SSNL112 - Barre soumise a un chargement thermique cyclique

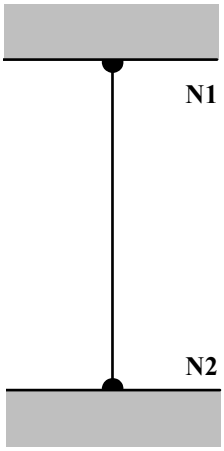
Résumé :
Ce cas test entre dans le cadre de la validation des relations de comportement en élastoplasticité des éléments barre pour la mécanique quasi-statique des structures.
Une barre encastrée a ces deux extrémités subit un chargement thermique cyclique induisant des efforts de traction-compression.

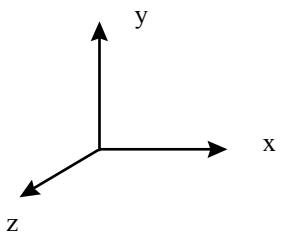
Chaque modélisation permet de valider une des relations de comportement non-linéaire introduite : Écrouissage isotrope linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation A), écrouissage cinématique linéaire avec critère de Von-Misès (modélisation B), ainsi qu'un modèle dit de Pinto-Menegotto, représentant le comportement cyclique des armatures en acier dans le béton armé (modélisations C et D).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

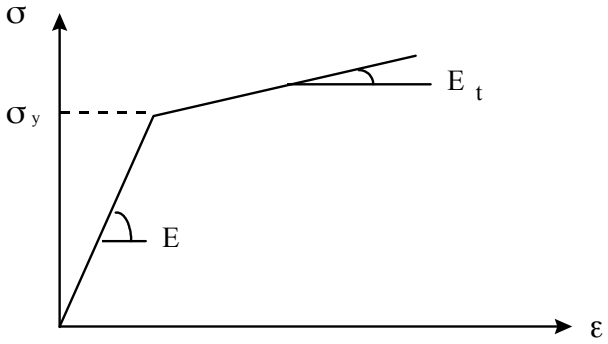




Longueur de la barre : $1\,m$
Section de la barre : $5\,cm^2$

1.2 Propriétés des matériaux

1.2.1 Écrouissages isotrope et cinématique linéaires

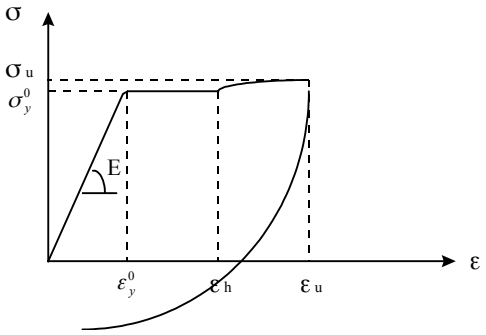


Module d'Young : $E=2.10^{11}\,Pa$
Pente d'écrouissage : $E_t=2.10^{9}\,Pa$
Limite d'élasticité : $\sigma=2.10^{8}\,Pa$
Coefficient de Poisson : $\nu=0,3$
Coefficient de dilatation thermique : $\alpha=1.10^{-5}\,K^{-1}$

Ce test permet de valider le fonctionnement de MFront (comportement plasticité) pour les barres (méthodes de Deborst).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.2.2 Modèle de Pinto-Menegotto



Module d'Young :	E	=	$2.\ 10^{11}\,Pa$
Limite d'élasticité :	σ_v^0	=	$2.10^8\,Pa$
Coefficient de Poisson :	ν	=	0,3
Coefficient de dilatation thermique :	α	=	$1.10^{-5}\,K^{-1}$
Déformation d'écrouissage :	ε_h	=	$2.3\,10^{-3}$
Contrainte ultime :	σ_u	=	$2.58\,10^8\,Pa$
Déformation ultime :	ε_u	=	3.10^{-2}
Coefficient définissant la courbe ζ :	R_0	=	20
Coefficient définissant la courbe ζ	A_1	=	18.5
Coefficient définissant la courbe ζ	A_2	=	0.15
Coefficient de flambage :	C	=	0.5
Coefficient de flambage :	A	=	0.008

