SSLA100 - Cylindre infini soumis à un champ de forces volumiques et surfaciques

Résumé :

Ce test de mécanique quasi-statique linéaire permet de valider l'affectation d'un chargement de champ de forces, surfacique ou volumique.

La structure étudiée est cylindrique. Les champs aux nœuds de densité volumique et surfacique de forces sont lus dans un fichier au format Ideas. Pour le chargement volumique, le champ lu varie quadratiquement en fonction de la distance à l'axe ; pour le chargement surfacique, le champ lu correspond à une pression interne.

Trois modélisations du même problème sont réalisées :

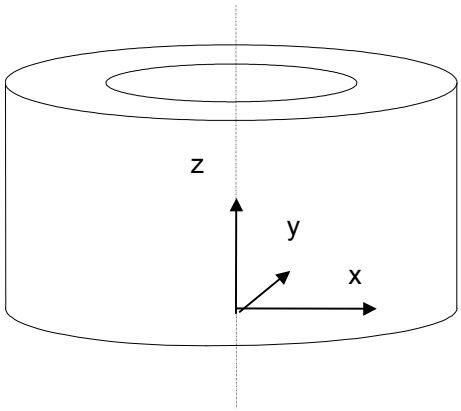
- modélisation 3D ;
- modélisation 2D axisymétrique ;
- modélisation 2D déformations planes ;

La solution de référence est analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Les dimensions géométriques choisies sont les suivantes :

- hauteur = $0.5\,m$;
- rayon intérieur = $1\,m$;
- rayon extérieur = $1.2\,m$.

1.2 Propriétés du matériau

Le cylindre est constitué d'un matériau homogène qui suit une loi de comportement élastique linéaire :

- $E=10\,Pa$;
- $\rho=1\,kg/m^3$;
- $\nu=0.3$.

1.3 Conditions aux limites et chargements (Cf. [Figure 1.3-a])

La force volumique considérée est radiale, elle varie de manière quadratique avec le rayon : $F_V=\alpha.r^2$ avec $\alpha=1\,N/m^3$.
La force surfacique considérée est appliquée sur la paroi interne du cylindre, perpendiculairement à la paroi (équivaut à une pression interne imposée au cylindre) : $F_S(r=R_{\text{int}})=1\text{N}/m^2$.

Les conditions aux limites permettent de se placer dans l'hypothèse des déformations planes sur une section du cylindre : déplacements verticaux bloqués sur les sections haute et basse du cylindre.

Remarque :

Pour la modélisation 3D, la suppression des modes propres est assurée par les conditions du 2D plan appliquées sur la section basse du cylindre. Ce type de conditions aux limites permet d'obtenir une solution axisymétrique en déplacement, directement comparable avec la solution analytique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

