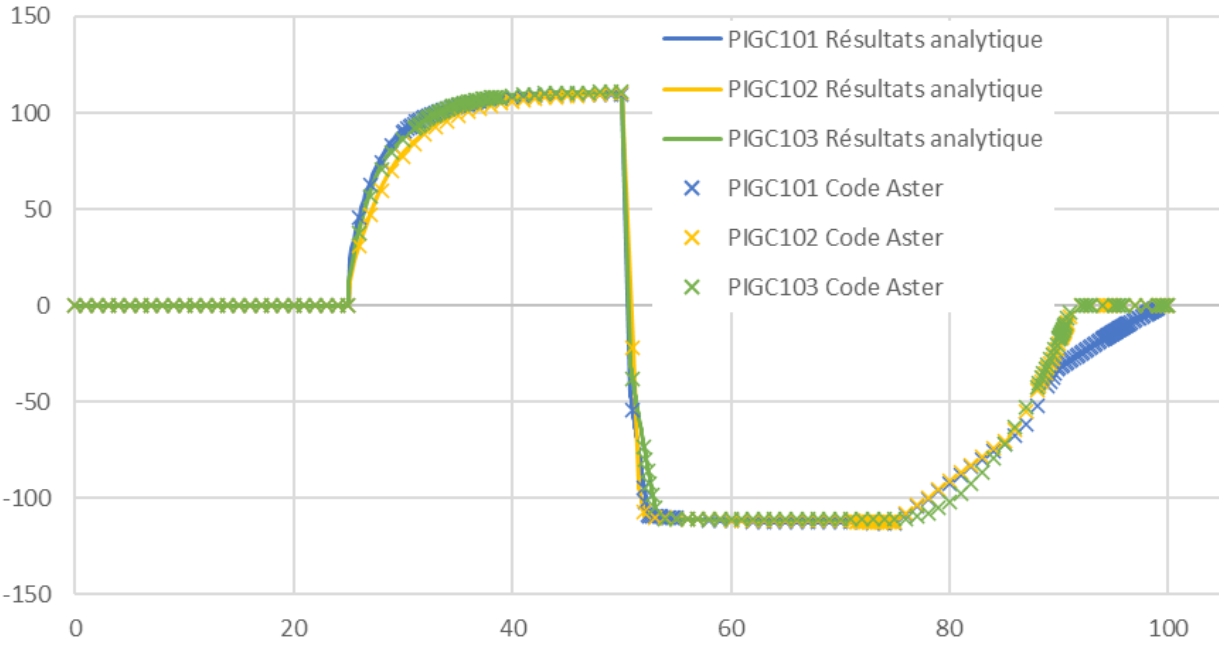
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	75	PIGC101	-452.6311114	0.5 %
N	75	PIGC101	-112.8494138	0.1 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	75	PIGC101	0.000943261	2.0 %
V6 ($U^{pl}_{x,CP}$)	50	PIGC101	0.058908	0.1 %
V11 (q_{h_x})	50	PIGC101	31.21978	2.0 %
V15 (R)	75	PIGC101	269.9849	0.5 %
VZ	75	PIGC102	-451.36	0.1 %
N	50	PIGC102	110.3375	0.5 %
V1 ($U^{pl}_{x,s}$)	50	PIGC102	0.000443817	10 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	75	PIGC102	-0.004134	0.5 %
V11 (q_{h_x})	50	PIGC102	8.778587	10 %
V15 (R)	75	PIGC102	263.238	1.0 %
VZ	75	PIGC103	-444.006	0.5 %
N	50	PIGC103	110.9404	0.1 %
V19 ($v^{pl}_{x,s}$)	50	PIGC103	0.00215952	1.0 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	75	PIGC103	0.003949925	0.5 %
V11 (q_{h_x})	75	PIGC103	-40.9502	1.0 %
V15 (R)	50	PIGC103	251.9725	0.5 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





Les sources d'écart entre la solution et le calcul Code aster sont :

- Le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement).
- L'écrouissage qui est calculé de manière incrémentale sur Code Aster et non de manière exacte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Modélisation j : GpuisCP_Plas_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de glissement puis critère de capacité portante selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (GP101 et GP102) ;

13.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 deux chargements U_z et deux chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements GP101 et GP102, $U_{x,max}=5{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=2{,}0\ mm$.

13.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour les chargements GP101 et GP102 $\phi_{inter}=15°$;
- COHESION : Pour le chargement GP101 $c_{inter}=0\,kPa$, pour le chargement GP102 $c_{inter}=10\,kPa$;

13.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_G$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_G$ où : $f_s(25+t_G)=F_x(25+t_G)+F_z(25+t_G)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y=0$
D'où :

$$t_G=25\frac{U_{z,max}K_{zz}\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Entre $t=25+t_G$ et $t=25+t_{CP}$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_s(t)=0=F_x(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$$
$$F_x(t)=-F_z(t)\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z}d\lambda_s(t)=\tan\left(\phi_{inter}\right)d\lambda_s(t)$$

$$dU_{x,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x}d\lambda_s(t)=d\lambda_s(t)$$

Ainsi :

$$\tan\left(\phi_{inter}\right)dU_{x,s}^{pl}(t)=dU_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ \tan\left(\phi_{inter}\right)U_{x,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

On obtient t à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$ directement à l'aide de la formule du déplacement horizontal :

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=U_{z,s}^{pl}(t)\left(\frac{1}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}+\frac{K_{zz}}{K_{xx}}\tan\left(\phi_{inter}\right)\right)+\frac{K_{zz}U_{z,max}\tan\left(\phi_{inter}\right)+c_{inter}L_xL_y}{K_{xx}}$$

Ces formules sont valables jusqu'à $t=25+t_{CP}$ où : $f_{CP}=-F_z(25+t_{CP})-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_{CP})}{F_z(25+t_{CP})}\right)^3=0$

Dans ce cas entre $t=25+t_{CP}$ et $t=50$, pour les deux solutions étudiées on passe en critère de capacité portante uniquement et on applique les formules du §3.2.2.3, avec à la place de $U_{z,max}$, $U_{z,max}+U_{z,S}^{pl}$.

Entre $t=50$ et $t=75$, on est dans un premier temps en élasticité puis sur le critère de capacité portante, les expressions analytiques sont les mêmes qu'au §3.2.2.3, toujours en substituant $U_{z,max}$ par $U_{z,max}+U_{z,S}^{pl}$.

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement

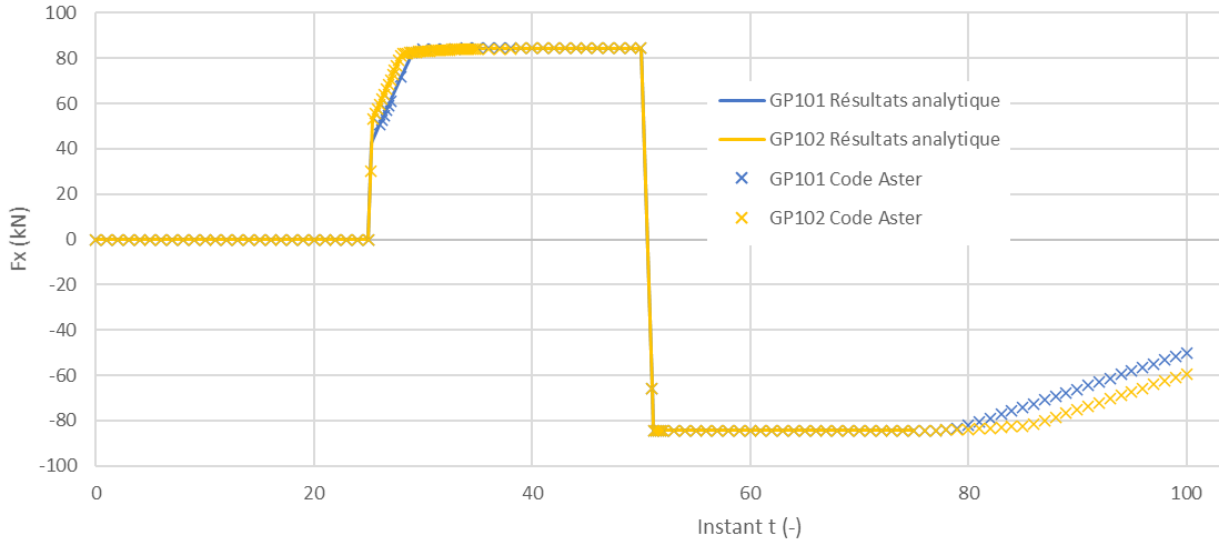
13.1.4 Grandeurs testées et résultats

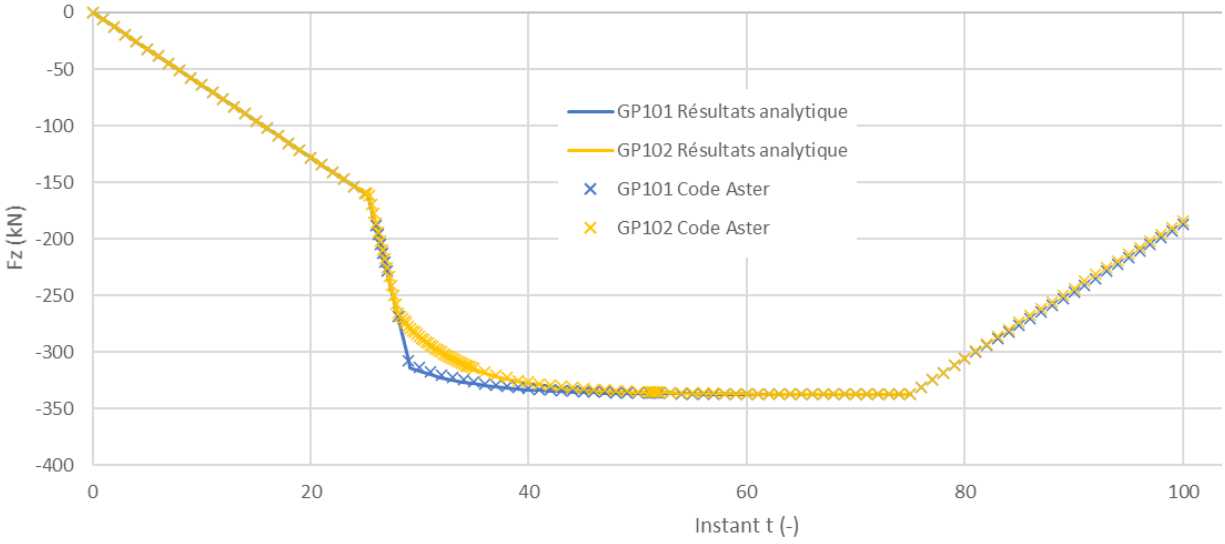
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	50	GP101	-336.6425095	0.2 %
N	75	GP101	-84.375 analytique	0.001 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	75	GP101	0.001923048	5.0 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	50	GP101	0.04169809	1.0 %
VZ	75	GP102	-337.4535056 analytique	0.001 %
N	50	GP102	84.37296902 analytique	0.001 %
V1 ($U_{x,s}^{pl}$)	50	GP102	0.005052592	5.0 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	GP102	0.000864331	5.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





La seule source d'écart entre la solution analytique et le calcul code aster est le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14 Modélisation k : GpuisCP_QCPiso_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de glissement puis critère de capacité portante avec écrouissage isotrope selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (GPI101 et GPI102) ;

14.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 deux chargements U_z et deux chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements GPI101 et GPI102, $U_{x,max}=5{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=2{,}5\ mm$.

14.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour le chargement GPI101 $\phi_{inter}=10°$, et pour GPI102 $\phi_{inter}=15°$;
- COHESION : Pour le chargement GPI101 $c_{inter}=0\,kPa$ et pour le chargement GPI102 $c_{inter}=10\,kPa$;
- CP_ULTIME : Pour tous les chargements, $V_{ult}=1700\ kN$;
- DEPL_REFE : Pour tous les chargements, $v_{pl,r}^{CP}=1\ cm$;

14.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_G$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz}$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_G$ où : $f_s(25+t_G)=F_x(25+t_G)+F_z(25+t_G)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y=0$
D'où :

$$t_G=25\frac{U_{z,max}K_{zz}\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Entre $t=25+t_G$ et $t=25+t_{CP}$, on est en plasticité avec un écoulement plastique associé :

$$f_s(t)=0=F_x(t)+F_z(t)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y$$
$$F_x(t)=-F_z(t)\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant la condition d'écoulement associé :

$$dU_{z,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_z}d\lambda_s(t)=\tan\left(\phi_{inter}\right)d\lambda_s(t)$$

$$dU_{x,s}^{pl}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial F_x}d\lambda_s(t)=d\lambda_s(t)$$

Ainsi :

$$\tan\left(\phi_{inter}\right)dU_{x,s}^{pl}(t)=dU_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ \tan\left(\phi_{inter}\right)U_{x,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(t)$$

Or avec le déplacement vertical constant :

$$U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,s}^{pl}(t)\ \ donc\ \ \ F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

On obtient t à partir de $U_{z,s}^{pl}(t)$ directement à l'aide de la formule du déplacement horizontal :

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=U_x(t)=U_x^{élas}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=U_{z,s}^{pl}(t)\left(\frac{1}{\tan\left(\phi_{inter}\right)}+\frac{K_{zz}}{K_{xx}}\tan\left(\phi_{inter}\right)\right)+\frac{K_{zz}U_{z,max}\tan\left(\phi_{inter}\right)+c_{inter}L_xL_y}{K_{xx}}$$

Ces formules sont valables jusqu'à $t=25+t_{CP}$ où : $f_{CP}=-F_z(25+t_{CP})-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_{CP})}{F_z(25+t_{CP})}\right)^3=0$

A partir de là deux possibilités :

- Pour le chargement GPI101, on évolue comme un double critère, à la fois sur le critère de capacité portante avec écrouissage isotrope et sur le critère de glissement et on suit les mêmes équations que le §3.8.1.3 jusqu'à $t=75$;
- Pour le chargement GPI102, on ne reste uniquement que sur le critère de capacité portante et on suit les mêmes équations qu'au §3.4.2.3 en substituant $U_{z,max}$ par $U_{z,max}+U_{z,S}^{pl}$ et cela jusqu'à $t=75$;

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement

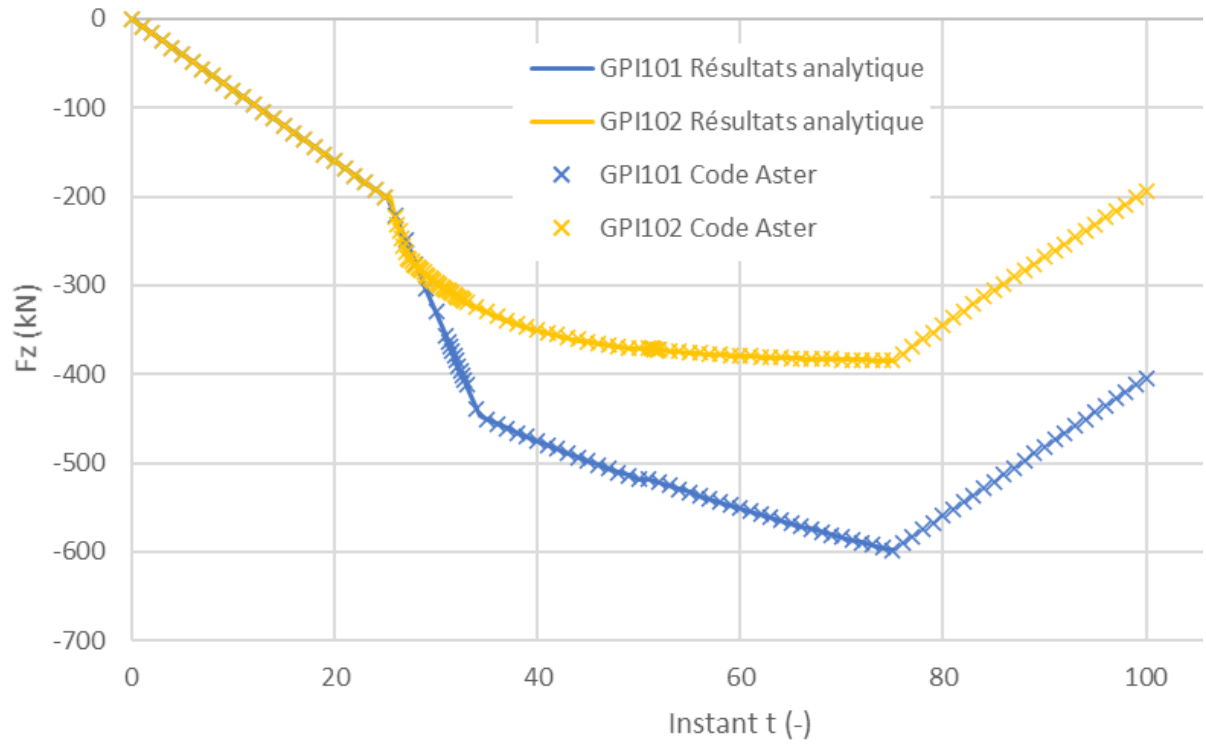
14.1.4 Grandeurs testées et résultats

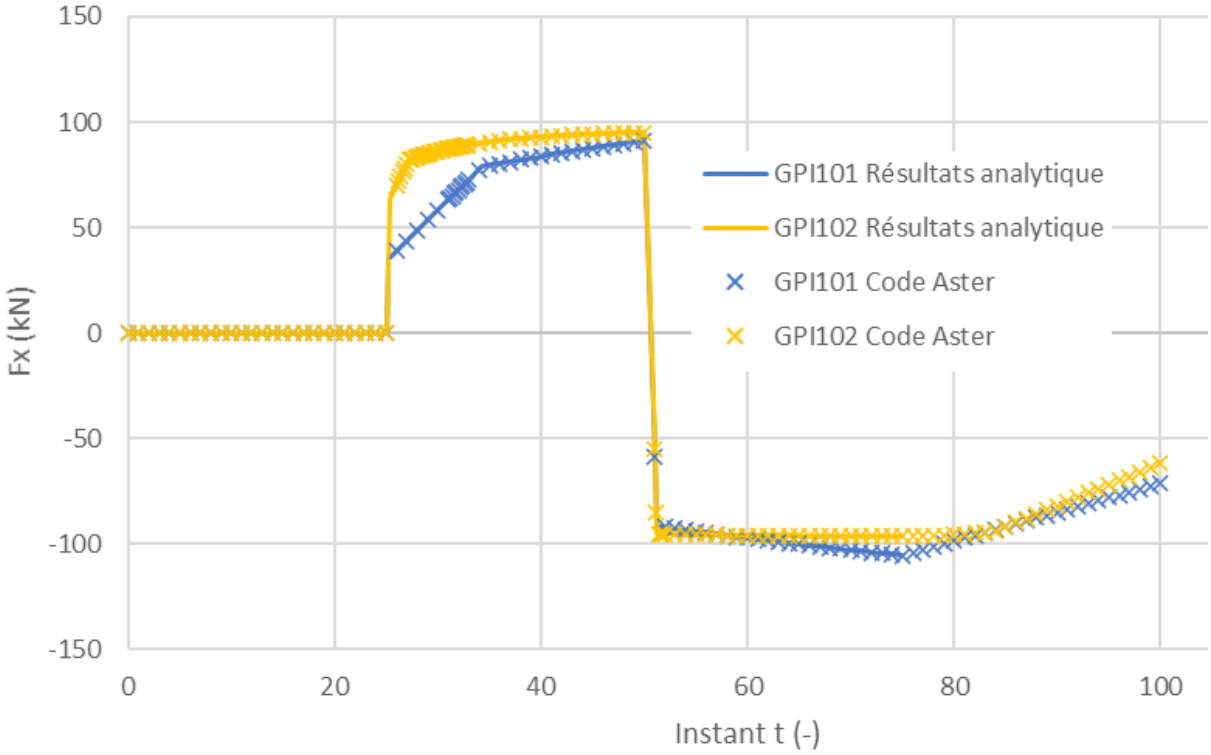
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	75	GPI101	-597.9448 analytique	0.001 %
N	75	GPI101	-105.434 analytique	0.001 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	75	GPI101	0.009260741 analytique	0.001 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	50	GPI101	0.01683207 analytique	0.001 %
V15 (R)	50	GPI101	127.694923 analytique	0.001 %
VZ	75	GPI102	-384.555236	0.02 %
N	50	GPI102	95.2256018	0.5 %
V1 ($U_{x,s}^{pl}$)	50	GPI102	0.00318657	1.0 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	GPI102	0.001453103	0.5 %
V15 (R)	50	GPI102	103.2249111	0.5 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





La seule source d'écart entre la solution analytique et le calcul code aster est le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement). Comme l'écrouissage isotrope est calculé de manière exacte sur Aster (comme le calcul analytique), il n'apporte pas d'erreur supplémentaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15 Modélisation m : GpuisCP_QG_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de glissement avec écrouissage puis critère de capacité portante sans écrouissage selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (GCP101 et GCP102) ;

15.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 deux chargements U_z et deux chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements GCP101 et GCP102, $U_{x,max}=5{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=2{,}5\ mm$.