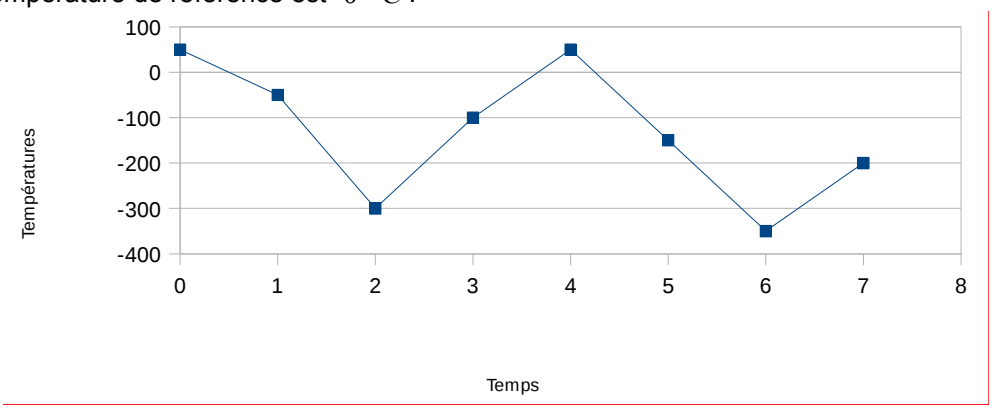
1.3 Conditions aux limites et chargement

Conditions aux limites :
La barre est encastrée. Les déplacements sont donc bloqués dans les trois directions.
En $N1$ et $N2$: $DX=DY=DZ=0$

Chargement :
Le trajet de chargement est décrit par l'évolution de la température, uniforme dans la barre :

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$T(°C)$	50	–50	–300	–100	50	–150	–350	–200

La température de référence est $0\,°C$.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

2.1.1 Écrouissages linéaires

Écrouissage isotrope

Pour une traction uniaxiale, le critère de plasticité s'écrit :

$$\left|\sigma_L\right| - R(p) \leq 0$$

où p est la déformation plastique cumulée

$$R(p) = R' p + \sigma^y \text{ et } R' = \frac{E\ E_1}{E - E_1}$$

Le critère s'écrit alors :

$$\left|\sigma_L\right| - R' p - \sigma^y \leq 0$$

Le tenseur des contraintes s'obtient par :

$$\sigma = \boldsymbol{A} . \left(\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \varepsilon^p\right) - 3\mathrm{K}\alpha\left(T - T^{ref}\right)\boldsymbol{Id}$$

On en déduit donc l'expression de σ_L

$$\sigma_L = E(\varepsilon - \alpha T) - E\varepsilon^p \qquad \left(T^{ref} = 0\right)$$

Dans notre cas, $\varepsilon = 0$ donc :

$$\sigma_L = E\varepsilon_L - E\varepsilon^p \qquad \text{avec } \varepsilon_L = -\alpha T$$

Donc :

- Si $\left|\sigma_L\right| - R(p) < 0$:
  $p=0$ et $\sigma_L = E\varepsilon_L$
- Si $\left|\sigma_L\right| - R(p) = 0$:

$$p = \left(\frac{\left|\sigma\right| - \sigma^y}{R'}\right)$$

$$\sigma_L = E\varepsilon_L - E\varepsilon^p$$

Application au trajet de chargement

Instant 1 :

$\sigma = E\varepsilon = 200\mathrm{MPa}$ et $R(p) = R' p + \sigma^y = 100\mathrm{MPa}$ car $p=0$.

On a bien $\sigma_L - R(p) \leq 0$.

Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique : $\sigma_L = 100\mathrm{MPa}$ et $N = 100\mathrm{kN}$

Instant 2 :

Le critère est atteint :

$$\sigma_L = \frac{E}{E + R'}(R'\varepsilon_L + \sigma^y) = \frac{2\cdot 10^{11}}{2\cdot 10^{11} + 2.02\cdot 10^9}(2.02\cdot 10^9 \times 3.5\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^8) = 205\mathrm{MPa}$$

$N = 102.5\mathrm{kN}$

et $p = 2.475\cdot 10^{-3}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Instant 3 :
On décharge élastiquement :
$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2\cdot 10^{11}(1.5\cdot 10^{-3} - 2.475\cdot 10^{-3}) = -195\,MPa$
$N = -97.5\,kN$

Instant 4 :
On plastifie à nouveau :
Le critère s'écrit : $|\sigma| - R'\,p - \sigma^y = 0$ avec $p = p_1 + p_2$ où $p_1 = 2.475\cdot 10^{-3}$
On obtient donc :
$$p_2 = \frac{|\sigma| - \sigma^y}{R'} - p_1$$
$$\sigma = -E\,\varepsilon^p = -E(p_1 - p_2)$$
$$\sigma = \left(\frac{R'}{R' + E}\right)\left(-2\,E\;p_1 - \frac{E\,\sigma^y}{R'}\right) = -207.9\text{MPa}$$

Et donc $N = -103.95\text{kN}$

Instant 5 :
On décharge élastiquement :
$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2\cdot 10^{11}(2\cdot 10^{-3} - 1.0395\cdot 10^{-3}) = 192.1\,MPa$
$N = 96.05\,kN$

Instants 6 et 7 :
Le raisonnement est identique
On trouve :
$N_{(inst.6)} = 105.87\text{kN}$
$N_{(inst.7)} = -44.13\text{kN}$

Écrouissage cinématique
La méthode de calcul est identique, mais dans ce cas, le critère de plasticité s'écrit :
$$\sigma - X_{eq} - \sigma^y \le 0 \text{ avec } X_{eq} = C(\varepsilon^p)_{eq} = \frac{3}{2}C\,\varepsilon^p = \frac{E\;E_t}{E - E_t}\varepsilon^p$$
Avec les notations précédentes, le critère s'écrit :
$\left|\sigma_L - R'\,\varepsilon^p\right| - \sigma^y \le 0$ d'où $\sigma_L = R'\,\varepsilon^p \pm \sigma^y$ (suivant le sens de l'écoulement).

Application au trajet de chargement
Instant 1 :
Le critère n'est pas franchi, l'évolution est élastique : $\sigma_L = 100\text{MPa}$ et $N = 100\text{kN}$

Instant 2 :
Le critère est atteint : $|\sigma_L - R'\,\varepsilon^p| - \sigma^y = 0$
$\sigma_L = R'\,\varepsilon^p + \sigma^y = 2.02\cdot 10^9 \times 2.475\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^8 = 205\text{MPa}$

Instant 3 :
On décharge élastiquement :
$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2\cdot 10^{11}(1.5\cdot 10^{-3} - 2.475\cdot 10^{-3}) = -195\text{MPa}$
$N = -97.5\text{kN}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Instant 4 :

$|\sigma - R'\varepsilon^p| - \sigma^y = 0$ avec $p_1 = 2.475 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon^p = p_1 - p_2$

$p_2 = p_1 - \dfrac{|\sigma + \sigma^y|}{R'}$

$\sigma = -E\,\varepsilon^p = -E(p_1 - p_2)$

$\sigma = -E\left(\dfrac{|\sigma + \sigma^y|}{R'}\right) = -198\text{MPa}$

$N = -99\text{kN}$

Instant 5 :

On décharge élastiquement :

$\sigma_L = E\,\varepsilon_L - E\,\varepsilon^p = 2 \cdot 10^{11}(2 \cdot 10^{-3} - 9.9 \cdot 10^{-4}) = 202\,MPa$

$N = 101\text{kN}$

Instants 6 et 7 :

Le raisonnement est identique. On trouve :

$N_{(inst.6)} = 103\text{kN}$

$N_{(inst.7)} = -47\text{kN}$

2.1.2 Modèle de Pinto-Menegotto

Ce modèle est décrit dans le Manuel de Référence de *Code_Aster* [R5.03.09] [bib1]. La loi constitutive des aciers est composée de deux parties distinctes : le chargement monotone composé de trois zones successives (élasticité linéaire, palier plastique et écrouissage) et le chargement cyclique où le trajet entre deux points d'inversion (demi-cycle) est décrit par une courbe d'expression analytique du type $\sigma = f(\varepsilon)$.