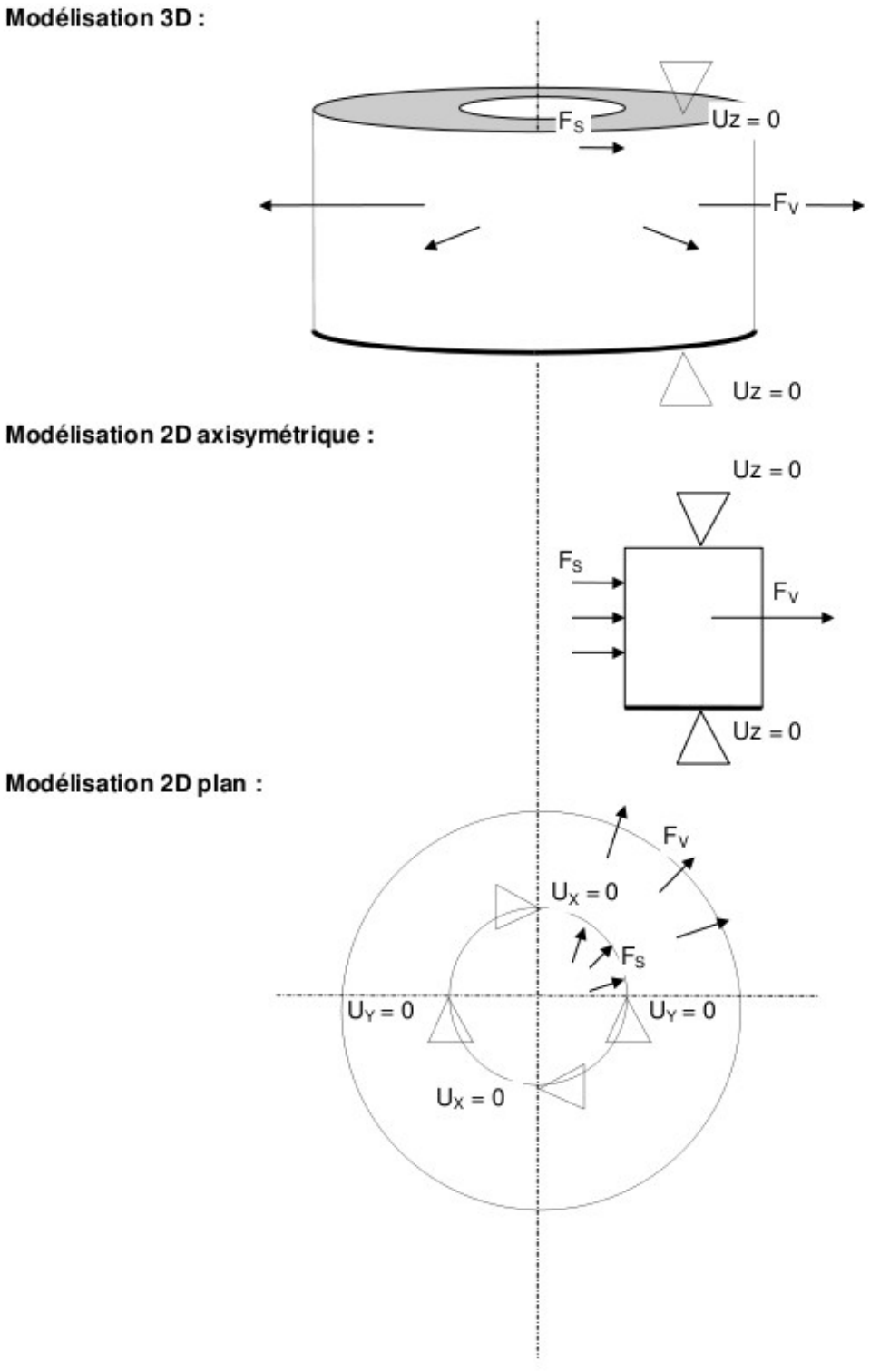


Figure 1.3-a : Conditions aux limites et chargements

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le problème de mécanique statique linéaire axisymétrique considéré peut être résolu de manière analytique. On résout indépendamment la réponse à la sollicitation force volumique et force surfacique pour les sommer ensuite.

Force volumique quadratique $F_V(r)=\alpha r^2$

On considère les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_r}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+f_r=0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{\theta r}}{\partial r}+2\frac{\sigma_{r\theta}}{r}+f_\theta=0 \\ \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{r\partial\theta}+2\frac{\sigma_{r\theta}}{r}+f_z=0 \end{cases}$$ qui se simplifient étant donnée la symétrie axiale

en : $\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+f_r=0$

En utilisant la loi de comportement puis les relations déformations-déplacements, on aboutit à l'équation différentielle suivante : $u''+\frac{u'}{r}-\frac{u}{r^2}+\frac{f_V}{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}=0$

La force volumique appliquée est du type : $f_V=\alpha.r^2$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$u=\frac{-c_1}{2r}-\frac{\alpha(1+\nu)(1-2\nu)r^4}{15E(1-\nu)}+c_2 r \qquad \text{éq 2.1-1}$$

Les deux constantes d'intégrations c_1 et c_2 sont déterminées grâce aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} \sigma(R_{\text{int}})=0 \\ \sigma(R_{ext})=0 \end{cases}$$

On obtient : $$\begin{cases} c_1=\frac{4-3\nu}{1-\nu}\cdot\frac{2\alpha}{15}\cdot\frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{R_{\text{int}}^2R_{ext}^2(R_{\text{int}}^3-R_{ext}^3)}{R_{ext}^2-R_{\text{int}}^2} \\ c_2=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\cdot\frac{4-3\nu}{1-\nu}\cdot\frac{\alpha}{15}\cdot(R_{ext}^3-R_{\text{int}}^2\cdot\frac{R_{\text{int}}^3-R_{ext}^3}{R_{ext}^2-R_{\text{int}}^2}) \end{cases}$$

Force surfacique type pression $F_S(R_{\text{int}})=P$

Le problème à résoudre est de même nature, mais avec une force volumique appliquée nulle : $f_V=0$ soit $\alpha=0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La solution en déplacement [éq 2.1-1] s'écrit alors : $u = \frac{-c_1}{2r} + c_2 r$, devant respecter les conditions :

$$\begin{cases} \sigma(R_{\text{int}}) = -P \\ \sigma(R_{ext}) = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$u = P \cdot \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{R_{\text{int}}^2}{R_{ext}^2 - R_{\text{int}}^2} \left(\frac{R_{ext}^2}{r} + (1-2\nu) \cdot r \right) \qquad \text{éq 2.1-2}$$

2.2 Résultats de référence

Application Numérique :

- hauteur = $0.5\,m$;
- rayon intérieur = $1\,m$;
- rayon extérieur = $1.4\,m$;
- E = $10\,Pa$;
- ρ = $1\,kg/m^3$;
- ν = 0.3 ;
- α = $1\,N/m^5$;
- P = $1\,N/m^2$.