15.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour les chargements GCP101 et GCP102 $\phi_{inter}=10°$;
- COHESION : Pour le chargement GCP101 $c_{inter}=0\,kPa$ et pour le chargement GCP102 $c_{inter}=5\,kPa$;
- RAID_GLIS : Pour le chargement GCP101 $H_h=20\ 000\ kN.m^{-1}$ et pour le chargement GCP102 $H_h=2\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour tous les chargements $\gamma=50\ m^{-1}$;

15.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_G$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_G$ où : $f_s(25+t_G)=F_x(25+t_G)+F_z(25+t_G)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y=0$
D'où :

$$t_G=25\frac{U_{z,max}K_{zz}\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Entre $t=25+t_G$ et $t=25+t_{CP}$, on est en plasticité dans le critère de glissement avec écrouissage cinématique (on peut alors se reporter aux équations du §3.6.1.3).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ainsi on impose $U_{z,s}^{pl}(t)$ et on obtient l'ensemble des autres variables dont t :

$$\tan(\phi_{inter})U_{x,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(t),\ F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

$$q_{h_x}(t)=\frac{H_h}{\gamma}\left(1-\exp\left(\frac{-\gamma U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan(\phi_{inter})}\right)\right)$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=\frac{H_h}{\gamma K_{xx}}\left(1-\exp\left(\frac{-\gamma U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan(\phi_i)}\right)\right)+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan(\phi_i)}+\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)\tan(\phi_i)+c_i L_x L_y}{K_{xx}}$$

$$F_x(t)=-F_z(t)\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_x L_y$$

Ces formules sont valables jusqu'à $t=25+t_{CP}$ où : $f_{CP}=-F_z(25+t_{CP})-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_{CP})}{F_z(25+t_{CP})}\right)^3=0$

Entre $t=25+t_{CP}$ et $t=50$:

- Soit on change de critère pour être en critère de capacité portante seul (GCP101), on suit alors les équations du §3.2.2.3 en substituant $U_{z,max}$ par $U_{z,max}+U_{z,S}^{pl}$;
- Soit on peut rester sur les deux critères (GCP102), on suit alors alors les équations du §3.9.1.3.

Entre $t=50$ et $t=75$, on est dans un premier temps dans une phase élastique, puis on atteint le critère de glissement avec écrouissage cinématique sur lequel on évolue puis on atteint le critère de capacité portante. On évolue sur les deux critères simultanément. Les équations sont alors les mêmes qu'au §3.10.3.

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

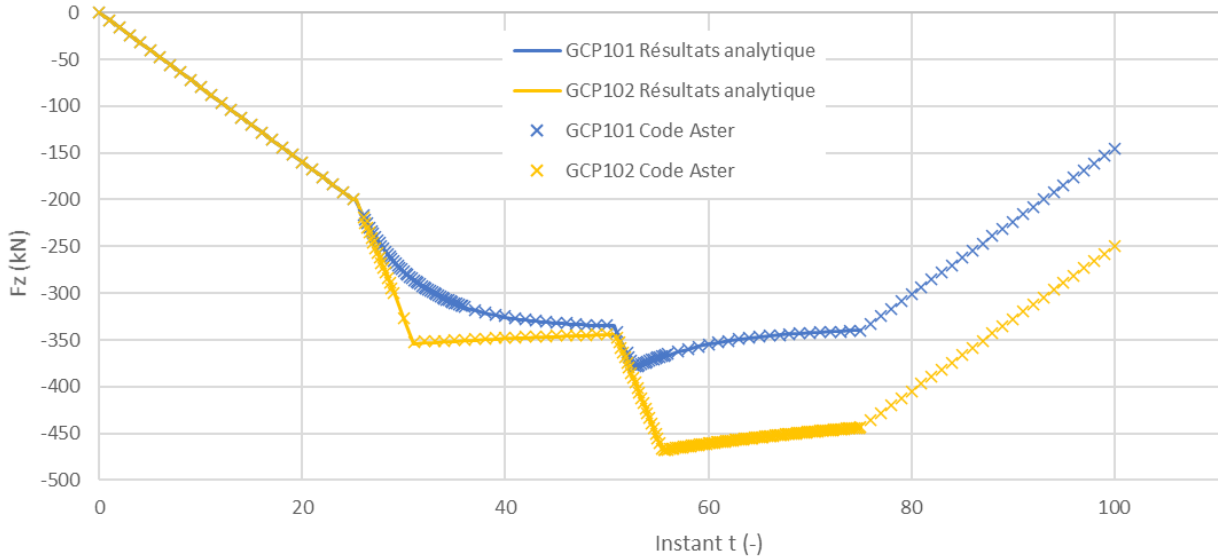
15.1.4 Grandeurs testées et résultats

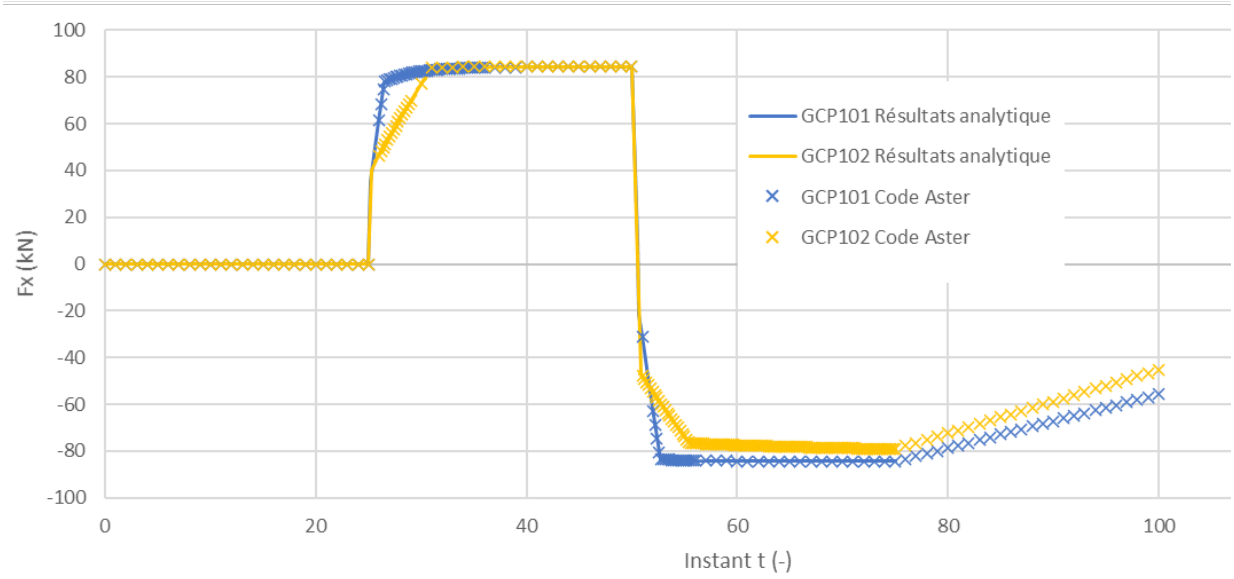
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	75	GCP101	-339.869	0.1 %
N	75	GCP101	-84.3722	0.01 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	75	GCP101	0.001014	5.0 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	50	GCP101	0.046892122	0.1 %
V11 (q_{h_x})	50	GCP101	37.75574	0.2 %
VZ	75	GCP102	-444.190263	0.5 %
N	50	GCP102	84.35011	0.05 %
V1 ($U_{x,s}^{pl}$)	50	GCP102	0.012495813	5.0 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	GCP102	-0.003069915	2.0 %
V11 (q_{h_x})	50	GCP102	18.58506	1.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

15.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





Les sources d'écart entre la solution et le calcul Code aster sont :

- Le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement).
- L'écrouissage du glissement qui est calculé de manière incrémentale sur Code Aster et non de manière exacte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

16 Modélisation n : GpuisCP_QGQCPiso_U

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le parcours de la surface de rupture lié au critère de glissement avec écrouissage puis critère de capacité portante avec écrouissage isotrope selon 1 série de chargement :

- Chargement et déchargement en déplacement vertical puis déplacement horizontal (GCPI101 et GCPI102) ;

16.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 deux chargements U_z et deux chargements U_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
$U_z(m)$	0.	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	$-U_{z,max}$	0.
$U_x(m)$	0.	0.	$U_{x,max}$	0.	0.

Avec pour les chargements GCPI101 et GCPI102, $U_{x,max}=5{,}0\ cm$ et $U_{z,max}=2{,}5\ mm$.
Pour GCPI102 tandis que $U_{z,max}=1{,}0\ mm$ pour GCPI101.

16.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour les chargements GCP101 et GCP102 $\phi_{inter}=10°$;
- COHESION : Pour le chargement GCP101 $c_{inter}=0\,kPa$ et pour le chargement GCP102 $c_{inter}=5\,kPa$;
- RAID_GLIS : Pour tous les chargements $H_h=20\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour tous les chargements $\gamma=50\ m^{-1}$;
- CP_ULTIME : Pour tous les chargements, $V_{ult}=1700\ kN$;
- DEPL_REFE : Pour tous les chargements, $v_{pl,r}^{CP}=1\ cm$;

16.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ U_z(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}=U_z^{élas}(t),\ F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*\frac{t}{25}*K_{zz}$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=0,\quad F_x(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_G$, on est dans le domaine élastique et il n'y a pas de déplacement plastique :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_z(t)=-U_{z,max}=U_z^{élas}(t),\quad F_z(t)=K_{zz}U_z^{élas}(t)=-U_{z,max}*K_{zz},$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\quad U_x(t)=U_x^{élas}(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max},\quad F_x(t)=\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}*K_{xx}$$

Jusqu'à $t=25+t_G$ où : $f_s(25+t_G)=F_x(25+t_G)+F_z(25+t_G)\tan(\phi_{inter})-c_{inter}L_xL_y=0$
D'où :

$$t_G=25\frac{U_{z,max}K_{zz}\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_xL_y}{U_{x,max}K_{xx}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=25+t_G$ et $t=25+t_{DC}$, on est en plasticité dans le critère de glissement avec écrouissage cinématique (on peut alors se reporter aux équations du §3.6.3) :

Ainsi on impose $U_{z,s}^{pl}(t)$ et on obtient l'ensemble des autres variables dont t :

$$\tan(\phi_{inter})U_{z,s}^{pl}(t)=U_{x,s}^{pl}(t),\quad F_z(t)=-K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)$$

$$q_{h_x}(t)=\frac{H_h}{\gamma}\left(1-\exp\left(\frac{-\gamma U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan(\phi_{inter})}\right)\right)$$

$$\left(\frac{t}{25}-1\right)U_{x,max}=\frac{H_h}{\gamma K_{xx}}\left(1-\exp\left(\frac{-\gamma U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan(\phi_i)}\right)\right)+\frac{U_{z,s}^{pl}(t)}{\tan(\phi_i)}$$
$$+\frac{K_{zz}\left(U_{z,max}+U_{z,s}^{pl}(t)\right)\tan(\phi_i)+c_i L_x L_y}{K_{xx}}$$

$$F_x(t)=q_{h_x}(t)-F_z(t)\tan(\phi_{inter})+c_{inter}L_x L_y$$

Ces formules sont valables jusqu'à ce qu'on atteint le critère de capacité portante et donc le double critère à $t=25+t_{DC}$ où : $f_{CP}=-F_z(25+t_{DC})-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_{DC})}{F_z(25+t_{DC})}\right)^3=0$

Entre $t=25+t_{DC}$ et $t=25+t_{fin\,DC}$, reste sur les deux critères, on suit alors les équations du §3.10.3 jusqu'à ce que l'on quitte le critère de glissement ($\frac{d\lambda_S}{dt}=0$ pour GCPI101) ou que l'on arrive à t=50, avec :

$$dU_{z,CP}^{pl}=\left(3\left(\frac{V_{lim}+R}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP},\quad dU_{z,CP}^{pl}=\tan\phi_{inter}\,d\lambda_S,$$

$$dF_z=K_{zz}dU_z^{élas}=K_{zz}\left(3\left(\frac{V_{lim}+R}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP}-K_{zz}\tan\phi_{inter}\,d\lambda_S$$

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=3\left(\frac{V_{lim}+R}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}d\lambda_{CP}(t),\quad dU_{x,CP}^{pl}=d\lambda_S,$$

$$dF_x=K_{xx}\,dU_x^{élas}=K_{xx}\frac{U_{x,max}}{25}dt-3K_{xx}\left(\frac{V_{lim}+R}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}d\lambda_{CP}-K_{xx}d\lambda_S$$

$$dR=\frac{(V_{ult}-V_{lim})v_{pl,r}^{CP}}{\left(v_{pl,z}^{CP}+v_{pl,r}^{CP}\right)^2}\left(3\left(\frac{V_{lim}+R}{-F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP},dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(t)\right)d\lambda_S$$

En écrivant les conditions d'écoulements :

$$df_{CP}=0=\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)dF_z+3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}dF_x+\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)dR=0$$

$$df_s=0=\tan\phi_{inter}\,dF_z+dF_x-dq_¿=0$$

On arrive alors au système :

$$\begin{pmatrix}M_{CP,CP} & M_{CP,S}\\ M_{CP,S} & M_{S,S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d\lambda_{CP}}{dt}\\ \frac{d\lambda_s}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}K_{xx}\frac{U_{x,max}}{25}\\ K_{xx}\frac{U_{x,max}}{25}\end{pmatrix}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Où :

$$M_{CP,CP}=K_{zz}\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)^2+K_{xx}\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}+R}\right)\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)v_{pl,r}^{CP}}{\left(v_{pl,z}^{CP}+v_{pl,r}^{CP}\right)^2}\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)$$

$$M_{CP,S}=K_{zz}\left(3\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\tan\phi_{inter}+3K_{xx}\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$M_{S,S}=K_{zz}\tan^2\phi_{inter}+K_{xx}+H_h\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(t)\right)$$

Par inversion du système on a :

$$\frac{d\lambda_{CP}}{dt}=\frac{3M_{S,S}\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}-M_{CP,S}}{M_{CP,CP}M_{S,S}-M_{CP,S}^2}K_{xx}\frac{U_{x,max}}{25}$$

$$\frac{d\lambda_S}{dt}=\frac{M_{CP,CP}-3M_{CP,S}\left(\frac{-V_{lim}+R}{F_z(t)}\right)^{\frac{1}{3}}}{M_{CP,CP}M_{S,S}-M_{CP,S}^2}K_{xx}\frac{U_{x,max}}{25}$$

Entre $t=25+t_{fin\ CP}$ et $t=50$,

- Si on quitte le critère de glissement (GCPI101), on suit alors le critère de capacité portante avec les équations du §3.4.2.3 en substituant $U_{z,max}$ par $U_{z,max}+U_{z,S}^{pl}$;

Entre $t=50$ et $t=75$, on est dans un premier temps dans une phase élastique, puis on atteint le critère de glissement avec écrouissage cinématique sur lequel on évolue puis on atteint le critère de capacité portante. On évolue sur les deux critères simultanément. Les équations sont alors les mêmes qu'au §3.10.3.

Entre $t=75$ et $t=100$, les calculs analytiques ne se simplifient pas suffisamment pour être développés ci-dessous, on vérifie juste graphiquement que le critère de plasticité est parcouru correctement.

