SSLV154 – Fissure circulaire en mode mixte

Résumé :

Ce test a pour but de valider le calcul des facteurs d'intensité de contrainte (SIFs) le long du fond d'une fissure 3D en mode mixte, dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Ce test met en jeu un cube avec une fissure circulaire centrale plane, soumise à une force inclinée par rapport au plan de la fissure.

Ce test contient 2 modélisations :
- Modélisation A : la fissure est maillée (FEM) avec maillage rayonnant en fond de fissure ;
- Modélisation B : la fissure n'est pas maillée, elle est représentée par des level-sets (X-FEM)
- Modélisation C : la fissure est maillée (FEM) pour les éléments incompressibles (_INCO_UPG, _INCO_UP);
- Modélisation D : la fissure est maillée (FEM) avec maillage libre issu de Zcracks

Pour chaque modélisation, les SIFs sont évalués par les commandes POST_K1_K2_K3 et CALC_G.
Les valeurs numériques sont comparées aux valeurs analytiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

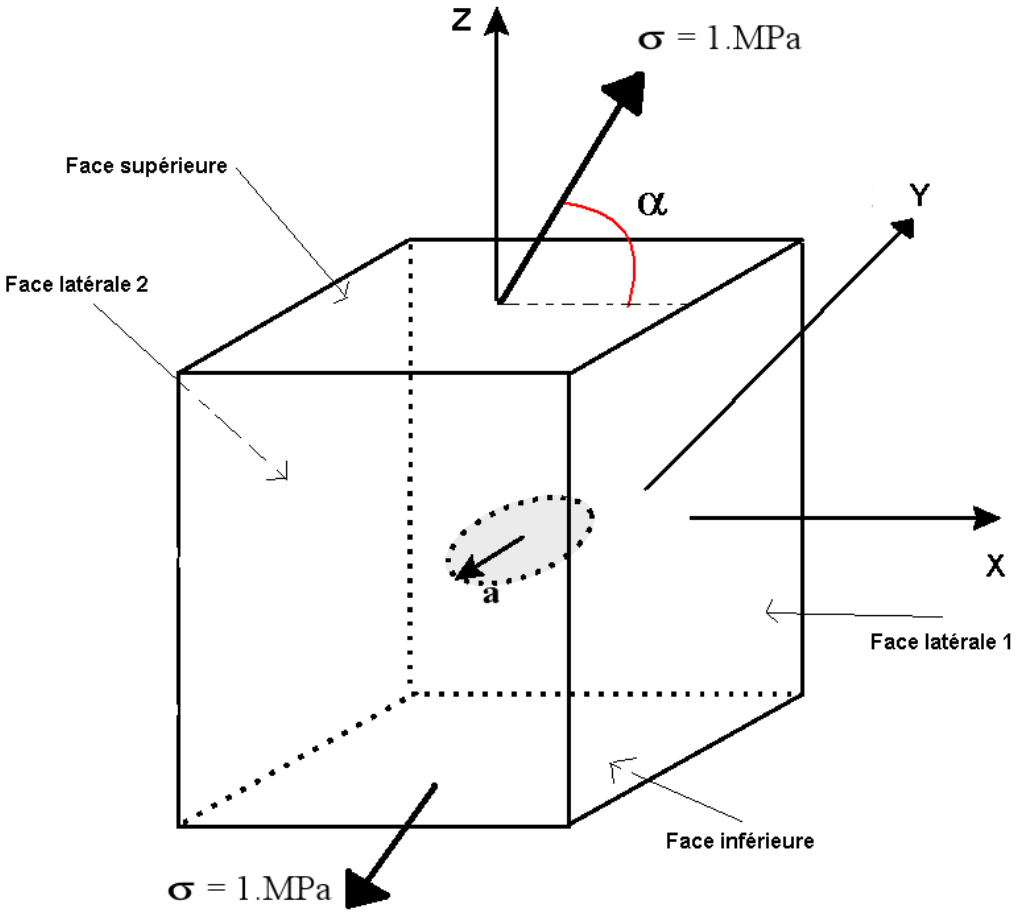


Figure 1.1-1: géométrie du cube fissuré

La fissure est circulaire (penny shaped crack) de rayon $a=2\mathrm{m}$ dans le plan OXY. Le coté du cube est de longueur $L=10\mathrm{a}$. Ainsi, on considère que la fissure se trouve dans un milieu infini.

