SDND105 – Choc d'un point matériel contre une paroi avec flambage plastique

Résumé :

Ce test valide le comportement d'un obstacle de type choc avec flambage éventuel. La résolution a été réalisée avec l'opérateur DYNA_VIBRA en utilisant le mot clé FLAMBAGE (modélisations A, B, C et D) et avec l'opérateur DYNA_NON_LINE en utilisant le comportement CHOC_ENDO_PENA (modélisations E et F).

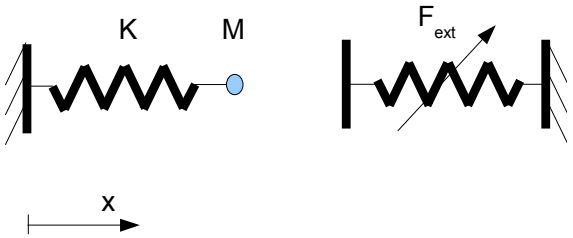
On calcule l'instant de début de flambage (cet instant correspond au premier instant où la force de choc a dépassé le seuil de flambage), la déformation plastique cumulée et l'instant où l'on revient à la position initiale.

Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

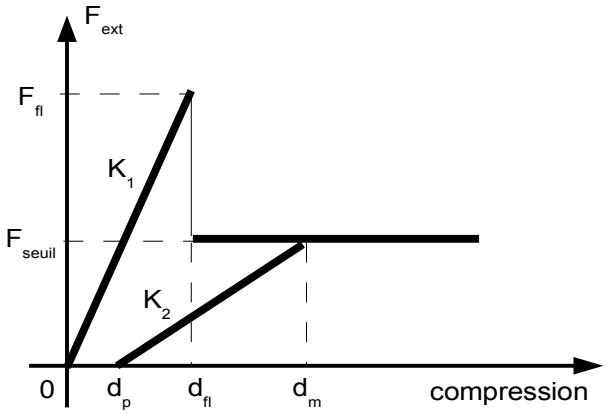


1.2 Propriétés du matériau

Pour les modélisations A et B

$K = 10^{-7}\ N/m$
$M = 1\ kg$

La force de réaction F_{ext} dépend de la compression de la paroi qui suit la loi ci-dessous :



Avec :

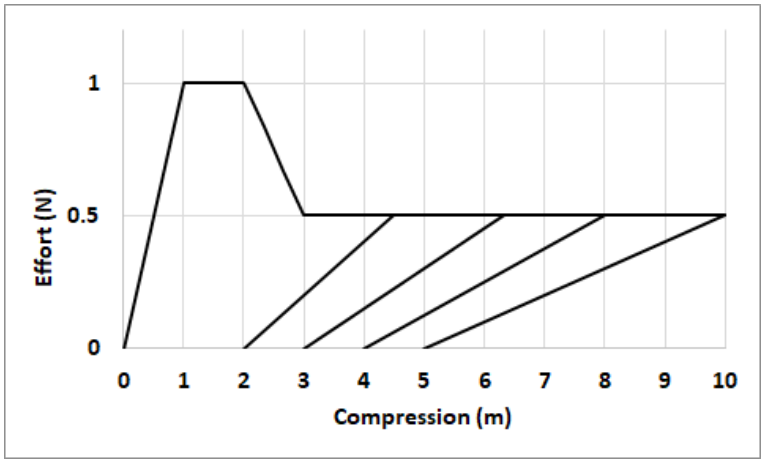
$K_1 = 1\ N/m$
$F_{fl} = 1\ N$
$F_{seuil} = 0.5\ N$
$K_2 = 0.5\ N/m$

Pour la modélisation C

La relation force-compression est présentée dans la figure ci-dessous et dans le détail des paramètres.

Avec :
$K_1 = 1\ N/m$
$F_{fl} = 1\ N$
$F_{seuil} = 0.5\ N$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



$\mathrm{LARG_PLAT}=1\,m$
$\mathrm{ENFO_FL}=1\,m$
$\mathrm{DEPL_POST_FL}=[2.,3.,4.,5.]m$
$\mathrm{RIGI_POST_FL}=[0.2,0.15,0.125,0.1]N/m$

Pour la modélisation D

La relation force-compression correspond à celle utilisée dans la modélisation C, mais un amortissement est ajouté. Avant flambage cet amortissement vaut $\mathrm{AMOR_NOR}$, puis il est divisé par deux pendant le flambage.

$\mathrm{AMOR_NOR}=10.N/m.s^{-1}$
$\mathrm{AMOR_NOR}=5.N/m.s^{-1}$
$\mathrm{DEPL_POST_FL}=[5.,5.,5.,5.]N/m.s^{-1}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

On impose le déplacement de la masse mobile M suivant l'axe des x .