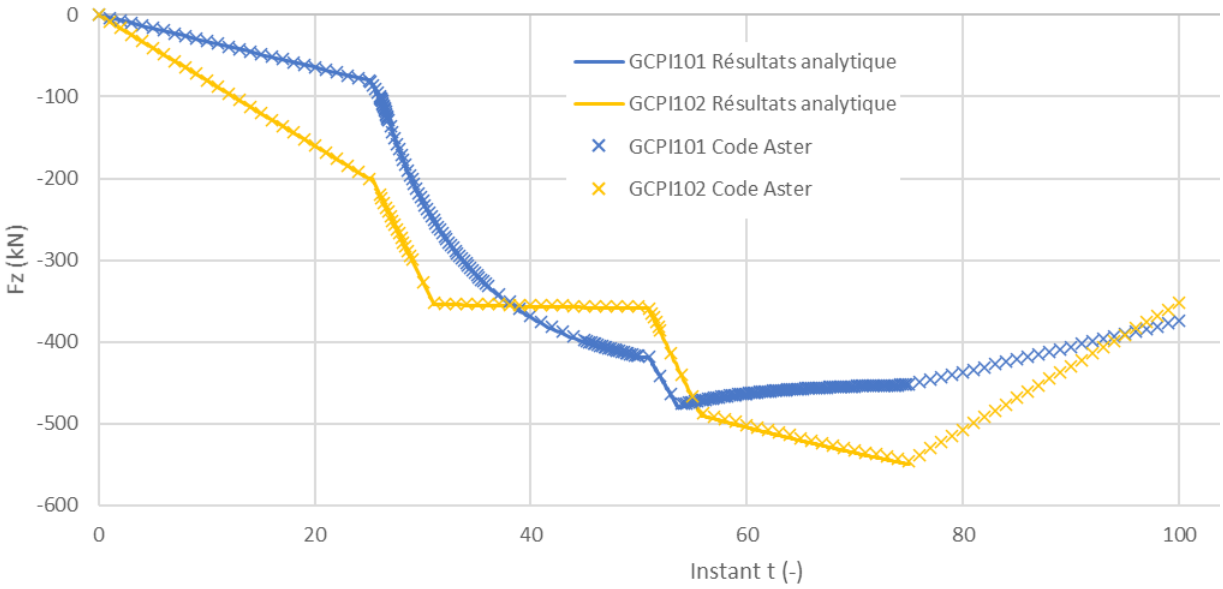
16.1.4 Grandeurs testées et résultats

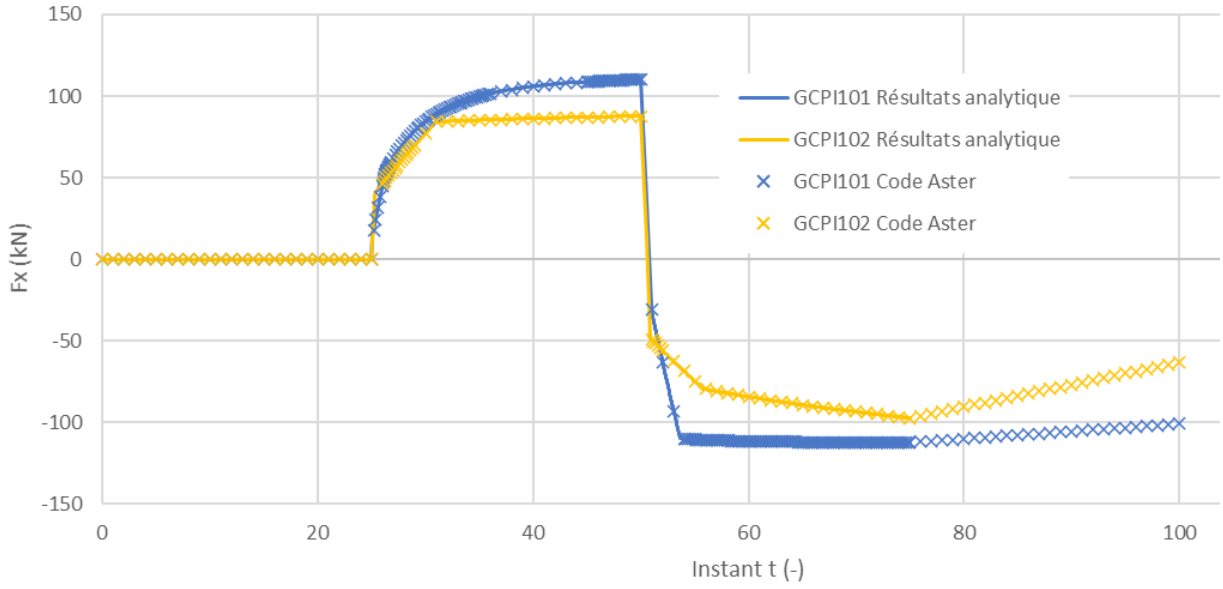
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
VZ	75	GCPI101	-453.798053	1.0 %
N	75	GCPI101	-112.687819	0.5 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	75	GCPI101	0.001284476	5.0 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	50	GCPI101	0.046156902	0.1 %
V11 (q_{h_x})	50	GCPI101	44.71839575	0.1 %
V15 (R)	75	GCPI101	268.4796787	2.0 %
VZ	75	GCPI102	-550.082	1.0 %
N	50	GCPI102	87.8342029	0.5 %
V1 ($U_{x,s}^{pl}$)	50	GCPI102	0.013423971	5.0 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	75	GCPI102	-0.002621164	5.0 %
V11 (q_{h_x})	50	GCPI102	19.556175	0.2 %
V15 (R)	75	GCPI102	186.9121	5.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

16.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour le chargement donné, les forces du Code Aster aux forces analytiques attendus :





Les sources d'écart entre la solution et le calcul Code aster sont :

- Le retour sur le critère de capacité portante. En effet, comme le critère de capacité portante n'est pas linéaire, le retour élastique sur le critère effectué par Code Aster calculant de manière incrémentale n'es pas équivalent au calcul analytique exact (au contraire du critère de glissement).
- L'écrouissage qui est calculé de manière incrémentale sur Code Aster et non de manière exacte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

17 Modélisation o : FseulCP

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le critère de capacité portante avec écrouissage isotrope dans le cas d'un chargement et déchargement vertical (FZCPI1, FZCPI2 et FZCPI3)

17.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z avec la carte de temps suivant (les autres efforts sont imposés nuls) :

t (-)	0.	50.	100.
F_z	0.	- $F_{z,max}$	0.

Avec pour tous les chargements $F_{z,max}=1200\,kN$.

17.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements $\phi_{inter}=45°$, aucun impact sur les calculs car pas de glissement ;
- CP_ULTIME : Pour le chargement FZCPI1, $V_{ult}=1600\ kN$, pour FZCPI2 $V_{ult}=2000\ kN$ et pour FZCPI3, $V_{ult}=1300\ kN$;
- DEPL_REFE : Pour le chargement FZCPI1, $v_{pl,r}^{CP}=2\ cm$, pour FZCPI2 $v_{pl,r}^{CP}=3\ cm$ et pour FZCPI3, $v_{pl,r}^{CP}=7{,}5\ mm$;

17.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=t_C$, on est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=\frac{-F_{z,max}t}{50},\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}=\frac{-F_{z,max}t}{50\ K_{zz}},\ U_{z,CP}^{pl}(t)=0,\ R(t)=0$$

Jusqu'à ce que $f_{CP}(t_C)=0=-F_z(t_C)-V_{lim}$ d'où $t_C=\frac{50\,V_{lim}}{F_{z,max}}$

Entre $t=t_C$ et $t=50$, on est dans le domaine plastique sur le critère de capacité portante avec écrouissage isotrope :

$$f_{CP}(t)=0=-F_z(t)-\left(V_{lim}+R(t)\right)\ d'où\ R(t)=\frac{F_{z,max}t}{50}-V_{lim}$$

Comme, $\frac{\partial f_{CP}}{\partial F_z}=-1$, le déplacement vertical plastique $U_{z,CP}^{pl}(t)$ est décroissant et négatif, ainsi :

$$v_{z,CP}^{pl}(t)=-U_{z,CP}^{pl}(t)\ \ car\ \ dv_{z,CP}^{pl}(t)=\left(dU_{z,CP}^{pl}(t)\right)$$

On en déduit de la définition de l'écrouissage isotrope :

$$R(t)=\frac{\left(V_{ult}-V_{lim}\right)v_{z,CP}^{pl}(t)}{v_{z,CP}^{pl}(t)+v_{r,CP}^{pl}(t)}\ \ donc\ \ U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{-R(t)v_{r,CP}^{pl}(t)}{\left(\left(V_{ult}-V_{lim}\right)-R(t)\right)}$$

On peut enfin retomber sur le déplacement vertical total avec :

$$U_z(t)=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{F_{z,max}}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=50$ et $t=100$, on est en élasticité car $F_z(t)=-F_{z,max}\left(\frac{100-t}{50}\right)\leq 0$:

$$U_z(t)=U_z^{élas}(t)+U_{z,CP}^{pl}(50)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}\left(\frac{100-t}{50}\right)+U_{z,CP}^{pl}(50)$$

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=U_{z,CP}^{pl}(50), R(t)=R(50)$$

Jusqu'à ce que $f_{CP}(t_C)=0=-F_z(t_C)-V_{lim}$ d'où $t_C=\frac{50\,V_{lim}}{F_{z,max}}$

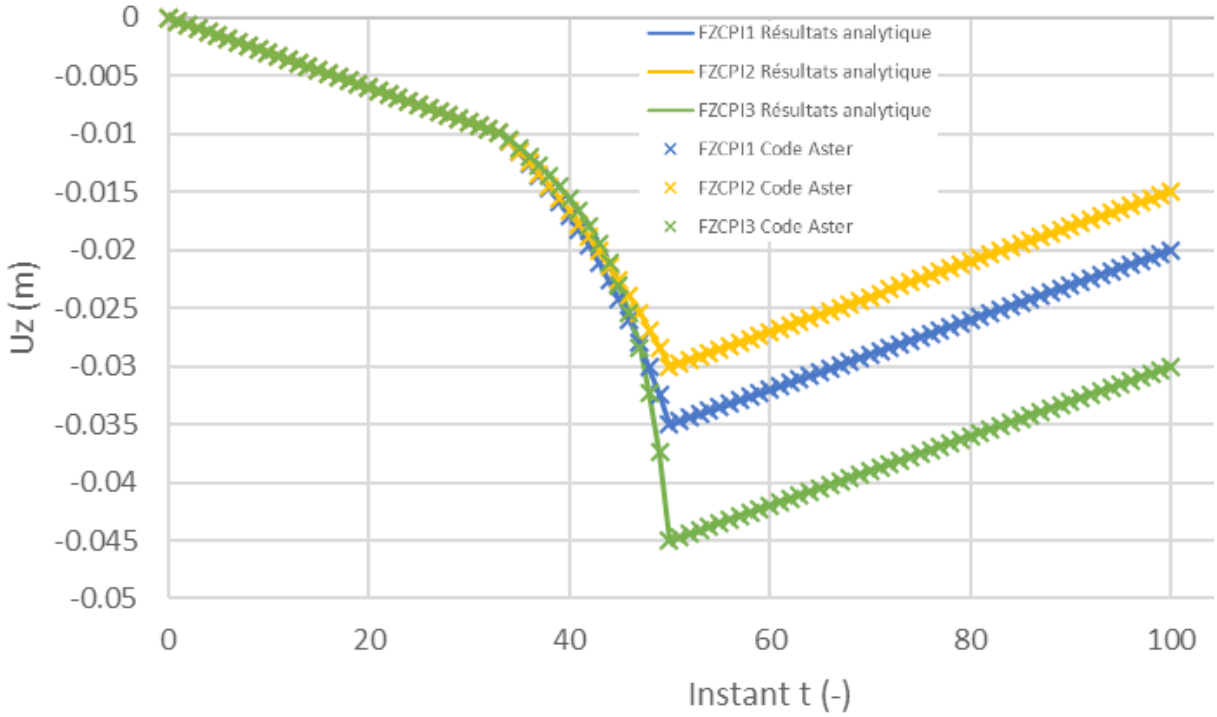
17.1.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	50	FZCPI1	-0.035 analytique	0.001 %
V15 (R)	75	FZCPI1	400.0 analytique	0.001 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	100	FZCPI1	-0.02 analytique	0.001 %
DZ	75	FZCPI2	-0.0225 analytique	0.001 %
V15 (R)	50	FZCPI2	400.0 analytique	0.001 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	100	FZCPI2	-0.015 analytique	0.001 %
DZ	75	FZCPI3	-0.0375 analytique	0.001 %
V15 (R)	100	FZCPI3	400.0 analytique	0.001 %
V21 ($v_{z,CP}^{pl}$)	50	FZCPI3	0.03 analytique	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

17.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements du Code Aster aux déplacements analytique attendus :



Ils correspondent parfaitement puisque :

- Le chargement est en force donc l'écrouissage est exact ;
- L'écrouissage isotrope en capacité portante est géré de manière exacte donc le déplacement vertical plastique en capacité portante est exact ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

18 Modélisation p : Fhiso

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le critère de capacité portante avec écrouissage isotrope dans le cas d'un chargement et déchargement vertical puis horizontal (FHCPI1, FHCPI2 et FHCPI3)

18.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z et trois chargements F_x avec la carte de temps suivant (les autres efforts sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
F_z	0.	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	0.
F_x	0.	0.	$F_{x,max}$	0.	0.

Avec le tableau suivant donnant les valeurs des paramètres par chargement :

Chargement	FHCPI1	FHCPI2	FHCPI3
$F_{z,max}(kN)$	600	300	800
$F_{x,max}(kN)$	130	130	100

Propriété de l'élément
En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements $\phi_{inter}=45°$, aucun impact sur les calculs car pas de glissement ;
- CP_ULTIME : Pour le chargement FHCPI1, $V_{ult}=1600\ kN$, pour FHCPI2 $V_{ult}=1800\ kN$ et pour FHCPI3, $V_{ult}=1300\ kN$;
- DEPL_REFE : Pour le chargement FHCPI1, $v_{pl,r}^{CP}=2\ cm$, pour FHCPI2 $v_{pl,r}^{CP}=7{,}5\ mm$ et pour FHCPI3, $v_{pl,r}^{CP}=3\ cm$;

Solution analytique
Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=\frac{-F_{z,max}t}{25},\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}=\frac{-F_{z,max}t}{25\ K_{zz}},\ U_{z,CP}^{pl}(t)=0$$

$$F_x(t)=0,\ U_x(t)=0,\ U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\ R(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on reste est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}},\ U_{z,CP}^{pl}(t)=0$$

$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(t-25),\ U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{t-25}{25}\ ,\ U_{x,CP}^{pl}(t)=0,\ R(t)=0$$

Jusqu'à ce que $f_{CP}(25+t_C)=0=-F_z(25+t_C)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_C)}{F_z(25+t_C)}\right)^3$ d'où :

$$t_C=\ 25\frac{F_{z,max}}{F_{x,max}}\left(1-\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=t_C$ et $t=50$, on est dans le domaine plastique sur le critère de capacité portante avec écrouissage isotrope :

$$f_{CP}(t)=0=F_{z,max}-(V_{lim}+R(t))\left(1-\frac{F_x(t)}{F_{z,max}}\right)^3 \quad d'où \quad R(t)=\frac{F_{z,max}}{\left(1-\frac{F_x(t)}{F_{z,max}}\right)^3}-V_{lim}$$

En fonction du signe de $\frac{\partial f_{CP}}{\partial F_z}=3\left(\frac{V_{lim}+R}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}-4$, le déplacement vertical plastique $U^{pl}_{z,CP}(t)$ est décroissant et négatif (si $\frac{\partial f_{CP}}{\partial F_z}<0$) ou croissant et positif (si $\frac{\partial f_{CP}}{\partial F_z}>0$), ainsi :

$$v^{pl}_{z,CP}(t)=\begin{cases} U^{pl}_{z,CP}(t) \ si \ 27(V_{lim}+R)>64F_{z,max} \\ -U^{pl}_{z,CP}(t) \ si \ 27(V_{lim}+R)<64F_{z,max} \end{cases} \quad car \quad dv^{pl}_{z,CP}(t)=\left|dU^{pl}_{z,CP}(t)\right|$$

On en déduit de la définition de l'écrouissage isotrope :

$$R(t)=\frac{(V_{ult}-V_{lim})v^{pl}_{z,CP}(t)}{v^{pl}_{z,CP}(t)+v^{pl}_{r,CP}(t)} \quad donc \quad U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{R(t)v^{pl}_{r,CP}(t)}{((V_{ult}-V_{lim})-R(t))}\times\begin{cases} 1 \ si \ 27(V_{lim}+R)>64F_{z,max} \\ -1 \ si \ 27(V_{lim}+R)<64F_{z,max} \end{cases}$$

On peut enfin retomber sur le déplacement vertical total avec :

$$U_z(t)=U^{élas}_z(t)+U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Le déplacement plastique horizontale se déduit par les équations d'écoulement :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}+R(t)}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{V_{lim}+R(t)}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}} d\lambda_{CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}+R(t)}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

On peut obtenir $U^{pl}_{x,CP}(t)$ par résolution pas à pas de la relation.

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}+\frac{(V_{ult}-V_{lim})\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|}{\left|U^{pl}_{z,CP}(t)\right|+v^{pl}_{r,CP}(t)}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient après le déplacement horizontal :

$$U_x(t)=U^{élas}_x(t)+U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t)$$

Entre $t=50$ et $t=75$, on reste en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max}, \ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(50), \ U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(50), R(t)=R(50)$$

$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(75-t), \ U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{(75-t)}{25}+ \ U^{pl}_{x,CP}(50)$$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)=U^{pl}_{x,CP}(50)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=75$ et $t=100$, on reste aussi en élasticité :

$$U_{z,CP}^{pl}(t)=U_{z,CP}^{pl}(50),\quad U_{x,CP}^{pl}(t)=U_{x,CP}^{pl}(50),\quad R(t)=R(50),\ F_z(t)=-F_{z,max}\frac{(100-t)}{25}$$

$$F_x(t)=0,\quad U_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}\frac{(100-t)}{25}+U_{z,CP}^{pl}(50),\ U_{x,CP}^{pl}(t)=U_{x,CP}^{pl}(50)$$