en injectant les valeurs numériques dans les solutions [éq 2.1-1] et [éq 2.1-2] on trouve après sommation :

$$\begin{cases} u(1.0) = 0.52130982\,m \\ u(1.4) = 0.44203108\,m \end{cases}$$

2.3 Incertitudes sur la solution

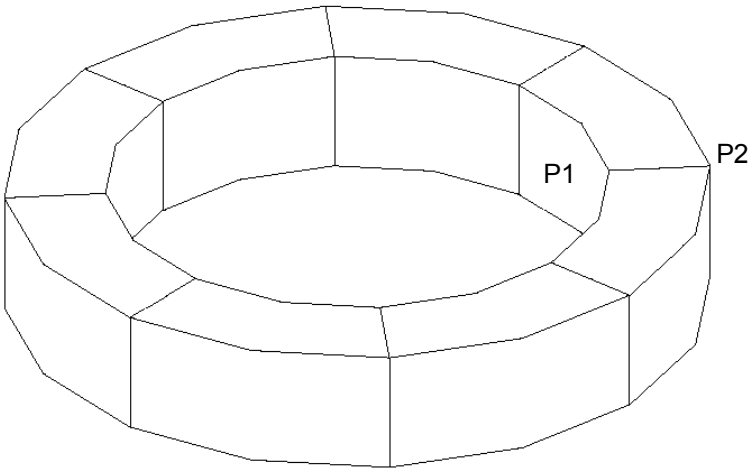
Nulle (solution de référence analytique).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

La cylindre est modélisé en éléments 3D volumiques :



3.2 Caractéristiques du maillage

Le cylindre est représenté par un maillage régulier d'éléments quadratiques à 20 nœuds contenant :

- 8 éléments ;
- 96 nœuds.

Le maillage contient 1 seul élément dans le sens radial et vertical et 8 découpages sur la circonférence.

3.3 Valeurs testées

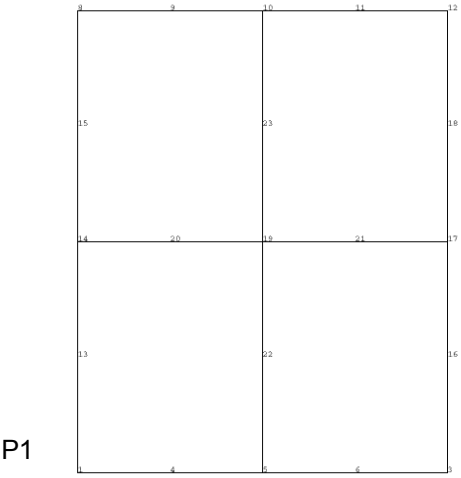
Identification	Instants	Référence
U_X en $P1$	1	0.52130982
U_X en $P2$	1	0.44203108

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Une coupe longitudinale du cylindre est modélisé en éléments 2D volumiques, en considérant l'hypothèse d'axisymétrie.



4.2 Caractéristiques du maillage

Le cylindre est représenté par un maillage régulier d'éléments quadratiques à 8 nœuds contenant :

- 4 éléments ;
- 21 nœuds.

Le maillage contient 2 découpages dans le sens radial et 2 découpages dans le sens vertical.

4.3 Valeurs testées

Identification	Instants	Référence
U_X en $P1$	1	0.52130982
U_X en $P2$	1	0.44203108

4.4 Remarque

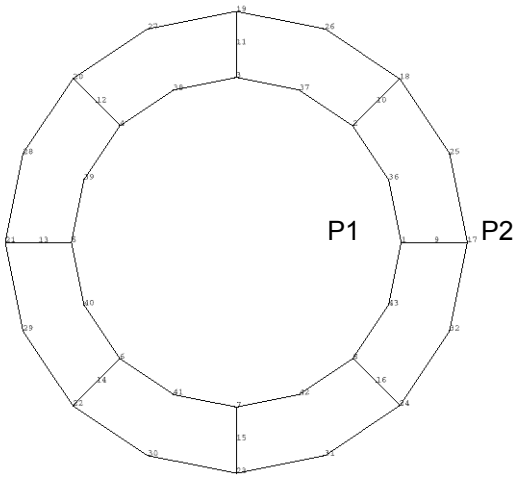
Modélisation plus performante que le 3D car 2 découpages dans le sens radial et pas de discrétisation circonférentielle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Une coupe transversale du cylindre est modélisée en éléments 2D volumiques, en considérant l'hypothèse des déformations planes.



5.2 Caractéristiques du maillage

Le cylindre est représenté par un maillage régulier d'éléments quadratiques à 8 nœuds contenant :

- 8 éléments ;
- 40 nœuds.

Le maillage contient 1 seul découpage dans le sens radial et 8 découpages dans le sens vertical (comme le 3D).

5.3 Valeurs testées

Identification	Instants	Référence
U_X en $P1$	1	0.52130982
U_X en $P2$	1	0.44203108

5.4 Remarques

Modélisation de performance très voisine du 3D car mêmes discrétisations circonférentielle et radiale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus par *code_Aster* sont très proches de la solution analytique, malgré des maillages très grossiers.

Les modélisations 3D et 2D plane fournissent des précisions très voisines car elles présentent les mêmes discrétisations circonférentielle et radiale. La modélisation 2D axisymétrique est plus performante car elle présente 2 découpages dans le sens radial et pas de discrétisation circonférentielle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)