1.2 Propriétés de matériaux

Le matériau est élastique isotrope dont les propriétés sont :

$E=200000\,\mathrm{MPa}$

$\nu=0,3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Compte tenu des symétries de la structure, de la fissure et des chargements, seule la moitié de la structure est modélisée : demi-espace tel que $Y>0$. Des conditions de symétrie sont donc appliquées sur la face en $Y=0$: sur cette face, le déplacement suivant Y est bloqué.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

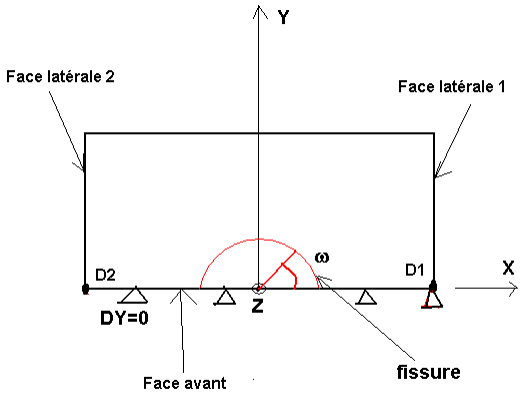


Figure 1.3-1: Condition de symétrie

La structure est soumise à une contrainte $\sigma_{xx}=1\,MPa$. Le repère local (x,y,z) est obtenu par rotation d'un angle $\alpha=\pi/4$ autour de l'axe OY.

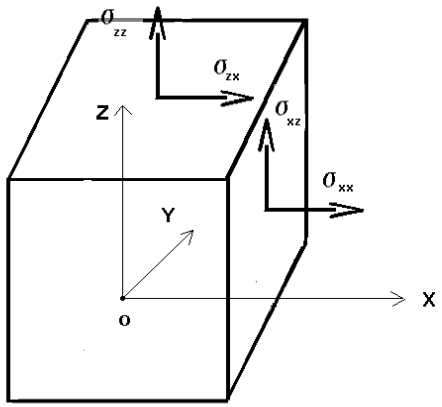


Figure 1.3-2: Contraintes dans le repère global

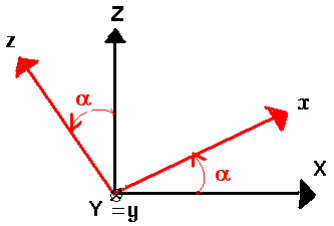


Figure 1.3-3: Repère local

Ainsi, nous avons :

sur la face supérieure :

- $\sigma_{ZZ}=\sigma\sin^2(\alpha)$
- $\sigma_{ZX}=\sigma\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

sur la face inférieure :

- $\sigma_{ZZ}=-\sigma\sin^2(\alpha)$
- $\sigma_{ZX}=-\sigma\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

sur la face latérale de droite :

- $\sigma_{XX}=\sigma\cos^2(\alpha)$
- $\sigma_{XZ}=\sigma\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

sur la face latérale de gauche :

- $\sigma_{XX}=-\sigma\cos^2(\alpha)$
- $\sigma_{XZ}=\sigma\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

Afin de bloquer les modes de corps rigides, le point $D1\ (L/2,0,0)$ est bloqué suivant X et Z et le point $D2\ (-L/2,0,0)$ est bloqué suivant Z.