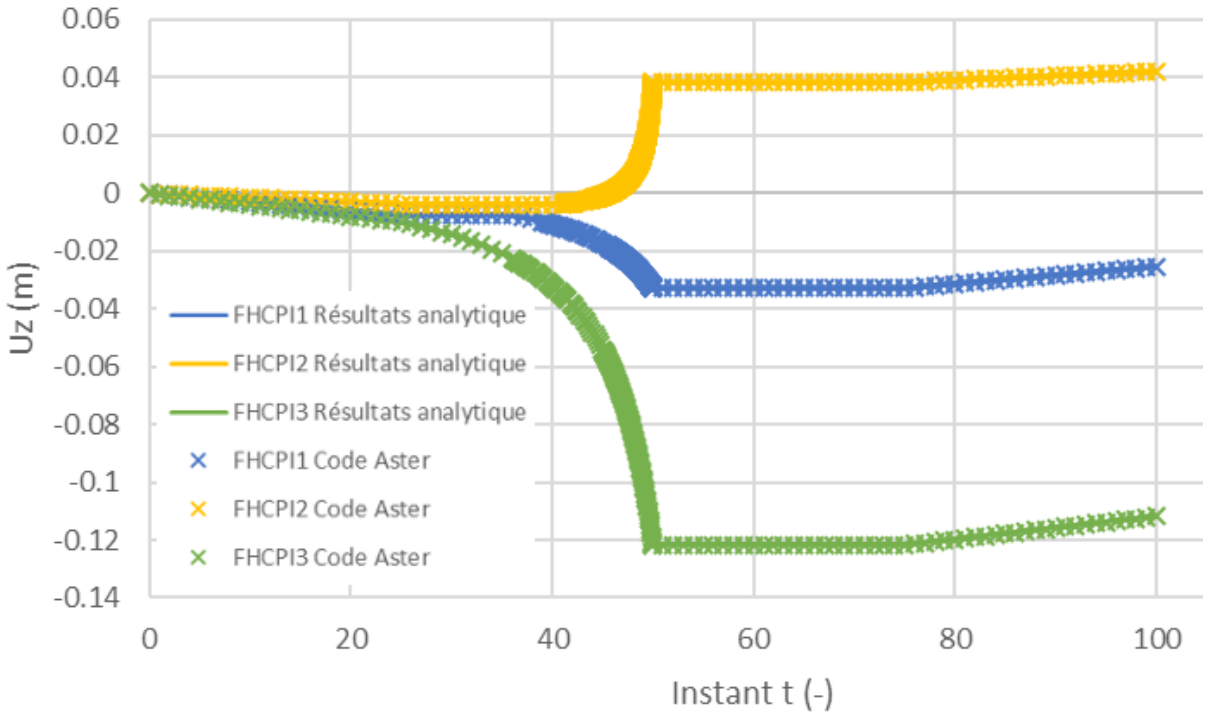
18.1.2 Grandeurs testées et résultats

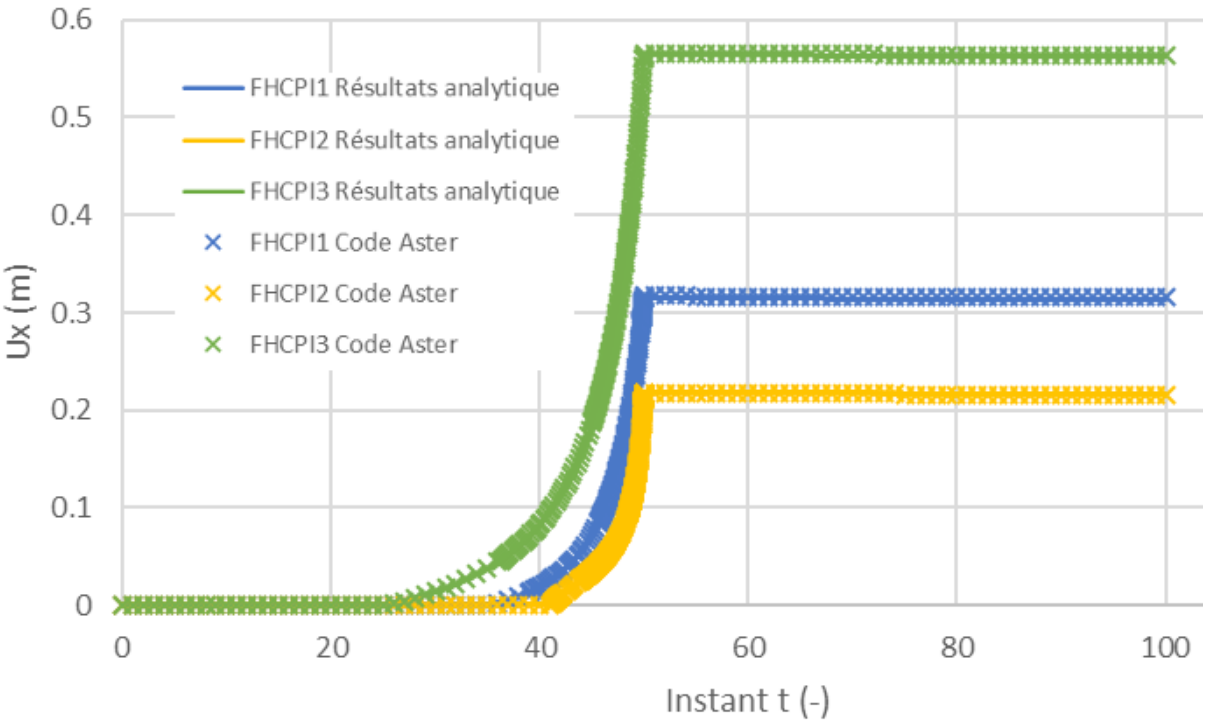
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	100	FHCPI1	-0.025490514 analytique	0.001 %
DX	50	FHCPI1	0.31546499	1.0 %
V15 (R)	75	FHCPI1	448.2783198 analytique	0.001 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	100	FHCPI1	0.313731657	1.0 %
DZ	50	FHCPI2	0.038316182 analytique	0.001 %
DX	75	FHCPI2	0.2172663	1.0 %
V15 (R)	100	FHCPI2	848.687157 analytique	0.001 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	50	FHCPI2	0.042066182 analytique	0.001 %
DZ	75	FHCPI3	-0.121735537 analytique	0.001 %
DX	100	FHCPI3	0.563058248	1.0 %
V15 (R)	50	FHCPI3	394.1690962 analytique	0.001 %
V21 ($v_{z,CP}^{pl}$)	75	FHCPI3	0.111735537 analytique	0.001 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

18.1.3 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements (en x et z) du Code Aster aux déplacements analytique attendus :





Excepté le déplacement horizontal, les résultats correspondent exactement puisque :

- Le chargement est en force donc l'écrouissage est exact ;
- L'écrouissage isotrope en capacité portante est géré de manière exacte donc le déplacement vertical plastique en capacité portante est exact ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'écart pour le déplacement plastique vient du fait que la relation entre déplacement plastique horizontal et vertical n'est pas linéaire, dans Aster le calcul est incrémental, d'où un écart entre les deux résultats (<1.0 %) ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

19 Modélisation q : Fhcine

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le critère de capacité portante avec écrouissage cinématique dans le cas d'un chargement et déchargement vertical puis horizontal (FHCPC1, FHCPC2 et FHCPC3)

19.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z et trois chargements F_x avec la carte de temps suivant (les autres efforts sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
F_z	0.	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	0.
F_x	0.	0.	$F_{x,max}$	0.	0.

Il est à noter que pour certains chargements, on ne peut atteindre $t=100$, car il y a divergence auparavant. Ainsi les chargements sont arrêtés à t_{fin}.

Avec le tableau suivant donnant les valeurs des paramètres par chargement :

Chargement	FHCPC1	FHCPC2	FHCPC3
$F_{z,max}(kN)$	600	300	800
$F_{x,max}(kN)$	130	190	100
t_{fin}	99	100	100

19.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements $\phi_{inter}=45°$, aucun impact sur les calculs car pas de glissement ;
- RAID_CP_X : Pour le chargement FHCPC1, $I_{h,x}=40\ 000\ kN.m^{-1}$, pour FHCPC2, $I_{h,x}=75\ 000\ kN.m^{-1}$ et pour FHCPC3, $I_{h,x}=7\ 500\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_CP_X : Pour le chargement FHCPC1, $\gamma_{h,x}=1000\ m^{-1}$, pour FHCPC2 et FHCPC3, $\gamma_{h,x}=100\ m^{-1}$;

19.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=\frac{-F_{z,max}t}{25},\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}=\frac{-F_{z,max}t}{25\ K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=0$$

$$F_x(t)=0,\ U_x(t)=0,\ U^{pl}_{x,CP}(t)=0,\ R_{h,x}(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on reste est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=0$$

$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(t-25),\ U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{t-25}{25}\ ,\ U^{pl}_{x,CP}(t)=0,\ R_{h,x}(t)=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Jusqu'à ce que $f_{CP}(25+t_C)=0=-F_z(25+t_C)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(25+t_C)}{F_z(25+t_C)}\right)^3$ d'où :

$$t_C=\ 25\frac{F_{z,max}}{F_{x,max}}\left(1-\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Entre $t=t_C$ et $t=50$, on est dans le domaine plastique sur le critère de capacité portante avec écrouissage cinématique :

$$f_{CP}(t)=0=F_{z,max}-V_{\lim}\left(1-\frac{F_x(t)-R_{h,x}(t)}{F_{z,max}}\right)^3 \text{ d'où } R_{h,x}(t)=F_x(t)-F_{z,max}\left(1-\left(\frac{F_{z,max}}{V_{\lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

A partir des équations d'écoulement :

$$d\,U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\,\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\ d\,\lambda_{CP}(t)$$

$$d\,U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\,\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}\ d\,\lambda_{CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient la relation entre $U^{pl}_{x,CP}(t)$ et $U^{pl}_{z,CP}(t)$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{U^{pl}_{z,CP}(t)}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

En écrivant l'équation de l'écrouissage cinématique :

$$d\,R_{h,x}=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{I_{h,x}}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$R_{h,x}(t)=\frac{I_{h,x}\left(1-\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}(t)\right)\right)}{\gamma_{h,x}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$\textit{donc}\quad v^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{-1}{\gamma_{h,x}}\ln\left(1-\frac{R_{h,x}(t)\gamma_{h,x}}{I_{h,x}}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v^{pl}_{z,CP}(t)=\begin{cases}U^{pl}_{z,CP}(t)\ \ si\ \ 27\,V_{lim}>64\,F_{z,max}\\ -U^{pl}_{z,CP}(t)\ \ si\ \ 27\,V_{lim}<64\,F_{z,max}\end{cases}\quad car\ \ dv^{pl}_{z,CP}(t)=\left|dU^{pl}_{z,CP}(t)\right|$$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$U_x(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t),U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_D$, on est en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(50),\ U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(50),R_{h,x}(t)=R_{h,x}(50)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(75-t),\ U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{(75-t)}{25}+U^{pl}_{x,CP}(50)$$
$$U^{pl}_{x,CP}(t)=U^{pl}_{x,CP}(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_D$ où :

$$f_{CP}(50+t_D)=0=-F_z(50+t_D)-V_{lim}\left(1+\frac{R_{h,x}(50+t_D)-F_x(50+t_D)}{F_z(50+t_D)}\right)^3$$

D'où :

$$t_D=25\left(1-\frac{R_{h,x}(50)}{F_{x,max}}+\frac{F_{z,max}}{F_{x,max}}\left(1-\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

Entre $t=50+t_D$ et $t=75$, on entre en plasticité sur le critère de capacité portante :

$$f_{CP}(t)=0=F_{z,max}-V_{lim}\left(1-\frac{R_{h,x}(t)-F_x(t)}{F_{z,max}}\right)^3 d'où\ R_{h,x}(t)=F_x(t)+F_{z,max}\left(1-\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

A partir des équations d'écoulement :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)d\lambda_{CP}(t)$$
$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=-3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}d\lambda_{CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient la relation entre $U^{pl}_{x,CP}(t)$ et $U^{pl}_{z,CP}(t)$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)-U^{pl}_{x,CP}(50+t_D)=\frac{-U^{pl}_{z,CP}(t)-U^{pl}_{z,CP}(50+t_D)}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

En écrivant l'équation de l'écrouissage cinématique :

$$dR_{h,x}=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-I_{h,x}}{\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dv^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$R_{h,x}(t)-R_{h,x}(50+t_D)=$$
$$\frac{I_{h,x}}{\gamma_{h,x}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{\lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}\left(\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}(t)\right)-\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}(50+t_D)\right)\right)$$

donc

$$v^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{-1}{\gamma_{h,x}}\ln\left(\frac{\left(R_{h,x}(t)-R_{h,x}(50+t_D)\right)\gamma_{h,x}}{I_{h,x}}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{\lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)+\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}(50+t_D)\right)\right)$$

On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v^{pl}_{z,CP}(t)=\begin{cases}U^{pl}_{z,CP}(t)\ si\ 27V_{lim}>64F_{z,max}\\ -U^{pl}_{z,CP}(t)\ si\ 27V_{lim}<64F_{z,max}\end{cases}\ car\ dv^{pl}_{z,CP}(t)=\left|dU^{pl}_{z,CP}(t)\right|$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$U_x(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t), U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Entre $t=75$ et $t=75+t_{2D}$, on est en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max}\frac{(100-t)}{25}, U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(75)$$
$$U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(75), R_{h,x}(t)=R_{h,x}(75)$$
$$F_x(t)=0,\ U_x(t)=U^{pl}_{x,CP}(75),\quad U^{pl}_{x,CP}(t)=U^{pl}_{x,CP}(75)$$

Jusqu'à rencontrer le critère de capacité portante en $t=75+t_{2D}$:

$$f_{CP}=0=-F_z(75+t_{2D})-V_{lim}\left(1+\frac{R_{h,x}(75+t_{2D})-F_x(75+t_{2D})}{F_z(75+t_{2D})}\right)^3$$

On passe ainsi sur le critère de capacité portante avec $1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}>0$:

$$f_{CP}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{R_{h,x}(t)}{F_z(t)}\right)^3 d'où\ \ R_{h,x}(t)=-F_z(t)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$d'où\ \ dR_{h,x}(t)=-\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)dF_z(t)$$

Les équations d'écoulement permettent d'aboutir à :

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

En écrivant la définition de l'écrouissage cinématique :

$$dR_{h,x}=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-I_{h,x}}{\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dv^{pl}_{z,CP}(t)$$

On arrive alors à une relation entre $F_z(t)$ et $v^{pl}_{z,CP}(t)$

$$\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 dF_z(t)=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dv^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$d\left(2V_{lim}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{4}{3}}+F_z(t)\left(1+\frac{16}{15}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\right)=d\left(\frac{-I_{h,x}}{\gamma_{h,x}}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)\right)$$

Ainsi on peut anticiper la divergence du calcul à $t=t_{div}$ où :

$$\left(\begin{array}{c} 2V_{lim}\left(\left(\frac{-F_z(t_{div})}{V_{lim}}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(\frac{-F_z(75+t_{2D})}{V_{lim}}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \\ +F_z(t_{div})\left(1+\frac{16}{15}\left(\frac{-F_z(t_{div})}{V_{lim}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)-F_z(75+t_{2D})\left(1+\frac{16}{15}\left(\frac{-F_z(75+t_{2D})}{V_{lim}}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \\ -\frac{I_{h,x}}{\gamma_{h,x}}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}(75+t_{2D})\right) \end{array}\right)=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On a $v_{z,CP}^{pl}(t_{div})=+\infty$ (ce qui correspond à un écrouissage qui ne peut plus évoluer) et donc divergence du calcul, il est à noter que pour tous les chargements $t_{fin}<t_{div}$.
On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v_{z,CP}^{pl}(t)=v_{z,CP}^{pl}(75+t_{2D})+\left(U_{z,CP}^{pl}(t)-U_{z,CP}^{pl}(75+t_{2D})\right)$$

On peut obtenir $U_{x,CP}^{pl}(t)$ par résolution pas à pas de la relation.

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$U_x(t)=U_{x,CP}^{pl}(t),\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

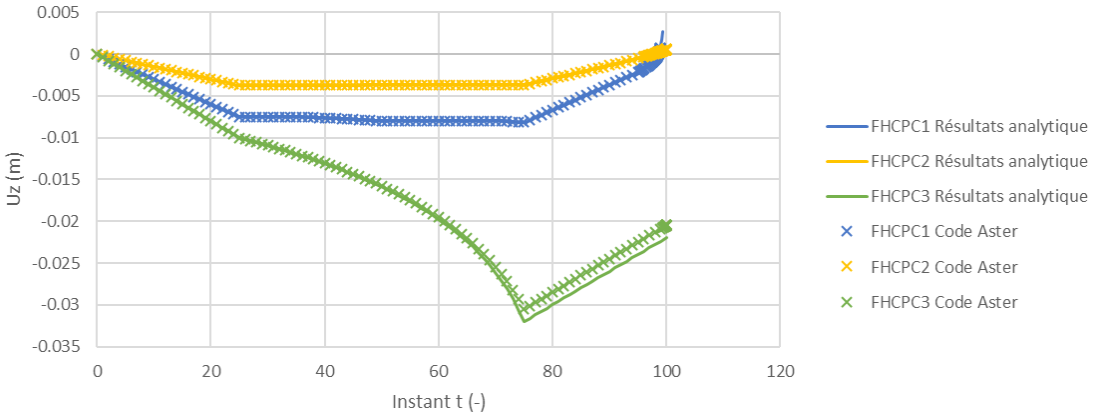
19.1.4 Grandeurs testées et résultats

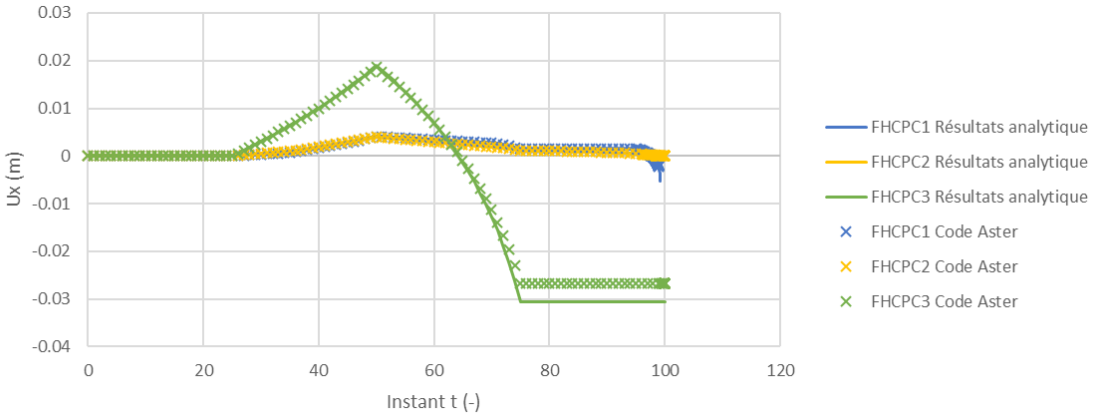
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	75	FHCPC1	-0.008201717	1.0 %
DX	50	FHCPC1	0.004126924	10 %
V13 ($R_{h,x}$)	50	FHCPC1	75.13617785 analytique	0.001 %
V6 ($U_{x,CP}^{pl}$)	75	FHCPC1	0.001468014	2.0 %
DZ	100	FHCPC2	0.000529773	2.0 %
DX	50	FHCPC2	0.00395505	0.1 %
V13 ($R_{h,x}$)	75	FHCPC2	83.66256445 analytique	0.001 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	100	FHCPC2	0.000529773	2.0 %
DZ	50	FHCPC3	-0.015877867	1.0 %
DX	75	FHCPC3	-0.030649537	15.0 %
V13 ($R_{h,x}$)	99	FHCPC3	0.0 analytique	0.001 %
V21 ($v_{z,CP}^{pl}$)	50	FHCPC3	0.005877867	10 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

19.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements (en x et z) du Code Aster aux déplacements analytique attendus :





L'écrouissage cinématique est exacte car le chargement est en force. La relation entre l'écrouissage et le déplacement plastique vertical est exponentiel, de plus code Aster effectue le calcul de manière incrémentale au contraire de la solution analytique qui est exacte ce qui explique des écarts qui commencent à être visible (surtout pour FHCPC3) lorsque l'on approche de la limite de l'écrouissage.
La relation entre le déplacement plastique horizontal et vertical étant linéaire jusqu'à t=75, L'écart entre la solution analytique et le code Aster reste similaire pour le déplacement vertical et le déplacement horizontal.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

20 Modélisation r : FMiso

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le critère de capacité portante avec écrouissage isotrope dans le cas d'un chargement et déchargement vertical puis en rotation (FMCPI1, FMCPI2 et FMCPI3)

20.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z et trois chargements M_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
F_z	0.	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	0
M_x	0.	0.	$M_{x,max}$	0.	0.