Comme précédemment les déformations imposées sont des déformations thermiques : $\varepsilon = -\alpha T$

2.1.2.1 Cas sans flambage

Premier chargement

- Élasticité linéaire : $\sigma = E\varepsilon$

Instant 1 :

$N = E\,\varepsilon\,S = 2 \cdot 10^{11} \times 1 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-4} = 100\text{kN}$

- Palier plastique : $\sigma = \sigma^y$
- Polynôme de degré 4 : $\sigma = \sigma_u - (\sigma_{su} - \sigma_y^0)\left(\dfrac{\varepsilon_u - \varepsilon}{\varepsilon_u - \varepsilon_h}\right)^4$

Instant 2 :

$\varepsilon = 3.5 \cdot 10^{-3} > \varepsilon_h = 2.3 \cdot 10^{-3}$, on utilise le polynôme de degré 4 :

$\sigma = 209.416\text{MPa}$ et $N = 104.708\text{kN}$

Cycles

Demi-cycle 1 :

On détermine ζ_p^0 :

$\zeta_p^0 = \varepsilon_r^0 - \varepsilon_y^0 = 3.5 \cdot 10^{-3} - 1.10^{-3} = 2.5 \cdot 10^{-3}$ car $\varepsilon_r^0 = \varepsilon_{(inst.2)}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Puis $\Delta\sigma^0$:

$$\Delta\sigma^0 = E_h \zeta_p^0 = 2\cdot 10^9 \times 2.5\cdot 10^{-3} = 5\text{MPa}$$

D'où $\sigma_y^1 = \sigma_y^0 \cdot sign(-\zeta_p^0) + \Delta\sigma^0 = -200 + 5 = -195\text{MPa}$

On calcule ensuite ε_y^1 :

$$\varepsilon_y^1 = \varepsilon_r^0 + \frac{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}{E} = 3.5\cdot 10^{-3} + \frac{(-195 - 209.416)\,10^6}{2.0\cdot 10^{11}} = 1.477\cdot 10^{-3}$$

On détermine ainsi $\sigma^* = f(\varepsilon^*)$, définie par :

$$\sigma^* = b\,\varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}}\right)\varepsilon^* \qquad \text{, avec } b = \frac{E_h}{E}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0}$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r^0}{\sigma_y^1 - \sigma_r^0}$$

$$\xi_p^0 = \frac{\zeta_p^0}{|\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0|} \text{ et } R^I = R_0 - \frac{A_1 \cdot \xi_p^0}{A_2 + \xi_p^0}$$

On obtient $\xi_p^0 = -1.23$ et $R^I = 3.51$

On peut alors calculer la valeur de σ aux instants 3 et 4 :

Instant 3 :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon_{(inst.3)} - \varepsilon_r^0}{\varepsilon_y^1 - \varepsilon_r^0} = \frac{1.5\cdot 10^{-3} - 3.5\cdot 10^{-3}}{1.477\cdot 10^{-3} - 3.5\cdot 10^{-3}} = 0.988$$

$$\sigma^* = b\,\varepsilon^* + \left(\frac{1-b}{(1+(\varepsilon^*)^R)^{(1/R)}}\right)\varepsilon^* = 0.01\times 0.988 + \left(\frac{1-0.01}{(1+(0.988)^{3.51})^{(1/3.51)}}\right) = 0.82$$

et $\sigma = \sigma^*(\sigma_y^1 - \sigma_r^0) + \sigma_r^0 = 0.82\times(-195 - 209.416) + 209.416 = -122\,MPa$

d'où $N = -61\text{kN}$

Instant 4 :

On utilise la même méthode, avec $\varepsilon = 0$.

$\varepsilon^* = 1.73$

$\sigma^* = 0.56$

$\sigma = -20\,MPa$

$N = -10\text{kN}$

Demi-cycle 2 : Instant 5 et 6 :

La méthode de calcul est identique, on détermine :

ζ_p^1 , σ_y^2 , ε_y^2 , ξ_p^1 , R^2 , puis $\sigma_{(inst.5)}^* = f(\varepsilon_{(inst.5)}^*)$ et $\sigma_{(inst.6)}^* = f(\varepsilon_{(inst.6)}^*)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et finalement $\sigma_{(inst.5)}$ et $\sigma_{(inst.6)}$.