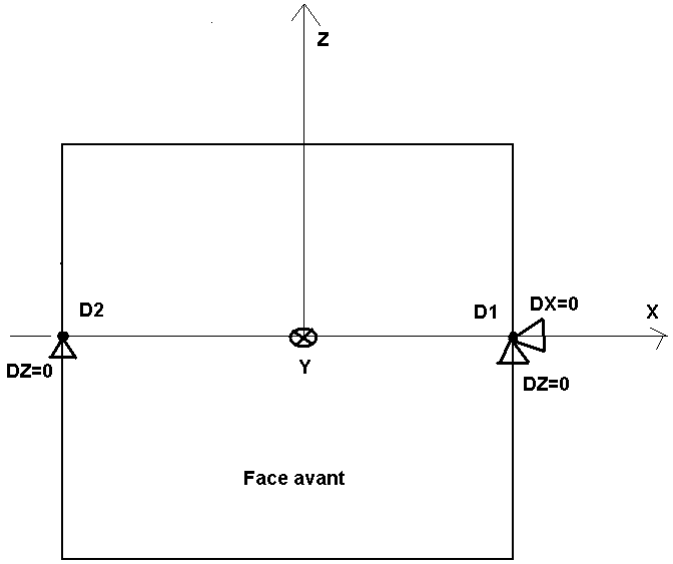


Figure 1.3-4: Blocage des modes rigides

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est une solution analytique issue de (1) , pour une fissure circulaire de rayon a dans un milieu infini, soumise à une force de surface uniforme σ incliné d'un angle α au plan de la fissure, les facteurs d'intensité de contrainte pour un point A placé sur le front de fissure valent :

$$K_I = \frac{2}{\pi}\sigma(\sin^2\alpha)\sqrt{\pi a}$$
$$K_{II} = \frac{4}{\pi(2-\nu)}\sigma(\sin\alpha\cos\alpha)\cos\omega\sqrt{\pi a}$$
$$K_{III} = \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)}\sigma(\sin\alpha\cos\alpha)\sin\omega\sqrt{\pi a}$$

ω étant l'angle caractérisant la position du point A sur le fond circulaire (voir Figure 1.3-1).

2.2 Résultats de référence

Pour le chargement considéré et $a=2\mathrm{m}$, le Tableau 2.2-1 donne les valeurs analytiques des SIFs le long de la moitié du fond de fissure, pour ω compris entre $0°$ et $180°$. Ces valeurs sont aussi présentées sur la Figure 2.2-1.

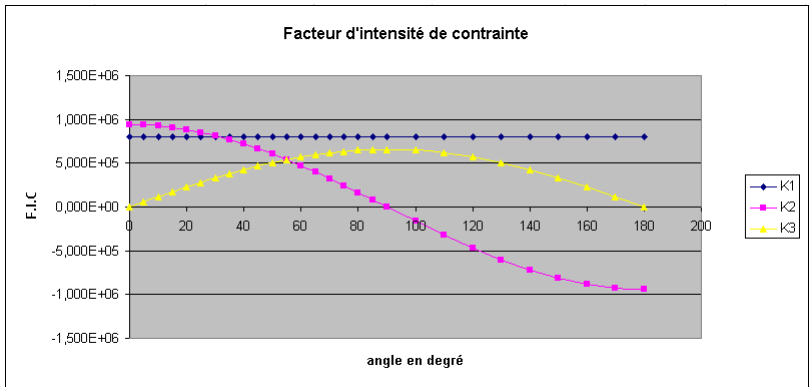


Figure 2.2-1: Valeurs de référence des SIFs

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Angle ω (°)	$K_I \ (Pa.\sqrt{M})$	$K_{II} \ (Pa.\sqrt{M})$	$K_{III} \ (Pa.\sqrt{M})$
0	7,978E+05	9,387E+05	0,0E+05
5	7,978E+05	9,351E+05	5,727E+04
10	7,978E+05	9,244E+05	1,141E+05
15	7,978E+05	9,067E+05	1,701E+05
20	7,978E+05	8,821E+05	2,247E+05
25	7,978E+05	8,507E+05	2,777E+05
30	7,978E+05	8,129E+05	3,285E+05
35	7,978E+05	7,689E+05	3,769E+05
40	7,978E+05	7,191E+05	4,224E+05
45	7,978E+05	6,638E+05	4,646E+05
50	7,978E+05	6,034E+05	5,034E+05
55	7,978E+05	5,384E+05	5,382E+05
60	7,978E+05	4,693E+05	5,690E+05
65	7,978E+05	3,967E+05	5,955E+05
70	7,978E+05	3,211E+05	6,175E+05
75	7,978E+05	2,430E+05	6,347E+05
80	7,978E+05	1,630E+05	6,471E+05
85	7,978E+05	8,181E+04	6,546E+05
90	7,978E+05	5,750E-11	6,571E+05
100	7,978E+05	-1,630E+05	6,471E+05
110	7,978E+05	-3,211E+05	6,175E+05
120	7,978E+05	-4,693E+05	5,690E+05
130	7,978E+05	-6,034E+05	5,034E+05
140	7,978E+05	-7,191E+05	4,224E+05
150	7,978E+05	-8,129E+05	3,285E+05
160	7,978E+05	-8,821E+05	2,247E+05
170	7,978E+05	-9,244E+05	1,141E+05
180	7,978E+05	-9,387E+05	8,050E-11