1.4 Conditions initiales

Pour les modélisations A et B
À l'instant initial, la masse mobile est juste en contact contre la paroi (jeu initial nul) avec une vitesse initiale égale à $2m/s$.
La paroi n'a pas encore subi de déformation plastique (paroi non flambée).

Pour les modélisations C et D
À l'instant initial, la masse mobile est juste en contact contre la paroi (jeu initial nul) avec une vitesse initiale égale à $2.828427125\,m/s$.
À l'état initial, la paroi n'a pas encore subi de déformation plastique (paroi non flambée).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

Le problème consiste à analyser la réponse d'une masse mobile soumise à une vitesse initiale non nulle et venant choquer contre une paroi qui suit une loi de comportement de type flambage.
L'équation d'équilibre du système s'écrit :

$$M\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+Kx=F_{ext} \quad (1)$$

La résolution de (1) se déroule en plusieurs phases : avant flambage de la paroi, chargement après flambage, déchargement après flambage et vol libre.

2.1.1 Première phase

Avant le flambage, la force de réaction vaut : $F_{ext}=-K_1 x$

La solution de l'équation (1) se met sous la forme suivante : $x(t)=A_1\sin\omega_1 t+B_1\cos\omega_1 t$

Avec : $\omega_1^2=\frac{K+K_1}{M}$

En tenant compte des conditions initiales : $x(0)=0$ et $\frac{\partial x}{\partial t}(0)=v_0$

On identifie : $A_1=\frac{v_0}{\omega_1}$ et $B_1=0$

Soit : $x(t)=\frac{v_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t$

On atteint le seuil limite de flambage F_{fl} à l'instant t_{fl}, tel que : $x(t_{fl})=d_{fl}=\frac{F_{fl}}{K_1}$.

D'où : $t_{fl}=\frac{1}{\omega_1}Arc\sin(\frac{F_{fl}\omega_1}{K_1 v_0})$

et $\frac{\partial x}{\partial t}(t_{fl})=v_{fl}$

2.1.2 Deuxième phase

La phase suivante est la phase de chargement après flambage ; la force de réaction est constante tant que la vitesse reste positive. Cette force de réaction vaut : $F_{ext}=-F_{seuil}$ et la solution de l'équation (1) s'écrit : $x(t)=A_2\sin\omega_0 t+B_2\cos\omega_0 t-\frac{F_{seuil}}{M\,\omega_0^2}$

Avec : $\omega_0^2=\frac{K}{M}$

Comme $\omega_0^2\ll 1$, on peut effectuer un développement limité des fonctions trigonométriques.
Soit : $x(t)=A_{21}t^2+B_{21}t+C_{21}$.

En tenant compte des conditions initiales $x(t_{fl})=d_{fl}$ et $\frac{\partial x}{\partial t}(t_{fl})=v_{fl}$, on obtient :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$A_{21}=(\frac{v_{fl}t_{fl}}{2}-\frac{d_{fl}}{2}-\frac{F_{seuil}^2}{4M})\omega_0^2-\frac{F_{seuil}}{2M}$$

$$B_{21}=v_{fl}+\frac{F_{seuil}t_{fl}}{M}+(d_{fl}t_{fl}-\frac{v_{fl}t_{fl}^2}{2})\omega_0^2$$

$$C_{21}=d_{fl}-\frac{F_{seuil}t_{fl}^2}{2M}-v_{fl}t_{fl}-\frac{d_{fl}t_{fl}^2}{2}\omega_0^2$$

L'instant auquel la vitesse s'annule est : $t_m=-\frac{B_{21}}{2A_{21}}$

En négligeant les termes en ω_0^2, on déduit : $t_m=t_{fl}+\frac{M v_{fl}}{F_{seuil}}$,

et le déplacement maximal vaut : $x(t_m)=d_m$

Cela permet d'obtenir la déformation plastique cumulée : $d_p=d_m-\frac{F_{seuil}}{K_2}$

2.1.3 Troisième phase

Cette phase correspond au déchargement, la force de réaction vaut : $F_{ext}=-K_2(x-d_p)$

La solution de l'équation (1) s'écrit : $x(t)=A_3\sin\omega_2 t+B_3\cos\omega_2 t+\frac{K_2 d_p}{K+K_2}$

Avec : $\omega_2^2=\frac{K+K_2}{M}$

En tenant en compte des conditions initiales $x(t_m)=d_m$ et $\frac{\partial x}{\partial t}(t_m)=0$,

on obtient : $A_3=(d_m-\frac{K_2 d_p}{K+K_2})\sin\omega_2 t_m$ et $B_3=(d_m-\frac{K_2 d_p}{K+K_2})\cos\omega_2 t_m$.