Avec le tableau suivant donnant les valeurs des paramètres par chargement :

Chargement	FMCPI1	FMCPI2	FMCPI3
$F_{z,max}(kN)$	600	300	800
$M_{x,max}(kN.m)$	130	125	75

20.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI: Pour tous les chargements $\phi_{inter}=45°$, aucun impact sur les calculs car pas de glissement ;
- CP_ULTIME : Pour le chargement FMCPI1, $V_{ult}=1600\ kN$, pour FMCPI2 $V_{ult}=2000\ kN$ et pour FMCPI3, $V_{ult}=1300\ kN$;
- DEPL_REFE : Pour le chargement FMCPI1, $v_{pl,r}^{CP}=2\ cm$, pour FMCPI2 $v_{pl,r}^{CP}=7{,}5\ mm$ et pour FMCPI3, $v_{pl,r}^{CP}=3\ cm$;

20.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=\frac{-F_{z,max}t}{25},\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}=\frac{-F_{z,max}t}{25\ K_{zz}},\ U_{z,CP}^{pl}(t)=0$$

$$M_x(t)=0,\ \theta_x(t)=0,\ \theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\ R(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on reste est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}},\ U_{z,CP}^{pl}(t)=0$$

$$M_x(t)=\frac{M_{x,max}}{25}(t-25),\ \theta_x(t)=\frac{M_x}{K_{rx,rx}}=\frac{M_{x,max}}{K_{rx,rx}}\frac{t-25}{25}\ ,\ \theta_{x,CP}^{pl}(t)=0,\ R(t)=0$$

Jusqu'à ce que $f_{CP}(25+t_C)=0=-F_z(25+t_C)-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(25+t_C)}{L_y F_z(25+t_C)}\right)$ d'où

$$t_C=\frac{25\,L_y F_{z,max}}{2\ M_{x,max}}\left(1-\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=t_C$ et $t=50$, on est dans le domaine plastique sur le critère de capacité portante avec écrouissage isotrope :

$$f_{CP}(t)=0=F_{z,max}-(V_{lim}+R(t))\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_y F_{z,max}}\right) d'où\ \ R(t)=\frac{F_{z,max}}{\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_y F_{z,max}}\right)}-V_{lim}$$

On obtient directement le déplacement plastique à partir de l'écrouissage isotrope :

$$R(t)=\frac{(V_{ult}-V_{lim})v^{pl}_{z,CP}(t)}{v^{pl}_{z,CP}(t)+v^{pl}_{r,CP}(t)}\ \ avec\ \ v^{pl}_{z,CP}(t)=\begin{cases} U^{pl}_{z,CP}(t) & si\ \ V_{lim}+R(t)>2F_{z,max} \\ -U^{pl}_{z,CP}(t) & si\ \ V_{lim}+R(t)<2F_{z,max} \end{cases}$$

A partir des équations d'écoulement :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(\frac{(V_{lim}+R(t))}{-F_z(t)}-2\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\lambda_{CP}(t)=\frac{(V_{lim}+R(t))}{-F_z(t)}\frac{2}{L_y}d\lambda_{CP}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{1-2\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}+R(t)}\right)}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient ainsi la relation entre $\theta^{pl}_{x,CP}(t)$ et $v^{pl}_{z,CP}(t)$

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{\left(1-2\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}+\frac{(V_{ult}-V_{lim})v^{pl}_{z,CP}(t)}{v^{pl}_{z,CP}(t)+v^{pl}_{r,CP}}}\right)\right)}dv^{pl}_{z,CP}$$

Si $V_{lim}+R(t)>2F_{z,max}$:

$$\frac{L_y}{2}\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{2(V_{ult}-V_{lim})F_{z,max}v^{pl}_{r,CP}}{(V_{ult}-2F_{z,max})^2}\ln\left(1-\frac{(2F_{z,max}-V_{ult})v^{pl}_{z,CP}(t)}{(2F_{z,max}-V_{lim})v^{pl}_{r,CP}}\right)+\frac{V_{ult}v^{pl}_{z,CP}(t)}{V_{ult}-2F_{z,max}}$$

Si $V_{lim}+R(t)<2F_{z,max}$:

$$\frac{L_y}{2}\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2(V_{ult}-V_{lim})F_{z,max}v^{pl}_{r,CP}}{(V_{ult}-2F_{z,max})^2}\ln\left(1-\frac{(2F_{z,max}-V_{ult})v^{pl}_{z,CP}(t)}{(2F_{z,max}-V_{lim})v^{pl}_{r,CP}}\right)+\frac{V_{ult}v^{pl}_{z,CP}(t)}{V_{ult}-2F_{z,max}}$$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous les déplacements totaux :

$$\theta_x(t)=\frac{M_x(t)}{K_{rx,rx}}+\theta^{pl}_{x,CP}(t), U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Entre $t=50$ et $t=75$, on reste uniquement en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\quad U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(50),\quad U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(50),\ R(t)=R(50)$$

$$M_x(t)=M_{x,max}\frac{(75-t)}{25},\quad \theta^{pl}_{x,CP}(t)=\theta^{pl}_{x,CP}(50),\quad \theta_x(t)=\frac{M_{x,max}}{K_{rx,rx}}\frac{(75-t)}{25}+\theta^{pl}_{x,CP}(50)$$

Entre $t=75$ et $t=100$, on reste uniquement en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max}\frac{(100-t)}{25},\quad U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(50),\quad U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}\frac{(100-t)}{25}+U^{pl}_{z,CP}(50)$$

$$M_x(t)=0,\quad \theta^{pl}_{x,CP}(t)=\theta^{pl}_{x,CP}(50),\quad \theta_x(t)=\theta^{pl}_{x,CP}(50),\ R(t)=R(50)$$

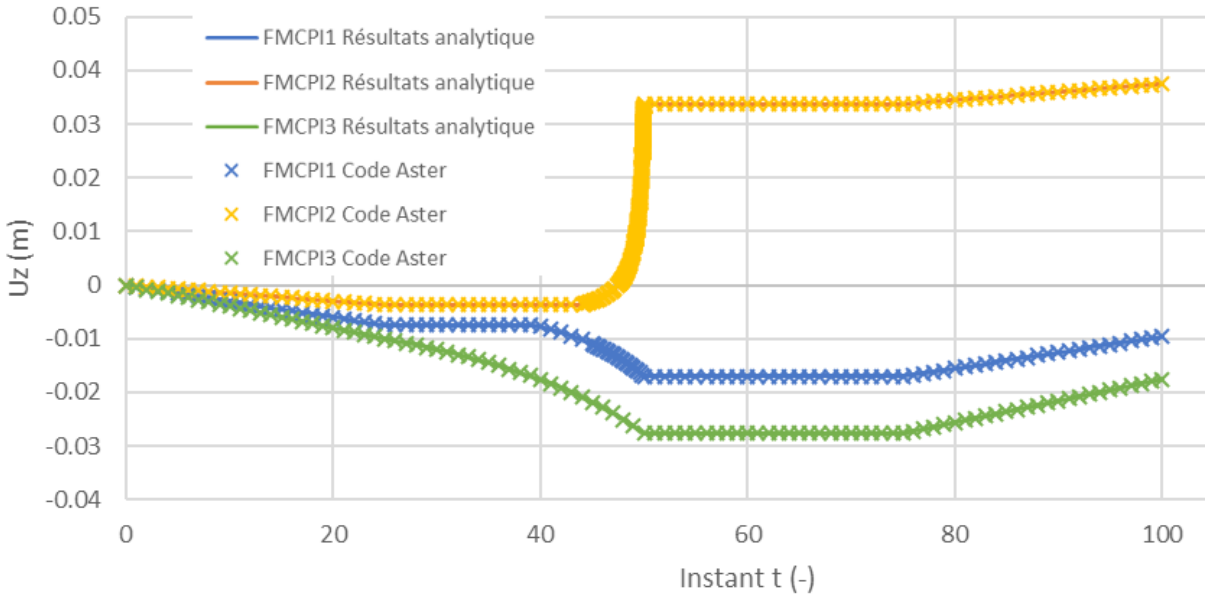
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

20.1.4 Grandeurs testées et résultats

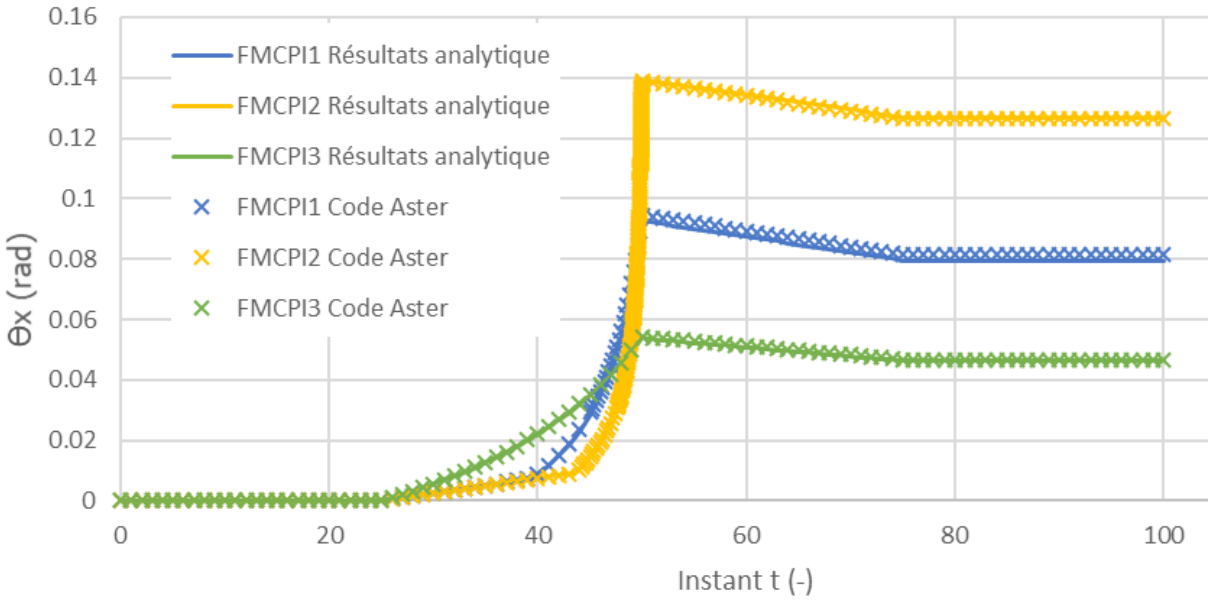
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	100	FMCPI1	-0.009565217 analytique	0.001 %
DRX	50	FMCPI1	0.092619277	5.0 %
V15 (R)	75	FMCPI1	258.8235294 analytique	0.001 %
V9 ($\theta^{pl}_{x,CP}$)	100	FMCPI1	0.079619277	5.0 %
DZ	50	FMCPI2	0.03375 analytique	0.001 %
DRX	75	FMCPI2	0.126888778	0.5 %
V15 (R)	100	FMCPI2	1000 analytique	0.001 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	50	FMCPI2	0.0375 analytique	0.001 %
DZ	75	FMCPI3	-0.027560976 analytique	0.001 %
DX	100	FMCPI3	0.046354621	1.0 %
V15 (R)	50	FMCPI3	184.6153846 analytique	0.001 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	75	FMCPI3	0.017560976 analytique	0.001 %

20.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements du Code Aster aux déplacements analytique attendus :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



Excepté la rotation, les résultats correspondent exactement puisque :

- Le chargement est en force donc l'écrouissage est exact ;
- L'écrouissage isotrope en capacité portante est géré de manière exacte donc le déplacement vertical plastique en capacité portante est exact ;

L'écart pour la rotation plastique vient du fait que la relation entre déplacement plastique vertical et la rotation plastique n'est pas linéaire, dans Aster le calcul est incrémental, d'où un écart entre les deux résultats (<1.0 %) ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

21 Modélisation s : FMcine

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le critère de capacité portante avec écrouissage cinématique dans le cas d'un chargement et déchargement vertical puis en rotation (FMCPC1, FMCPC2 et FMCPC3)

21.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z et trois chargements M_x avec la carte de temps suivant (les autres déplacements sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
F_z	0.	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	0
M_x	0.	0.	$M_{x,max}$	0.	0.

Il est à noter que pour certains chargements, on ne peut atteindre $t=100$, car il y a divergence auparavant. Ainsi les chargements sont arrêtés à t_{fin}.

Avec le tableau suivant donnant les valeurs des paramètres par chargement :

Chargement	FMCPC1	FMCPC2	FMCPC3
$F_{z,max}(kN)$	300	350	500
$M_{x,max}(kN.m)$	200	225	225
t_{fin}	100	81	100

21.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements $\phi_{inter}=45°$, aucun impact sur les calculs car pas de glissement ;
- RAID_CP_RX : Pour le chargement FMCPC1, $I_{r,x}=10\ 000\ kN.m.rad^{-1}$ pour FHCPC2, $I_{r,x}=5\ 000\ kN.m.rad^{-1}$ et pour FMCPC3, $I_{r,x}=20\ 000\ kN.m.rad^{-1}$;
- GAMMA_CP_RX : Pour le chargement FMCPC1, $\gamma_{r,x}=10\ m^{-1}$, pour FMCPC2, $\gamma_{r,x}=450\ m^{-1}$ et FMCPC3, $\gamma_{r,x}=100\ m^{-1}$;

21.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=\frac{-F_{z,max}t}{25},\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}=\frac{-F_{z,max}t}{25\ K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=0$$

$$M_x(t)=0,\ \theta_x(t)=0,\ \theta^{pl}_{x,CP}(t)=0,\ R_{r,x}(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on reste est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=0$$

$$M_x(t)=\frac{M_{x,max}}{25}(t-25),\ \theta_x(t)=\frac{M_x}{K_{rx,rx}}=\frac{M_{x,max}}{K_{rx,rx}}\frac{t-25}{25}\ ,\ \theta^{pl}_{x,CP}(t)=0,\ R_{r,x}(t)=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Jusqu'à ce que $f_{CP}(25+t_C)=0=-F_z(25+t_C)-V_{lim}\left(1+\frac{2M_x(25+t_C)}{L_y F_z(25+t_C)}\right)$ d'où

$$t_C=\frac{25\,L_y F_{z,max}}{2\;M_{x,max}}\left(1-\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)$$

Entre $t=t_C$ et $t=50$, on est dans le domaine plastique sur le critère de capacité portante avec écrouissage cinématique :

$$f_{CP}(t)=0=F_{z,max}-V_{lim}\left(1-\frac{2\left(M_x(t)-R_{m,x}(t)\right)}{L_y F_{z,max}}\right)$$

$$\text{d'où } R_{r,x}(t)=M_x(t)-\frac{L_y F_{z,max}}{2}\left(1-\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)$$

A partir des équations d'écoulement :

$$d\,U^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\,\lambda_{CP}(t)=\left(\frac{V_{lim}}{-F_z(t)}-2\right)\;d\,\lambda_{CP}(t)$$

$$d\,\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial M_x}d\,\lambda_{CP}(t)=\frac{V_{lim}}{-F_z(t)}\frac{2}{L_y}d\,\lambda_{CP}(t)=\frac{2}{L_y}\frac{1}{1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}}d\,U^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient la relation entre $\theta^{pl}_{x,CP}(t)$ et $U^{pl}_{z,CP}(t)$

$$\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{2U^{pl}_{z,CP}(t)}{L_y\left(1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)}$$

En écrivant l'équation de l'écrouissage cinématique :

$$d\,R_{r,x}=I_{r,x}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{2I_{r,x}}{L_y\left(1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)d\theta^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$R_{r,x}(t)=\frac{2I_{r,x}\left(1-\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}(t)\right)\right)}{L_y\gamma_{r,x}\left(1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)}$$

$$\text{donc } v^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{-1}{\gamma_{r,x}}\ln\left(1-\frac{L_y R_{r,x}(t)\gamma_{r,x}}{2I_{r,x}}\left(1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)\right)$$

On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v^{pl}_{z,CP}(t)=\begin{cases}U^{pl}_{z,CP}(t)\;\; si\;\; V_{lim}>2F_{z,max}\\ -U^{pl}_{z,CP}(t)\;\; si\;\; V_{lim}<2F_{z,max}\end{cases}\quad car\;\; dv^{pl}_{z,CP}(t)=\left|dU^{pl}_{z,CP}(t)\right|$$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$\theta_x(t)=\frac{M_x(t)}{K_{rx,rx}}+\theta^{pl}_{x,CP}(t),U_z(t)=-\frac{F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_D$, on est en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\;\; U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(50),\;\; U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(50),R_{h,x}(t)=R(50)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$M_x(t)=\frac{M_{x,max}}{25}(75-t),\ \theta_x(t)=\frac{M_x}{K_{rx,rx}}+\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{M_{x,max}}{K_{rx,rx}}\frac{(75-t)}{25}+\theta^{pl}_{x,CP}(50)$$
$$\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\theta^{pl}_{x,CP}(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_D$ où :

$$f_{CP}(50+t_D)=0=-F_z(50+t_D)-V_{lim}\left(1+\frac{2\left(R_{r,x}(50+t_D)-M_x(50+t_D)\right)}{L_y F_z(50+t_D)}\right)$$

D'où :

$$t_D=25\left(1-\frac{L_y}{2}\frac{F_{z,max}}{M_{x,max}}\left(1-\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)-\frac{R_{r,x}(50)}{M_{x,max}}\right)$$

Entre $t=50+t_D$ et $t=75$, on entre en plasticité sur le critère de capacité portante :

$$f_{CP}(t)=0=F_{z,max}-V_{lim}\left(1-\frac{2\left(R_{r,x}(t)-M_x(t)\right)}{L_y F_{z,max}}\right)$$
$$\text{d'où } R_{m,x}(t)=M_x(t)+\frac{L_y F_{z,max}}{2}\left(1-\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)$$

A partir des équations d'écoulement :

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient la relation entre $\theta^{pl}_{x,CP}(t)$ et $U^{pl}_{z,CP}(t)$:

$$\theta^{pl}_{x,CP}(t)-\theta^{pl}_{x,CP}(50+t_D)=\frac{-2}{L_y}\frac{U^{pl}_{z,CP}(t)-U^{pl}_{z,CP}(50+t_D)}{1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}}$$

En écrivant l'équation de l'écrouissage cinématique :

$$dR_{r,x}=I_{r,x}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{I_{r,x}}{\left(1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dv^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$R_{m,x}(t)-R_{m,x}(50+t_D)=$$
$$\frac{2}{L_y}\frac{I_{r,x}}{\gamma_{r,x}\left(1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)}\left(\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}(t)\right)-\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}(50+t_D)\right)\right)$$

Donc :

$$v^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{-1}{\gamma_{r,x}}\ln\left(\frac{L_y}{2}\frac{\left(R_{r,x}(t)-R_{r,x}(50+t_D)\right)\gamma_{r,x}}{I_{r,x}}\left(1-2\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)+\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}(50+t_D)\right)\right)$$

On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v^{pl}_{z,CP}(t)=\begin{cases}U^{pl}_{z,CP}(t) & si\ V_{lim}>2F_{z,max}\\ -U^{pl}_{z,CP}(t) & si\ V_{lim}<2F_{z,max}\end{cases}\quad car\ dv^{pl}_{z,CP}(t)=\left|dU^{pl}_{z,CP}(t)\right|$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$U_x(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t), U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)$$

Entre $t=75$ et $t=75+t_{2D}$, on est en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max}\frac{(100-t)}{25}, U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(75)$$
$$U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(75), R_{r,x}(t)=R_{r,x}(75)$$
$$M_x(t)=0,\ \theta_x(t)=\theta^{pl}_{x,CP}(75),\quad \theta^{pl}_{x,CP}(t)=\theta^{pl}_{x,CP}(75)$$

Jusqu'à rencontrer le critère de capacité portante en $t=75+t_{2D}$:

$$f_{CP}=0=-F_z(75+t_{2D})-V_{lim}\left(1+\frac{2}{L_y}\frac{R_{m,x}(75+t_{2D})-M(75+t_{2D})}{F_z(75+t_{2D})}\right)$$
$$Si\ V_{lim}>2F_{z,max},\ t_{2D}=0\ sinon\ t_{2D}=25\left(2-\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)$$

On passe ainsi sur le critère de capacité portante avec $1-\frac{2F_z(t)}{V_{lim}}>0$:

$$f_{CP}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{2}{L_y}\frac{R_{r,x}(t)}{F_z(t)}\right) d'où\ R_{r,x}(t)=\frac{-L_y}{2}F_z(t)\left(1+\frac{F_z(t)}{V_{lim}}\right)$$
$$d'où\ dR_{r,x}(t)=\frac{-L_y}{2}\left(1+2\frac{F_z(t)}{V_{lim}}\right)dF_z(t)$$

Les équations d'écoulement permettent d'aboutir à :

$$d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1+2\frac{F_z(t)}{V_{lim}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

En écrivant la définition de l'écrouissage cinématique :

$$dR_{r,x}=I_{r,x}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)d\theta^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{I_{r,x}}{1+2\frac{F_z(t)}{V_{lim}}}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dv^{pl}_{z,CP}(t)$$