Demi-cycle 3 : Instant 7 : Idem

2.1.2.2 Cas avec flambage

Premier chargement
Identique au cas précédent.

Cycles
Demi-cycle 1 (compression) :
La méthode de calcul est identique, mais la valeur de la pente de l'asymptote est modifiée :
On calcule un nouveau coefficient b_c :

$$b_c = a(5.0 - L/D)e\left(b\xi' \frac{E}{\sigma^y - \sigma^\infty}\right) = 0.006 \times (5.0 - 5.9) e^{(0.01 \times 1.477 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8 - 1.36 \cdot 10^8})} = -0.0057$$

Il faut ensuite, comme dans le modèle sans flambage, déterminer σ_y^n. La raisonnement est identique, mais on ajoute une contrainte complémentaire σ_s^* afin de positionner correctement la courbe par rapport à l'asymptote.

$$\sigma_s^* = \gamma_s b E \frac{b - b_c}{1 - b_c} = 0.028 \times 0.01 \times 2 \cdot 10^{11} \times \frac{0.01 + 0.0057}{1 + 0.0057} = 0.87\,MPa$$

où γ_s est donné par : $\gamma_s = \frac{11.0 - L/D}{10\left(e^{c(L/D)} - 1.0\right)} = 0.028$

Demi-cycle 2 (traction) :

- En traction, on adopte un module d'Young réduit :
  $E_r = E\left(a_5 + (1.0 - a_5) e^{-a_6 \xi^{*2}}\right) = 2 \cdot 10^{11} \times (0{,}88 + (1 - 0.88) e^{(-620 \times 1.473 \cdot 10^{-6})}) = 1.99 \cdot 10^{11}\,MPa$
  avec $a_5 = 1.0 + (5.0 - L/D)/7.5 = 0.88$

Le reste de la méthode est identique.

2.2 Résultats de référence

Effort normal N constant sur la barre

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune, la solution est analytique

2.4 Références bibliographiques

[1] Manuel de référence du *Code_Aster* [R5.03.09].
[2] S. ANDRIEUX : TD 1 Trois barres thermoélastoplastiques Von Mises parfait. In « Initiation à la thermoplasticité dans le *Code_Aster* », HI-74/96/013 novembre 1996 (manuel de référence du cours).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage isotrope linéaire - Critère de Von Mises

3.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0250E+05	0
effort normal N	3	–9.7500E+04	0
effort normal N	4	–1.0395E+05	0
effort normal N	5	9.6050E+04	0
effort normal N	6	1.0587E+05	0
effort normal N	7	–4.4129E+04	0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : élastoplasticité avec écrouissage cinématique linéaire - Critère de Von Mises

4.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0250E+05	0
effort normal N	3	–9.7500E+04	0
effort normal N	4	–9.9000E+04	0
effort normal N	5	1.0100E+05	0
effort normal N	6	1.0300E+05	0
effort normal N	7	–4.7000E+04	0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'un élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto sans flambage (valeur de ELAN inférieure à 5).

5.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

5.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0470E+05	0
effort normal N	3	–6.0777E+04	0
effort normal N	4	–9.1430E+04	0
effort normal N	5	7.6082E+04	0
effort normal N	6	1.0125E+05	0
effort normal N	7	–3.7965E+04	0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé d'1 élément de barre (BARRE).
Loi de comportement : modèle de Pinto-Menegotto avec flambage (valeur de ELAN supérieure à 5).

6.2 Caractéristiques du maillage

2 nœuds.
1 maille SEG2

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Instants	Référence	Écart (%)
effort normal N	1	1.0000E+05	0
effort normal N	2	1.0470E+05	0
effort normal N	3	–6.0556E+04	0
effort normal N	4	–8.9078E+05	0
effort normal N	5	7.6905E+05	0
effort normal N	6	1.0125E+05	0
effort normal N	7	–3.8119E+04	0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

Les résultats calculés par *Code_Aster* sont en excellent accord avec les solutions analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)