La force de réaction s'annule lorsque le déplacement du point matériel atteint la valeur de la déformation plastique cumulée d_p.

Comme $K\ll K_2$, on fait l'approximation suivante : $\frac{K_2 d_p}{K+K_2}\approx d_p$.

Ainsi, l'instant t_d qui correspond à l'annulation de la force de réaction est tel que :
$x(t_d)=d_p=A_3\sin\omega_2 t_d+B_3\cos\omega_2 t_d+d_p$

Soit : $\sin\omega_2 t_m\sin\omega_2 t_d+\cos\omega_2 t_m\cos\omega_2 t_d=\cos\omega_2(t_d-t_m)=0$.

D'où : $t_d=t_m+\frac{\pi}{2\omega_2}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.4 Quatrième phase

La phase suivante correspond à la phase de vol libre $F_{ext}=0$.
La solution de l'équation (1) s'écrit : $x(t)=A_4\sin\omega_0 t+B_4\cos\omega_0 t$
Les conditions initiales sont :

$$x(t_d)=d_p \text{ et } \frac{\partial x}{\partial t}(t_d)=v_d=\omega_2(x_m-\frac{K_2 d_p}{K+K_2})\sin\omega_2(t_m-t_d)$$

Ce qui donne :

$$A_4=d_p\sin\omega_0 t_d+\frac{v_d}{\omega_0}\cos\omega_0 t_d$$

$$B_4=d_p\cos\omega_0 t_d-\frac{v_d}{\omega_0}\sin\omega_0 t_d$$

Comme $\omega_0^2\ll 1$, en effectuant un développement limité des fonctions trigonométriques jusqu'à l'ordre 2, la solution se met sous la forme suivante :
$x(t)=A_{41}t^2+B_{41}t+C_{41}$

Avec :

$$A_{41}=\frac{\omega_0^2}{2}[v_d t_d-d_p(1-\frac{\omega_0^2 t_d^2}{2})]$$

$$B_{41}=d_p t_d\omega_0^2+v_d(1-\frac{\omega_0^2 t_d^2}{2})$$

$$C_{41}=d_p(1-\frac{\omega_0^2 t_d^2}{2})-v_d t_d$$

En négligeant les termes en ω_0^2, on obtient :

$$x(t)=v_d t+d_p-v_d t_d.$$

Et on déduit l'instant t_0 de passage à la position initiale ($x=0$).
Soit : $t_0=t_d-\frac{d_p}{v_d}$.

2.1.5 Solution de référence de la modélisation C

Les conditions initiales choisies permettent d'avoir une énergie cinétique de $4J$, qui doit conduire à une compression totale de $6.5m$ et une compression résiduelle de $3.1m$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Grandeurs et résultats de référence

Pour les modélisations A et B

On se propose de tester les grandeurs suivantes :

t_{fl} : instant de début de flambage ;

d_p : déformation plastique cumulée ;

t_0 : instant de repassage à la position initiale (après flambage et décharge).

Compte tenu des valeurs numériques des données d'entrée, on obtient :

$t_{fl}=\frac{\pi}{6}$ (exprimé en secondes)

$d_p=3$ (exprimée en mètres)

$t_0=\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}+\frac{\pi+6}{\sqrt{2}}$ (exprimé en secondes)

Pour la modélisation C

Compression maximale $max(d)=6.5$ (exprimée en mètres)

Compression résiduelle $d_p=3.1$ (exprimée en mètres)

Vitesse de rebond après le choc $V_{rebond}=-1.303840481$ (exprimée en mètres par seconde)

Pour la modélisation D

La non régression est testée sans valeur de référence analytique.

2.3 Incertitudes sur la solution

La solution de référence est analytique (au second ordre près).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On modélise le système avec un point matériel et un obstacle de type PLAN_Y.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé FLAMBAGE de l'opérateur DYNA_VIBRA.

On vérifie également les différentes méthodes de résolution (EULER, ADAPT_ORDRE2 et DEVOGE). Avec le schéma en temps adaptatif ADAPT_ORDRE2 on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : PAS = 0.0002,
- la valeur maximale du pas de temps : PAS_MAXI = 0.001,
- la valeur minimale du pas de temps : PAS_MINI = 2.E-8.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de maille : 1 **SEG2**

3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au flambage de la paroi.