On arrive alors à une relation entre $F_z(t)$ et $v^{pl}_{z,CP}(t)$

$$\left(\frac{L_y}{2}\right)^2\left(1+2\frac{F_z(t)}{V_{lim}}\right)^2 dF_z(t)=I_{r,x}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dv^{pl}_{z,CP}(t)$$
$$d\left(\frac{L_y^2F_z(t)}{12V_{lim}^2}\left(3V_{lim}^2+6V_{lim}F_z(t)+4F_z^2(t)\right)\right)=d\left(\frac{-I_{r,x}}{\gamma_{r,x}}\exp\left(-\gamma_{r,x}v^{pl}_{z,CP}\right)\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ainsi on peut anticiper la divergence du calcul à $t=t_{div}$ où :

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{L_y F_z(t_{div})}{6V_{lim}^2}\left(3V_{lim}^2+6V_{lim}F_z(t_{div})+4F_z^2(t_{div})\right)\\ -\frac{L_y F_z(75+t_{2D})}{6V_{lim}^2}\left(3V_{lim}^2+6V_{lim}F_z(75+t_{2D})+4F_z^2(75+t_{2D})\right)\\ -\frac{I_{r,x}}{\gamma_{r,x}}\exp\left(-\gamma_{r,x}v_{z,CP}^{pl}(75+t_{2D})\right)\end{array}\right\}=0$$

On a $v_{z,CP}^{pl}(t_{div})=+\infty$ (ce qui correspond à un écrouissage qui ne peut plus évoluer) et donc divergence du calcul, il est à noter que pour tous les chargements $t_{fin}<t_{div}$.
On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v_{z,CP}^{pl}(t)=v_{z,CP}^{pl}(75+t_{2D})+\left(U_{z,CP}^{pl}(t)-U_{z,CP}^{pl}(75+t_{2D})\right)$$

On peut obtenir $\theta_{x,CP}^{pl}(t)$ par résolution pas à pas de la relation.

$$d\theta_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-2}{L_y}\frac{1}{1+2\frac{F_z(t)}{V_{lim}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$\theta_x(t)=\theta_{x,CP}^{pl}(t),\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)$$

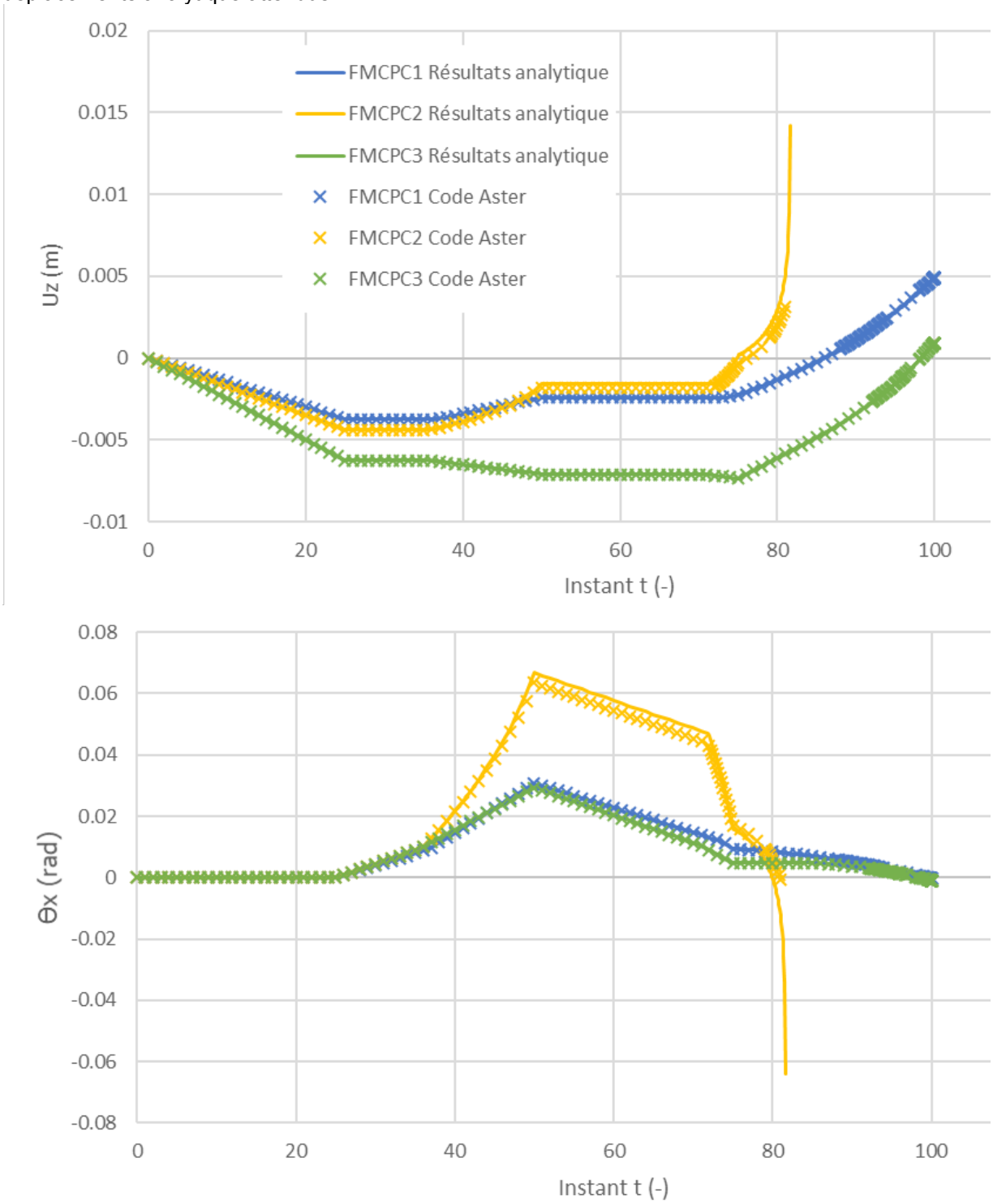
21.1.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	75	FMCPC1	-0.002254498	1.0 %
DRX	100	FMCPC1	-0.000223032	10 %
V16 ($R_{r,x}$)	50	FMCPC1	106.25 analytique	0.001 %
V9 ($\theta_{x,CP}^{pl}$)	75	FMCPC1	0.009428359	2.0 %
DZ	50	FMCPC2	-0.001609452	2.0 %
DRX	75	FMCPC2	0.015924275	0.1 %
V16 ($R_{r,x}$)	75	FMCPC2	98.4375 analytique	0.001 %
V8 ($U_{z,CP}^{pl}$)	50	FMCPC2	0.002765548	2.0 %
DZ	50	FMCPC3	-0.007105919	1.0 %
DRX	75	FMCPC3	0.004778274	15.0 %
V16 ($R_{r,x}$)	100	FMCPC3	0.0 analytique	0.001 %
V21 ($v_{z,CP}^{pl}$)	50	FMCPC3	0.000855919	10 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

21.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements (en Θx et z) du Code Aster aux déplacements analytique attendus :



L'écrouissage cinématique est exacte car le chargement est en force. La relation entre l'écrouissage et le déplacement plastique vertical est exponentiel, de plus code Aster effectue le calcul de manière incrémentale au contraire de la solution analytique qui est exacte ce qui explique des écarts qui commencent à être visible (surtout pour FMCPC3) lorsque l'on approche de la limite de l'écrouissage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La relation entre le déplacement plastique vertical et la rotation plastique étant linéaire jusqu'à t=75, L'écart entre la solution analytique et le code Aster reste similaire pour le déplacement vertical et le déplacement horizontal.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

22 Modélisation t : FHslid

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le critère de glissement avec écrouissage cinématique dans le cas d'un chargement et déchargement vertical puis horizontal (FHGC1, FHGC2 et FHGC3)

22.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z et trois chargements F_x avec la carte de temps suivant (les autres efforts sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
F_z	0.	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	0.
F_x	0.	0.	$F_{x,max}$	0.	0.

Il est à noter que pour certains chargements, on ne peut atteindre $t=100$, car il y a divergence auparavant. Ainsi les chargements sont arrêtés à t_{fin}.
Lee tableau suivant donnant les valeurs des paramètres par chargement :

Chargement	FHGC1	FHGC2	FHGC3
$F_{z,max}(kN)$	600	800	900
$F_{x,max}(kN)$	130	95	200
t_{fin}	100	82.8	100

22.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements $\phi_{inter}=5°$, pour faire intervenir le critère de glissement ;
- CP_SERVICE : Pour les chargements FHGC1 et FHGC2, $V_{lim}=1600\ kN$, pour FHGC3 $V_{lim}=2000\ kN$ afin de ne pas rencontrer le critère de capacité portante ;
- RAID_GLIS : Pour le chargement FHGC1, $H_h=75\ 000\ kN.m^{-1}$, pour le chargement FHGC2, $H_h=30\ 000\ kN.m^{-1}$, pour FHGC3 $H_h=100\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour le chargement FHGC1, $\gamma=450\ m^{-1}$, pour le chargement FHGC2, $\gamma=1\ 000\ m^{-1}$, pour FHGC3 $\gamma=200\ m^{-1}$;

22.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=\frac{-F_{z,max}t}{25},\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}=\frac{-F_{z,max}t}{25\ K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=0$$

$$F_x(t)=0,\ U_x(t)=0,\ U^{pl}_{x,CP}(t)=0,\ R(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on reste est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=0$$

$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(t-25),\ U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{t-25}{25}\ ,\ U^{pl}_{x,CP}(t)=0,\ R(t)=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Jusqu'à ce que $f_G(25+t_C)=0=F_x(25+t_C)+\tan\phi_{inter}F_z(25+t_C)$ d'où :

$$t_c=25\tan\phi_{inter}\frac{F_{z,max}}{F_{x,max}}$$

Entre $t=t_C$ et $t=50$, on est dans le domaine plastique sur le critère de glissement avec écrouissage cinématique :

$$f_G(t)=0=F_x(t)-q_{h_x}(t)+\tan\phi_{inter}F_z(t) \quad d'où \quad q_{h_x}(t)=F_x(t)-\tan\phi_{inter}F_{z,max}$$

A partir de l'expression de l'écrouissage cinématique du glissement :

$$dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma U^{pl}_{x,s}(t)\right)dU^{pl}_{x,s}(t)=d\left(\frac{-H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma U^{pl}_{x,s}(t)\right)\right) \quad car \quad U^{pl}_{x,s}(t)>0$$

Donc :

$$q_{h_x}(t)=\frac{H_h}{\gamma}\left(1-\exp\left(-\gamma U^{pl}_{x,s}(t)\right)\right) \quad d'où \quad U^{pl}_{x,s}(t)=-\frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma q_{h_x}(t)}{H_h}\right)$$

Comme on a écoulement associé :

$$dU^{pl}_{x,s}=\frac{\partial f_G}{\partial F_x}d\lambda_G=d\lambda_G \text{ et } dU^{pl}_{z,s}=\frac{\partial f_G}{\partial F_z}d\lambda_G=\tan\phi_{inter}d\lambda_G$$

$$\text{donc } dU^{pl}_{z,s}=\tan\phi_{inter}dU^{pl}_{x,s}$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_D$, on est en élasticité :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(50),\ U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(50), q_¿(t)=q_¿(50)$$

$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(75-t),\ U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}+U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{(75-t)}{25}+\ U^{pl}_{x,CP}(50)$$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)=U^{pl}_{x,CP}(50)$$

Jusqu'à $t=50+t_D$ où : $f_G(50+t_D)=0=q_{h_x}(50+t_D)-F_x(50+t_D)+\tan\phi_{inter}F_z(50+t_D)$
D'où :

$$t_D=25\left(1-\frac{q_{h_x}(50)}{F_{x,max}}+\tan\phi_{inter}\frac{F_{z,max}}{F_{x,max}}\right)$$

Entre $t=50+t_D$ et $t=75$, on est dans le domaine plastique sur le critère de glissement avec écrouissage cinématique :

$$f_G(t)=0=q_{h_x}(t)-F_x(t)+\tan\phi_{inter}F_z(t) \quad d'où \quad q_{h_x}(t)=F_x(t)+\tan\phi_{inter}F_{z,max}$$

A partir de l'expression de l'écrouissage cinématique du glissement :

$$dq_{h_x}(t)=-H_h\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(t)\right)dv^{pl}_{x,s}(t)=d\left(\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(t)\right)\right) \quad car \quad dU^{pl}_{x,s}(t)<0$$

Donc :

$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(50)=\frac{H_h}{\gamma}\left(\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(t)\right)-\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(50)\right)\right)$$

$$d'où \quad v^{pl}_{x,s}(t)=\frac{-1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma}{H_H}\left(q_{h_x}(t)-q_{h_x}(50)\right)+\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(50)\right)\right)$$

On retrouve alors le déplacement plastique :

$$U^{pl}_{x,s}(t)=U^{pl}_{x,s}(50)+\left(v^{pl}_{x,s}(t)-v^{pl}_{x,s}(50)\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Comme on a écoulement associé :

$$dU_{x,s}^{pl}=\frac{\partial f_G}{\partial F_x}d\lambda_G=-d\lambda_G \quad et \quad dU_{z,s}^{pl}=\frac{\partial f_G}{\partial F_z}d\lambda_G=\tan\phi_{inter}d\lambda_G$$

$$\text{donc } dU_{z,s}^{pl}=-\tan\phi_{inter}dU_{x,s}^{pl}$$

$$U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(50)=-\tan\phi_{inter}\left(U_{x,s}^{pl}(t)-U_{x,s}^{pl}(50)\right)$$

Entre $t=75$ et $t=100$, on est dans le domaine plastique sur le critère de glissement avec écrouissage cinématique :

$$F_z(t)=-F_{z,max}\frac{(100-t)}{25},\ F_{h,max}=0$$

$$f_G(t)=0=q_{h_x}(t)-F_x(t)+\tan\phi_{inter}F_z(t) \ d'où \ q_{h_x}(t)=-\tan\phi_{inter}F_z(t)$$

A partir de l'expression de l'écrouissage cinématique du glissement :

$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(75)=\frac{H_h}{\gamma}\left(\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(75)\right)-\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)$$

$$d'où \quad v_{x,s}^{pl}(t)=-\frac{1}{\gamma}\ln\left(-\frac{\gamma}{H_H}\left(q_{h_x}(t)-q_{h_x}(75)\right)+\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(75)\right)\right)$$

Il est à noter que cette notation est valable tant que $-\frac{\gamma}{H_H}\left(q_{h_x}(t)-q_{h_x}(75)\right)+\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(75)\right)>0$, à $t=t_{div}$, on a $-\frac{\gamma}{H_H}\left(q_{h_x}(t)-q_{h_x}(75)\right)+\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(75)\right)=0$ d'où $v_{x,s}^{pl}(t_{div})=+\infty$ et ainsi divergence du modèle.

On retrouve alors le déplacement plastique :

$$U_{x,s}^{pl}(t)=U_{x,s}^{pl}(75)+\left(v_{x,s}^{pl}(t)-v_{x,s}^{pl}(75)\right)$$

Comme on a écoulement associé :

$$dU_{x,s}^{pl}=\frac{\partial f_G}{\partial F_x}d\lambda_G=-d\lambda_G \quad et \quad dU_{z,s}^{pl}=\frac{\partial f_G}{\partial F_z}d\lambda_G=\tan\phi_{inter}d\lambda_G$$

$$\text{donc } dU_{z,s}^{pl}=-\tan\phi_{inter}dU_{x,s}^{pl}$$

$$U_{z,s}^{pl}(t)-U_{z,s}^{pl}(75)=-\tan\phi_{inter}\left(U_{x,s}^{pl}(t)-U_{x,s}^{pl}(75)\right)$$

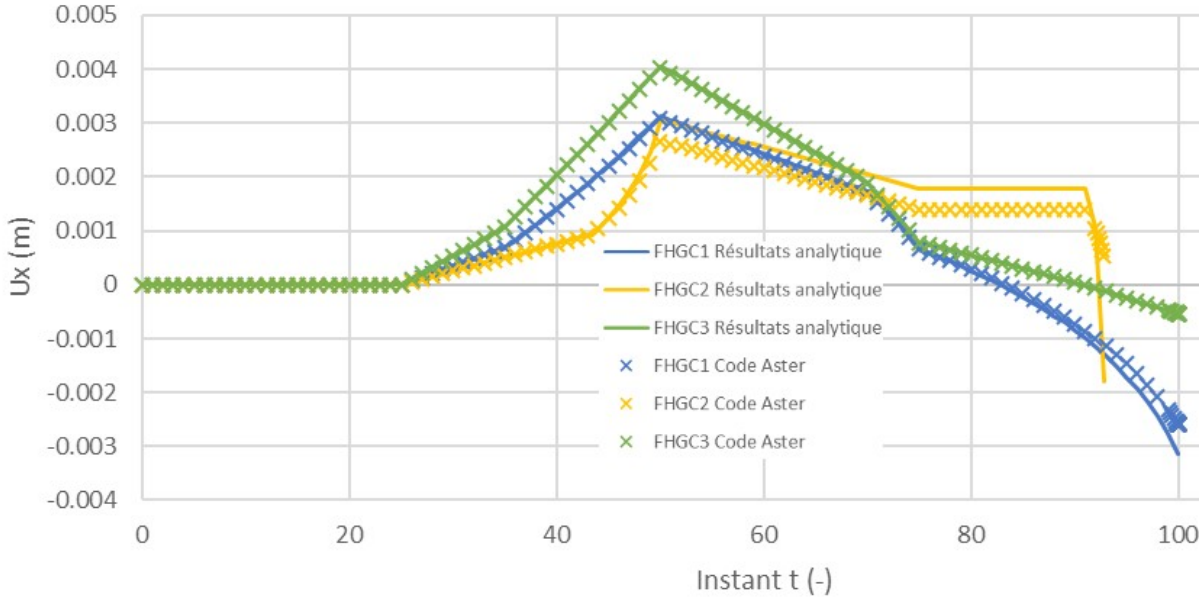
22.1.4 Grandeurs testées et résultats

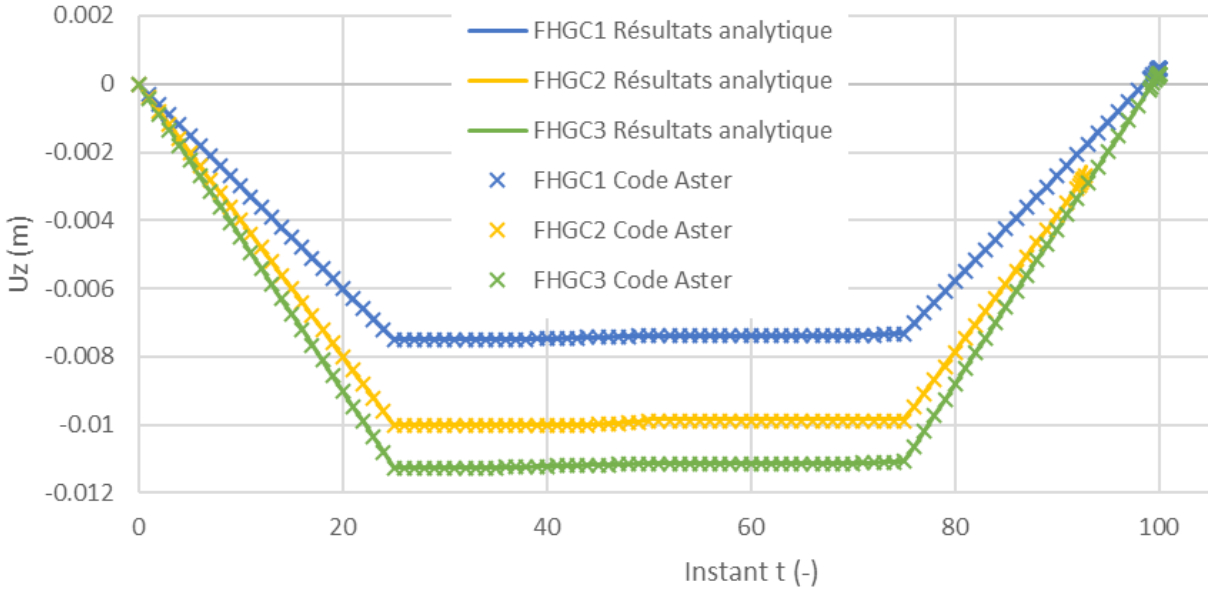
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	90	FHGC1	-0.002683069	1.0 %
DX	50	FHGC1	0.003123477	5.0 %
V11 (q_{h_x})	75	FHGC1	52.49319812 analytique	0.001 %
V1 ($U_{x,s}^{pl}$)	50	FHGC1	0.001390144	5.0 %
DZ	75	FHGC2	-0.009843083	2.0 %
DX	48	FHGC2	0.002033554	6 %
V11 (q_{h_x})	80	FHGC2	25.00906918 analytique	0.001 %
V3 ($U_{z,s}^{pl}$)	48	FHGC2	7.59595E-05	1.5 %
DZ	50	FHGC3	-0.011128496	0.1 %
DX	75	FHGC3	0.000793366	1.0 %
V11 (q_{h_x})	100	FHGC3	0.0 analytique	0.001 %
V19 ($v_{x,s}^{pl}$)	75	FHGC3	0.001984221	2.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

22.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements (en x et z) du Code Aster aux déplacements analytique attendus :





L'écrouissage cinématique est exacte car le chargement est en force. La relation entre l'écrouissage et le déplacement plastique horizontal est exponentiel, de plus code Aster effectue le calcul de manière incrémentale au contraire de la solution analytique qui est exacte ce qui explique des écarts qui commencent à être visible (surtout pour FHGC2) lorsque l'on approche de la limite de l'écrouissage.
La relation entre le déplacement plastique horizontal et vertical étant linéaire, l'écart entre la solution analytique et le code Aster reste similaire (avec un facteur $\tan(5°)$) pour le déplacement vertical et le déplacement horizontal.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

23 Modélisations u et v : FHslidCP

L'intérêt de ces modélisations est de vérifier le critère de glissement avec écrouissage cinématique en combinaison avec un critère de capacité portante avec écrouissage cinématique dans le cas d'un chargement et déchargement vertical puis horizontal (FHGCCPC1, FHGCCPC2 et FHGCCPC3)

23.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z et trois chargements F_x avec la carte de temps suivant (les autres efforts sont imposés nuls) :

t (-)	0.	25.	50.	75.	100.
F_z	0.	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	0.
F_x	0.	0.	$F_{x,max}$	0.	0.

Il est à noter que pour certains chargements, on ne peut atteindre $t=100$, car il y a divergence auparavant. Ainsi les chargements sont arrêtés à t_{fin}.
Lee tableau suivant donnant les valeurs des paramètres par chargement :

Chargement	FHGC1	FHGC2	FHGC3
$F_{z,max}(kN)$	600	300	800
$F_{x,max}(kN)$	130	190	100
t_{fin}	99	100	100

23.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements $\phi_{inter}=5°$, pour faire intervenir le critère de glissement ;
- RAID_GLIS : Pour le chargement FHGCCPC1, $H_h=15\ 000\ kN.m^{-1}$, pour le chargement FHGCCPC2, $H_h=10\ 000\ kN.m^{-1}$, pour FHGCCPC3 $H_h=2\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour le chargement FHGCCPC1, $\gamma=90\ m^{-1}$, pour les chargements FHGCCPC2 et FHGCCPC3, $\gamma=30\ m^{-1}$;
- RAID_CP_X : Pour le chargement FHGCCPC1, $I_{h,x}=40\ 000\ kN.m^{-1}$, pour FHGCCPC2, $I_{h,x}=75\ 000\ kN.m^{-1}$ et pour FHGCCPC3, $I_{h,x}=7\ 500\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_CP_X : Pour le chargement FHGCCPC1, $\gamma_{h,x}=1000\ m^{-1}$, pour FHGCCPC2 et FHGCCPC3, $\gamma_{h,x}=100\ m^{-1}$;

23.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=\frac{-F_{z,max}t}{25},\ U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}=\frac{-F_{z,max}t}{25\ K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,s}(t)=0$$

$$F_x(t)=0,\ U_x(t)=0,\ U^{pl}_{x,CP}(t)=U^{pl}_{x,s}(t)=0,\ R_{h,x}(t)=0, q_i(t)=0$$

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on reste est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}},\ U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,s}(t)=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(t-25),\ \ U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{t-25}{25}$$
$$U^{pl}_{x,CP}(t)=U^{pl}_{x,s}(t)=0,\ \ R_{h,x}(t)=0,\ \ q_{h,x}(t)=0$$

Jusqu'à atteindre le critère de glissement $f_G(25+t_C)=0$ ou de capacité portante $f_{CP}(25+t_C)=0$.

Entre $t=25+t_C$ et $t=25+t_{2C}$, on est en plasticité :
- Soit on parcourt le critère de glissement uniquement (cf. §3.20.3) ;
- Soit on parcourt le critère de capacité portante uniquement (cf. §3.17.3) ;

Jusqu'à $t=25+t_{2C}$ où $f_G(25+t_{2C})=0$ et $f_{CP}(25+t_{2C})=0$ 0 on passe alors en double critère.

Entre $t=25+t_{2C}$ et $t=50$, on est en double critère :

$$f_G(t)=0=F_x(t)-q_{h_x}(t)+F_z(t)\tan\phi_{inter}\ \ et\ \ f_{CP}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{F_x(t)-R_{h,x}(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$q_{h_x}(t)=F_x(t)-F_{z,max}\tan\phi_{inter}\ \ et\ \ R_{h,x}(t)=F_x(t)-\left(-F_z(t)\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

A partir de l'expression de l'écrouissage cinématique du glissement :

$$dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma U^{pl}_{x,s}(t)\right)dU^{pl}_{x,s}(t)=d\left(\frac{-H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma U^{pl}_{x,s}(t)\right)\right)\ \ car\ \ U^{pl}_{x,s}(t)>0$$

Donc :

$$q_{h_x}(t)=\frac{H_h}{\gamma}\left(1-\exp\left(-\gamma U^{pl}_{x,s}(t)\right)\right)\ \ d'où\ \ \ U^{pl}_{x,s}(t)=-\frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma q_{h_x}(t)}{H_h}\right)$$

Comme on a écoulement associé :

$$dU^{pl}_{x,s}=\frac{\partial f_G}{\partial F_x}d\lambda_G=d\lambda_G\ \ et\ \ dU^{pl}_{z,s}=\frac{\partial f_G}{\partial F_z}d\lambda_G=\tan\phi_{inter}d\lambda_G$$
donc $dU^{pl}_{z,s}=\tan\phi_{inter}dU^{pl}_{x,s}$

A partir de l'expression des équations de l'écoulement de la capacité portante :

$$dU^{pl}_{z,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\ d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}\ d\lambda_{CP}(t)=\frac{1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

On obtient la relation entre $U^{pl}_{x,CP}(t)$ et $U^{pl}_{z,CP}(t)$

$$U^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{U^{pl}_{z,CP}(t)}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En écrivant l'équation de l'écrouissage cinématique :

$$dR_{h,x}=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}\right)dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{I_{h,x}}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}\right)dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$R_{h,x}(t)=\frac{I_{h,x}\left(1-\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)\right)}{\gamma_{h,x}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$$

donc $$v_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{-1}{\gamma_{h,x}}\ln\left(1-\frac{R_{h,x}(t)\gamma_{h,x}}{I_{h,x}}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v_{z,CP}^{pl}(t)=\begin{cases}U_{z,CP}^{pl}(t) & si\ \ 27V_{lim}>64F_{z,max}\\ -U_{z,CP}^{pl}(t) & si\ \ 27V_{lim}<64F_{z,max}\end{cases}\quad car\ \ dv_{z,CP}^{pl}(t)=\left|dU_{z,CP}^{pl}(t)\right|$$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$U_x(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U_{x,CP}^{pl}(t)+U_{x,s}^{pl}(t),U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(t)+U_{z,s}^{pl}(t)$$

Entre $t=50$ et $t=50+t_D$, on reste dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max},\ \ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}+U_{z,CP}^{pl}(50)+U_{z,s}^{pl}(50)$$
$$U_{z,CP}^{pl}(t)=U_{z,CP}^{pl}(50),\quad U_{z,s}^{pl}(t)=U_{z,s}^{pl}(50)$$
$$F_x(t)=\frac{F_{x,max}}{25}(75-t)$$
$$U_x(t)=\frac{F_x}{K_{xx}}+\ U_{x,CP}^{pl}(t)+\ U_{x,s}^{pl}(t)=\frac{F_{x,max}}{K_{xx}}\frac{75-t}{25}+\ U_{x,CP}^{pl}(50)+U_{x,s}^{pl}(50)$$
$$U_{x,CP}^{pl}(t)=U_{x,CP}^{pl}(50),\quad U_{x,s}^{pl}(t)=U_{x,s}^{pl}(50),\ \ R_{h,x}(t)=R_{h,x}(50),\ \ q_{h,x}(t)=q_{h,x}(50)$$

Jusqu'à un des deux critères : $f_G(50+t_D)=0$ ou $f_{CP}(50+t_D)=0$.

Entre $t=50+t_D$ et $t=50+t_{2D}$, on est en plasticité :

- Soit on parcourt le critère de glissement uniquement (cf. §3.20.3) ;
- Soit on parcourt le critère de capacité portante uniquement (cf. §3.17.3) ;

Jusqu'à $t=50+t_{2D}$ où $f_G(50+t_{2D})=0$ et $f_{CP}(50+t_{2D})=0$, on passe alors en double critère.

Entre $t=50+t_{2D}$ et $t=75$, on est en double critère :

$$f_G(t)=0=q_{h_x}(t)-F_x(t)+F_z(t)\tan\phi_{inter}\ \ et\ \ f_{CP}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{R_{h,x}(t)-F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$q_{h_x}(t)=F_x(t)+F_{z,max}\tan\phi_{inter}\ \ et\ \ R_{h,x}(t)=F_x(t)+\left(-F_z(t)\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

A partir de l'expression de l'écrouissage cinématique du glissement :

$$dq_{h_x}(t)=-H_h\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(t)\right)dv_{x,s}^{pl}(t)=d\left(\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma v_{x,s}^{pl}(t)\right)\right)\ \ car\ \ dU_{x,s}^{pl}(t)<0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Donc :

$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(50+t_{2D})=\frac{H_h}{\gamma}\left(\exp\left(-\gamma\, v_{x,s}^{pl}(t)\right)-\exp\left(-\gamma\, v_{x,s}^{pl}(50+t_{2D})\right)\right)$$

$$d'où \quad v_{x,s}^{pl}(t)=\frac{-1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma}{H_h}\left(q_{h_x}(t)-q_{h_x}(50+t_{2D})\right)+\exp\left(-\gamma\, v_{x,s}^{pl}(50+t_{2D})\right)\right)$$

Avec $v_{x,s}^{pl}(t)-v_{x,s}^{pl}(50+t_{2D})=U_{x,s}^{pl}(50+t_{2D})-U_{x,s}^{pl}(t) \;\; car \;\; dU_{x,s}^{pl}(t)<0$

Comme on a écoulement associé :

$$dU_{x,s}^{pl}=\frac{\partial f_G}{\partial F_x}d\lambda_G=-d\lambda_G \text{ et } dU_{z,s}^{pl}=\frac{\partial f_G}{\partial F_z}d\lambda_G=\tan\phi_{inter}\,d\lambda_G$$

$$\text{donc } dU_{z,s}^{pl}=-\tan\phi_{inter}\,dU_{x,s}^{pl}$$

A partir de l'expression des équations de l'écoulement de la capacité portante :

$$dU_{z,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_z}d\lambda_{CP}(t)=\left(3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}-4\right)\,d\lambda_{CP}(t)$$

$$dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{\partial f_{cp}}{\partial F_x}d\lambda_{CP}(t)=-3\left(\frac{V_{lim}}{F_{z,max}}\right)^{\frac{1}{3}}\,d\lambda_{CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

On obtient la relation entre $U_{x,CP}^{pl}(t)$ et $U_{z,CP}^{pl}(t)$

$$U_{x,CP}^{pl}(t)-\;U_{x,CP}^{pl}(50+t_{2D})=\frac{-U_{z,CP}^{pl}(t)-U_{z,CP}^{pl}(50+t_{2D})}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

En écrivant l'équation de l'écrouissage cinématique :

$$dR_{h,x}=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}\right)dU_{x,CP}^{pl}(t)=\frac{-I_{h,x}}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}\right)dU_{z,CP}^{pl}(t)$$

$$R_{h,x}(t)-R_{h,x}(50+t_{2D})=\frac{I_{h,x}\left(\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}(50+t_{2D})\right)-\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}(t)\right)\right)}{\gamma_{h,x}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$$

$$v_{z,CP}^{pl}(t)=-\frac{1}{\gamma_{h,x}}\ln\left(\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}(50+t_{2D})\right)-\frac{\left(R_{h,x}(t)-R_{h,x}(50+t_{2D})\right)\gamma_{h,x}}{I_{h,x}}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{F_{z,max}}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

On peut obtenir le déplacement plastique vertical :

$$v_{z,CP}^{pl}(t)-v_{z,CP}^{pl}(50+t_{2D})=\begin{cases}U_{z,CP}^{pl}(t)-U_{z,CP}^{pl}(50+t_{2D}) & si \;\; 27\,V_{lim}>64\,F_{z,max}\\ U_{z,CP}^{pl}(50+t_{2D})-U_{z,CP}^{pl}(t) & si \;\; 27\,V_{lim}<64\,F_{z,max}\end{cases}$$

car $dv_{z,CP}^{pl}(t)=\left|dU_{z,CP}^{pl}(t)\right|$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$U_x(t)=\frac{F_x(t)}{K_{xx}}+U_{x,CP}^{pl}(t)+U_{x,s}^{pl}(t)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=75$ et $t=75+t_E$, on reste est dans le domaine élastique :

$$F_z(t)=-F_{z,max}\frac{(100-t)}{25},\ U_z(t)=\frac{-F_{z,max}}{K_{zz}}\frac{(100-t)}{25}+U^{pl}_{z,CP}(75)+U^{pl}_{z,s}(75)$$
$$U^{pl}_{z,CP}(t)=U^{pl}_{z,CP}(75)$$
$$U^{pl}_{z,s}(t)=U^{pl}_{z,s}(75),\ F_x(t)=0,\ U_x(t)=U^{pl}_{x,CP}(75)+U^{pl}_{x,s}(75)$$
$$U^{pl}_{x,CP}(t)=U^{pl}_{x,CP}(75),\quad U^{pl}_{x,s}(t)=U^{pl}_{x,s}(75)$$
$$R_{h,x}(t)=R_{h,x}(75),\ q_{h_x}(t)=q_{h_x}(75)$$

Jusqu'à un des deux critères : $f_G(75+t_E)=0$ ou $f_{CP}(75+t_E)=0$.

Entre $t=75+t_E$ et $t=75+t_{2E}$, on est en plasticité :
- Soit on parcourt le critère de glissement uniquement (cf. §3.20.3) ;
- Soit on parcourt le critère de capacité portante uniquement (cf. §3.17.3) ;

Jusqu'à $t=75+t_{2E}$ où $f_G(75+t_{2E})=0$ et $f_{CP}(75+t_{2E})=0$, on passe alors en double critère.

$$f_G(t)=0=q_{h_x}(t)-F_x(t)+F_z(t)\tan\phi_{inter}\ et\ f_{CP}(t)=0=-F_z(t)-V_{lim}\left(1+\frac{R_{h,x}(t)-F_x(t)}{F_z(t)}\right)^3$$

$$q_{h_x}(t)=-F_z(t)\tan\phi_{inter}\ et\ R_{h,x}(t)=\left(-F_z(t)\right)\left(1-\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$dq_{h_x}(t)=-\tan\phi_{inter}dF_z(t)\ et\ dR_{h,x}(t)=-\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)dF_z(t)$$

A partir de l'expression de l'écrouissage cinématique du glissement :

$$dq_{h_x}(t)=-H_h\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(t)\right)dv^{pl}_{x,s}(t)=d\left(\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(t)\right)\right)\ car\ dU^{pl}_{x,s}(t)<0$$

Donc :

$$q_{h_x}(t)-q_{h_x}(75+t_{2E})=\frac{H_h}{\gamma}\left(\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(t)\right)-\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(75+t_{2E})\right)\right)$$

$$d'où\quad v^{pl}_{x,s}(t)=-\frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma}{H_h}\left(q_{h_x}(t)-q_{h_x}(75+t_{2E})\right)+\exp\left(-\gamma v^{pl}_{x,s}(75+t_{2E})\right)\right)$$

Avec $^2v^{pl}_{x,s}(t)-v^{pl}_{x,s}(75+t_{2E})=U^{pl}_{x,s}(75+t_{2E})-U^{pl}_{x,s}(t)\ \ car\ \ dU^{pl}_{x,s}(t)<0$

Comme on a écoulement associé :

$$dU^{pl}_{x,s}=\frac{\partial f_G}{\partial F_x}d\lambda_G=-d\lambda_G\ \ et\ \ dU^{pl}_{z,s}=\frac{\partial f_G}{\partial F_z}d\lambda_G=\tan\phi_{inter}d\lambda_G$$

$$donc\ \ dU^{pl}_{z,s}=-\tan\phi_{inter}dU^{pl}_{x,s}$$

A partir de l'expression des équations de l'écoulement de la capacité portante, on obtient la relation entre $U^{pl}_{x,CP}(t)$ et $U^{pl}_{z,CP}(t)$ qui sera résolue pas à pas pour obtenir $U^{pl}_{x,CP}(t)$:

$$dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-1}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

En écrivant l'équation de l'écrouissage cinématique :

$$dR_{h,x}=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dU^{pl}_{x,CP}(t)=\frac{-I_{h,x}}{1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)dU^{pl}_{z,CP}(t)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 d\,F_z(t)=I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}\right)d\,v^{pl}_{z,CP}(t)$$

$$d\left(2V_{lim}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{4}{3}}+F_z(t)\left(1+\frac{16}{15}\left(\frac{-F_z(t)}{V_{lim}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\right)=d\left(\frac{-I_{h,x}}{\gamma_{h,x}}\exp\left(-\gamma_{h,x}v^{pl}_{z,CP}(t)\right)\right)$$

On peut ainsi obtenir $v^{pl}_{z,CP}(t)$ et donc le déplacement plastique vertical :

$$v^{pl}_{z,CP}(t)-v^{pl}_{z,CP}(75+t_{2E})=U^{pl}_{z,CP}(t)-U^{pl}_{z,CP}(75+t_{2E})\ \ car\ \ 27V_{lim}>64(-F_z(t)$$