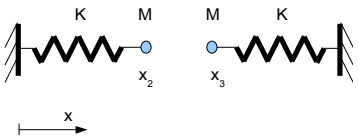
Identification	Référence	Type de référence	Précision
t_{fl}	$\frac{\pi}{6}s$	'ANALYTIQUE'	0.1 %
d_p	3 m	'ANALYTIQUE'	0.1 %
$x(t_0)=x(\frac{\pi}{6}+2\sqrt{3}+\frac{\pi+6}{\sqrt{2}})$	0 m	'ANALYTIQUE'	3.E-3 m

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Pour cette modélisation, on considère deux points matériels mobiles selon le schéma suivant :



Le système est parfaitement symétrique. On obtient la même formulation que la modélisation A si on choisit des rigidités normales de choc égales à la moitié des rigidités choisies pour la modélisation A.

En effet, si on note : $x_2 = -x_3 = x$
La force de réaction F_{ext} se met sous la forme suivante :

Pendant la première phase : $F_{ext} = -K_1(x_2 - x_3) = -2K_1 x$
Pendant la deuxième phase : $F_{ext} = -F_{seuil}$
Pendant la troisième phase : $F_{ext} = -K_2(x_2 - x_3 - 2d_p) = -2K_2(x - d_p)$
Pendant la quatrième phase : $F_{ext} = 0$

On modélise le problème avec un obstacle de type `BI_PLAN_Y`.

À l'instant initial, les deux points matériels sont en contact avec une vitesse initiale égale à $2 m/s$.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé `FLAMBAGE` de l'opérateur `DYNA_VIBRA`, avec les schémas en temps `EULER` et `ADAPT_ORDRE2`.
Avec le schéma en temps adaptatif `ADAPT_ORDRE2`, on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : `PAS = 0.001`,
- la valeur maximale du pas de temps : `PAS_MAXI = 0.005`.

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles : 2 **SEG2**

4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au comportement de flambage pendant le choc.

Identification	Référence	Type de référence	Précision
t_{fl}	$\frac{\pi}{6} s$	'ANALYTIQUE'	0.01 %
d_p	3 m	'ANALYTIQUE'	0.01 %
$x(t_0) = x(\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi+6}{\sqrt{2}})$	0 m	'ANALYTIQUE'	1.E-4 m

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisations C et D

5.1 Caractéristiques des modélisations

Dans ces modélisations on réutilise la modélisation A pour tester une forme plus complexe de la loi de flambage. La modélisation C est sans amortissement de choc, alors que pour la modélisation D un amortissement est ajouté.

On modélise le système avec un point matériel et un obstacle de type PLAN_Y.

On évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le mot clé FLAMBAGE de l'opérateur DYNA_VIBRA.

On vérifie également les différentes méthodes de résolution (EULER, ADAPT_ORDRE2 et DEVOGE). Avec le schéma en temps adaptatif ADAPT_ORDRE2 on définit (en secondes) :

- le pas de temps initial : PAS = 0.0002,
- la valeur maximale du pas de temps : PAS_MAXI = 0.001,
- la valeur minimale du pas de temps : PAS_MINI = 2.E-8.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de maille : 1 **SEG2**

5.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au flambage de la paroi.

Modélisation C :

Identification	Référence	Type de référence	Précision
$max(d)$	6.5 m	'ANALYTIQUE'	0.01 %
d_p	3.1 m	'ANALYTIQUE'	0.01 %
V_{rebond}	-1.303840481 m/s	'ANALYTIQUE'	0.01 %

Modélisation D :

Identification	Précision
d_p	Non régression
V_{rebond}	Non régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisations E et F

6.1 Caractéristiques des modélisations

Dans ces modélisations on réutilise les modélisations C et D mais on évalue les grandeurs obtenues suite au flambage dû au choc en utilisant le comportement CHOC_ENDO_PENA de l'opérateur DYNA_NON_LINE. La modélisation E est sans amortissement de choc, alors que pour la modélisation F un amortissement est ajouté.

On modélise le système avec un point matériel et un discret dont le matériau est DIS_CHOC_ENDO [U4.43.01] .

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 2
Nombre de maille : 1 **SEG2**

6.3 Grandeurs testées et résultats

On teste les valeurs des grandeurs liées au flambage de la paroi.

Modélisation E :

Identification	Référence	Type de référence	Précision
$max(d)$	- 6.5 m	'ANALYTIQUE'	0.1 %
d_p	- 3.1 m	'ANALYTIQUE'	0.1 %
V_{rebond}	13.03840481 m/s	'ANALYTIQUE'	0.1 %

Modélisation F :

Identification	Référence	Aster	Précision
$max(d)$	-	-5.50565597763881 m	Non régression
d_p	-	-2.54856258826116 m	Non régression
V_{rebond}	-	0.0999444607239 m/s	Non régression

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

Les écarts entre les solutions obtenues avec Aster et les solutions analytiques sont très faibles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)