On obtient ainsi tous les déplacements plastiques et on peut obtenir tous ls déplacements totaux :

$$U_x(t)=U^{pl}_{x,CP}(t)+U^{pl}_{x,s}(t),U_z(t)=\frac{F_z(t)}{K_{zz}}+U^{pl}_{z,CP}(t)+U^{pl}_{z,s}(t)$$

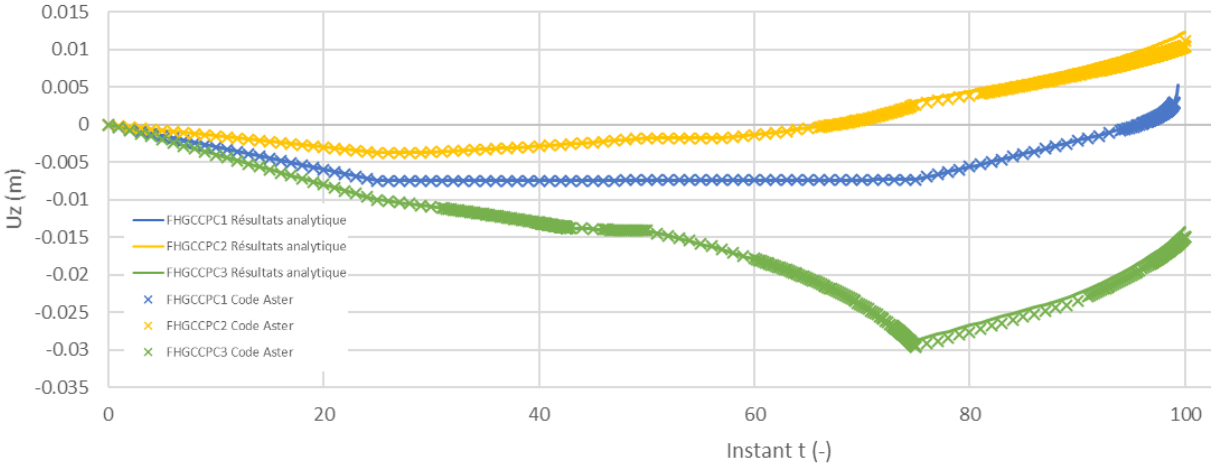
23.1.4 Grandeurs testées et résultats

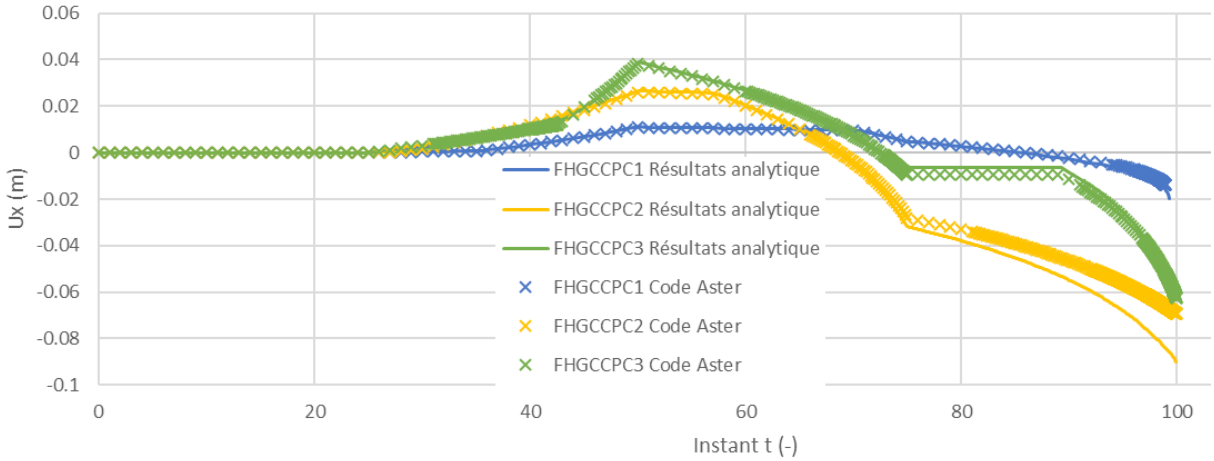
Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	99	FHGCCPC1	0.003253393	1.0 %
DX	50	FHGCCPC1	0.011077644	5.0 %
V11 (q_{h_x})	75	FHGCCPC1	52.4932 analytique	0.001 %
V1 ($U^{pl}_{x,s}$)	50	FHGCCPC1	0.00695072	5.0 %
V13 ($R_{h,x}$)	75	FHGCCPC1	54.86382215 analytique	0.001 %
V8 ($U^{pl}_{z,CP}$)	50	FHGCCPC1	-0.000506038	5.0 %
DZ	75	FHGCCPC2	0.003143842	2.0 %
DX	50	FHGCCPC2	0.026482336	6 %
V11 (q_{h_x})	100	FHGCCPC2	0.0 analytique	0.001 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	75	FHGCCPC2	0.006827395	1.5 %
V13 ($R_{h,x}$)	100	FHGCCPC2	0.0 analytique	0.001 %
V6 ($U^{pl}_{x,CP}$)	50	FHGCCPC2	0.001421716	5.0 %
DZ	50	FHGCCPC3	-0.01413368	0.1 %
DX	100	FHGCCPC3	-0.063168298	1.0 %
V11 (q_{h_x})	100	FHGCCPC3	0.0	0.001 %
V19 ($v^{pl}_{x,s}$)	75	FHGCCPC3	0.019936146	2.0 %
V13 ($R_{h,x}$)	50	FHGCCPC3	100.0 analytique	0.001 %
V21 ($v^{pl}_{z,CP}$)	100	FHGCCPC3	0.020488046	5.0 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

23.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements (en x et z) du Code Aster aux déplacements analytique attendus :





Comme dans le cas du chargement en force avec glissement (§3.20) et le cas du chargement en force avec écrouissage cinématique en capacité portante (§3.17) :

- Les écrouissages cinématiques sont exactes car le chargement est en force.
- La relation entre l'écrouissage en glissement et le déplacement plastique horizontal est exponentiel, de plus code Aster effectue le calcul de manière incrémentale au contraire de la solution analytique qui est exacte ce qui explique des écarts qui commencent à être visible (surtout pour FHGCCPC2) lorsque l'on approche de la limite de l'écrouissage.
- La relation entre le déplacement plastique en glissement horizontal et vertical étant linéaire, l'écart entre la solution analytique et le code Aster reste similaire (avec un facteur $\tan(5°)$) pour le déplacement vertical et le déplacement horizontal.
- Les mêmes commentaires peuvent être fait pour le déplacement plastique en capacité portante.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

24 Modélisation w : FMslid

L'intérêt de cette modélisation est de vérifier le critère de glissement avec écrouissage cinématique en imposant d'abord un chargement en effort latéral puis après en imposant un moment afin de diminuer l'aire effective de la fondation qui résiste à l'aide d'une cohésion dans le cas d'un chargement et déchargement vertical puis horizontal puis en rotation (FMHGC1, FMHGC2 et FMHGC3)

24.1.1 Chargement

On impose au nœud N1 trois chargements F_z et trois chargements F_x avec la carte de temps suivant (les autres efforts sont imposés nuls) :

t (-)	0.	10.	25.	50.	75.	90.	100.
F_z	0.	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	$-F_{z,max}$	0.
F_x	0.	0.	$F_{x,max}$	$F_{x,max}$	$F_{x,max}$	0.	0.
M_x	0.	0.	0.	$M_{x,max}$	0.	0.	0.

Le tableau suivant donnant les valeurs des paramètres par chargement :

Chargement	FMHGC1	FMHGC2	FMHGC3
$F_{z,max}(kN)$	600	800	200
$F_{x,max}(kN)$	130	165	60
$M_{x,max}(kN.m)$	200	200	80

24.1.2 Propriété de l'élément

En plus des paramètres mentionnés au §1.2 excepté $V_{lim}=4000\ kN$ afin de ne pas provoquer de critère de capacité portante, le comportement FONDA_SUPERFI a pour paramètres pour ce cas-test :

- PHI : Pour tous les chargements $\phi_{inter}=10°$ et $c_{inter}=30\,kPa$, pour faire intervenir le critère de glissement ;
- RAID_GLIS : Pour le chargement FMHGC1, $H_h=750\ kN.m^{-1}$, pour le chargement FMHGC2, $H_h=200\ kN.m^{-1}$, pour FMHGC3 $H_h=10\ 000\ kN.m^{-1}$;
- GAMMA_REFE : Pour le chargement FMHGC1, $\gamma=45\ m^{-1}$, pour le chargement FMHGC2 $\gamma=4{,}5\ m^{-1}$ et pour FMHGC3, $\gamma=50\ m^{-1}$

24.1.3 Solution analytique

Entre $t=0$ et $t=25$, on est dans le domaine élastique.

Entre $t=25$ et $t=25+t_c$, on reste est dans le domaine élastique jusqu'à atteindre un moment suffisamment fort atteindre le critère :

$$t_c=25\frac{L_y F_{z,max}}{2M_{x,max}}\left(1-\frac{F_{z,max}\tan(\phi_{inter})-F_{x,max}}{c_{inter}L_x L_y}\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Entre $t=25+t_c$ et $t=50$, on reste sur le critère de glissement et le chargement en moment impose l'écrouissage cinématique :

$$q_{h_x}(t)=F_{x,max}-F_{z,max}\tan\phi_{inter}-c_{inter}L_xL_y\left(1-\frac{2M_x(t)}{L_yF_{z,max}}\right)$$

A partir de l'expression de l'incrément d'écrouissage cinématique :

$$dq_{h_x}(t)=H_h\exp\left(-\gamma v^s_{pl,x}\right)du^s_{pl,x}=H_h\exp\left(-\gamma\left(v^s_{pl,x}(25+t_c)+|u^s_{pl,x}(t)-u^s_{pl,x}(25+t_c)|\right)\right)du^s_{pl,x}$$

Après développement, on aboutit au déplacement plastique suivant :

$$u^s_{pl,x}(t)=-\frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma\left(q_{h_x}(t)-q_{h_x}(25+t_c)\right)}{H_h\exp\left(-\gamma v^s_{pl,x}(25+t_c)\right)}\right)$$

L'écriture des relation d'écoulement suivante :

$$du^s_{pl,x}=d\lambda_G\quad,\quad du^s_{pl,z}=\left(\tan\left(\phi_{inter}\right)+\frac{2c_{inter}L_yL_x}{L_yF^2_{z,max}}\right)d\lambda_G\quad,\quad d\theta^s_{pl,x}=\frac{2c_{inter}L_yL_x}{L_yF_{z,max}}d\lambda_G$$

Aboutissent aux expressions des autres déplacements plastiques :

$$\theta^s_{pl,x}(t)=\theta^s_{pl,x}(25+t_c)+\frac{2c_{inter}L_yL_x}{L_yF_{z,max}}\left(u^s_{pl,x}(t)-u^s_{pl,x}(25+t_c)\right)$$

$$F_{z,max}\left(u^s_{pl,z}(t)-u^s_{pl,z}(T_c)\right)=$$

$$\left\{\left[2\tan\left(\phi_{inter}\right)F_{z,max}+c_{inter}L_yL_x+\frac{H_h}{\gamma}\exp\left(-\gamma v^s_{pl,x}(T_c)\right)\right]\left(u^s_{pl,x}(t)-u^s_{pl,x}(T_c)\right)\right.$$
$$\left.\frac{H_h}{\gamma^2}\exp\left(-\gamma v^s_{pl,x}(T_c)\right)\exp\left(-\gamma\left(u^s_{pl,x}(t)-u^s_{pl,x}(T_c)\right)\right)\right\}$$

Avec $25+t_c=T_c$

Ensuite de t = 50 à t = 100, on est en élasticité ce qui ne nécessite pas d'équation supplémentaire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

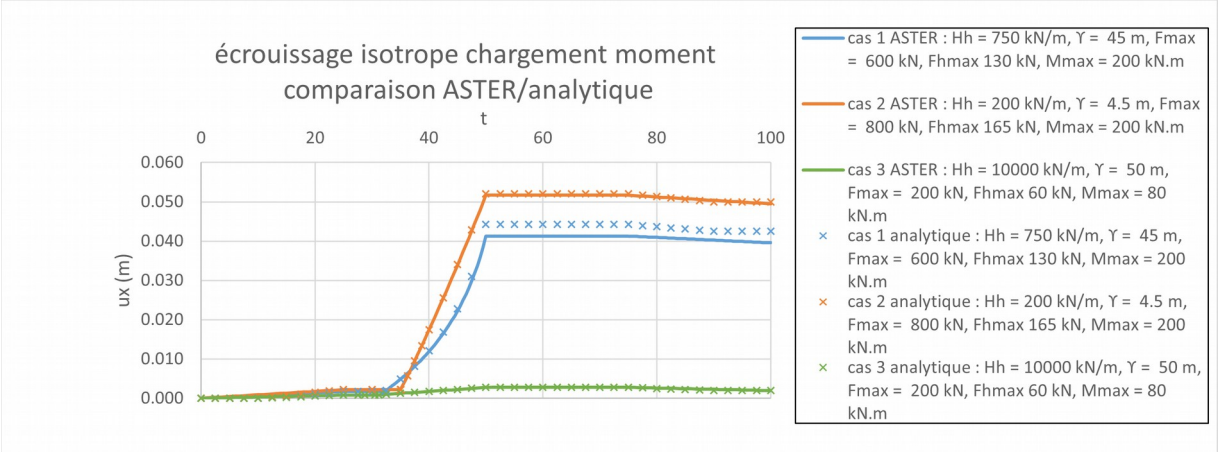
24.1.4 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instant	Chargement	Référence	Différence
DZ	100	FMHGC1	0.00797734	0.5 %
DRX	50	FMHGC1	0.024249088	2.0 %
V11 (q_{h_x})	75	FMHGC1	14.203812 analytique	0.001 %
V1 ($U^{pl}_{x,s}$)	50	FMHGC1	0.042490876	10 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	75	FMHGC1	0.00797734	0.5 %
DZ	100	FMHGC2	0.009216047	5.0 %
DX	50	FMHGC2	0.052097213	1.0 %
V4 ($\theta^{pl}_{x,s}$)	75	FMHGC2	0.003742291	1.0 %
V1 ($U^{pl}_{x,s}$)	50	FMHGC2	0.049897213	1.0 %
V11 (q_{h_x})	100	FMHGC2	8.938415 analytique	0.001 %
DX	50	FMHGC3	0.002767103	0.5 %
DRX	100	FMHGC3	0.000590131	0.5 %
V19 ($v^{pl}_{x,s}$)	75	FMHGC3	0.001967103	0.5 %
V4 ($\theta^{pl}_{x,s}$)	50	FMHGC3	0.000590131	0.5 %
V3 ($U^{pl}_{z,s}$)	100	FMHGC3	0.000409798	25.0 %

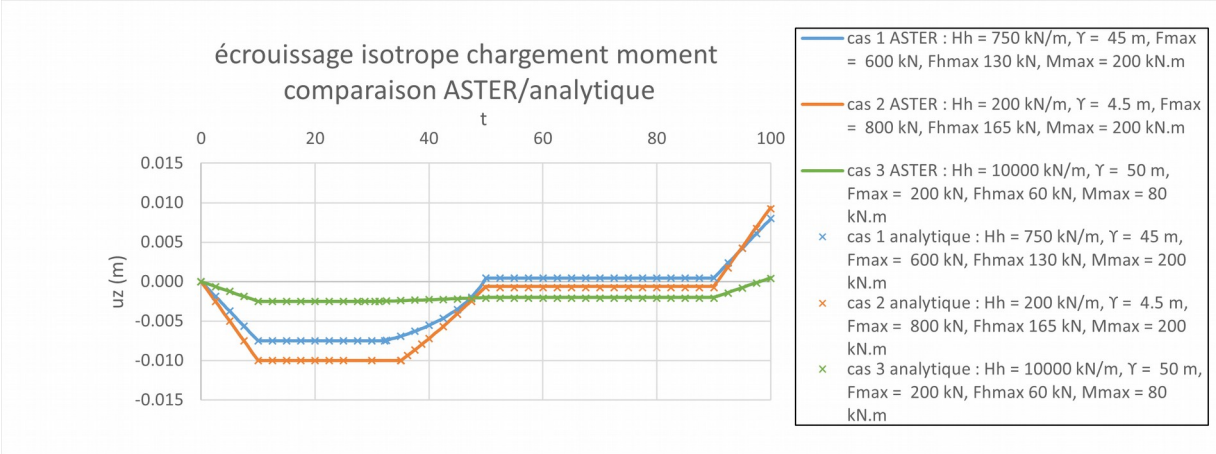
Nota : Comme les calculs prenaient un temps important, le calcul FHGCCPC3 est dans la modélisation v tandis que les calculs FHGCCPC1 et FHGCCPC2 sont dans la modélisation u.

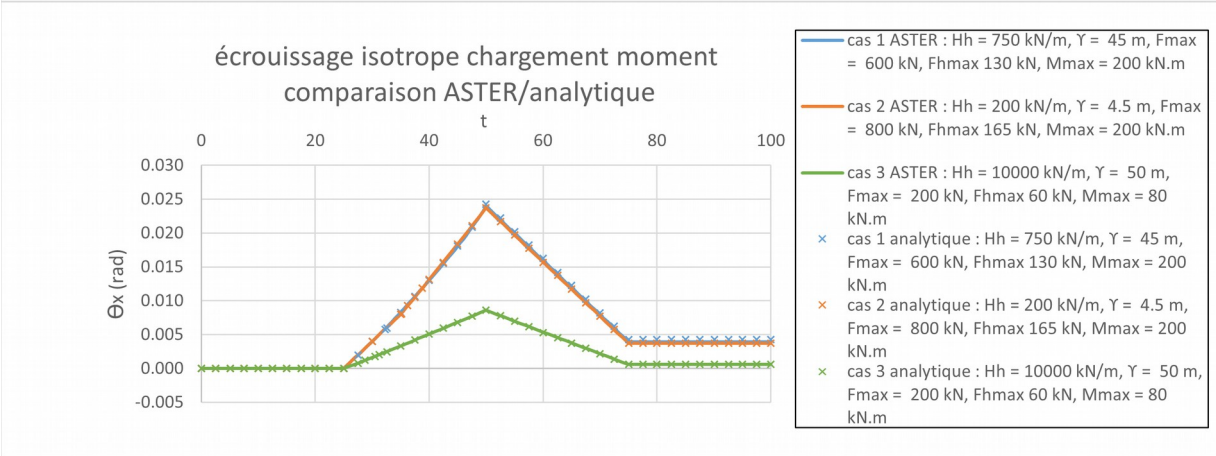
24.1.5 Comparaison résultats aster/résultats analytiques

On compare pour les trois chargements, les déplacements (en x, z et en rotation autour de x) du Code Aster aux déplacements analytique attendus :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)





Comme dans le cas du chargement en force avec glissement (§3.20) :

- Les écrouissages cinématiques sont exactes car le chargement est en force.
- La relation entre l'écrouissage en glissement et le déplacement plastique horizontal est exponentiel, de plus code Aster effectue le calcul de manière incrémentale au contraire de la solution analytique qui est exacte ce qui explique des écarts qui commencent à être visible (surtout pour FMHGC1) lorsque l'on approche de la limite de l'écrouissage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)