Tableau 2.2-1: Valeurs de référence

2.3 Références bibliographiques

(1) TADA H., PARIS P., IRWIND G. : The stress analysis of cracks handbook, 3ème éd., 2000

(2) LORENTZ E., Effet d'un maillage libre d'une structure tridimensionnelle fissurée sur la qualité du calcul du taux de restitution d'énergie, CR-I20-2010-11, 2010

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la fissure est maillée (cas FEM). Le maillage comporte un tore entourant le fond de fissure.

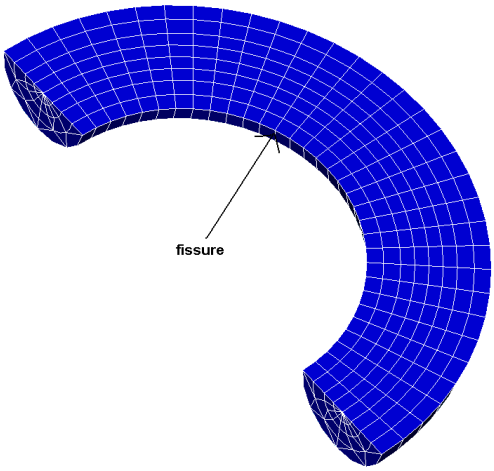


Figure 3.1-1: maillage rayonnant

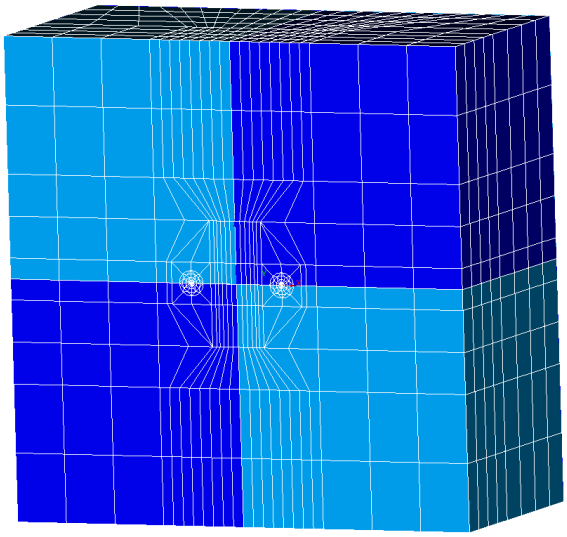


Figure 3.1-2: maillage de la structure

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 9967
Nombre de mailles et type : 864 PENTA15 et 1568 HEXA20
La longueur caractéristique d'un élément près du fond de fissure est de $0,12\,m$.

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes.

3.3 Grandeurs testées et résultats

Les couronnes d'intégration du champ théta pour la commande CALC_G sont :
$\mathrm{RINF}=0,1\,m$ et $\mathrm{RSUP}=0,5\,m$.
On teste le lissage de type LEGENDRE et le lissage de type LINEAIRE. Pour ce dernier, les résultats sont lissés par un traitement qui utilise une fonction chapeau aux nœuds sommets des segments du fond de fissure. Ce traitement est activé automatiquement dans le cas quadratique, pour éviter les oscillations des valeurs de G(s) dans ce cas (vopir référence (2)). On note alors G « chapeau » ($\hat{G}$) cette composante lissée. Le même traitement est également appliqué aux valeurs des facteurs d'intensité des contraintes obtenus par l'option K de CALC_G.
Le paramètre ABS_CURV_MAXI de l'opérateur POST_K1_K2_K3 est choisi de manière à retenir 5 nœuds sur le segment d'extrapolation.

Pour tester la valeur de K_I pour tous les points du fond de fissure, on teste le min et le max des valeurs le long du fond.
Le K_{II} est testé uniquement au point tel que $\omega=0°$ (où K_{II} est normalement maximal).
Le K_{III} est testé uniquement au point tel que $\omega=90°$ (où K_{III} est normalement maximal).

Théoriquement, il faudrait tester la valeur absolue de K_{II} et K_{III} car le signe est arbitraire.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3.1 Valeurs issues de CALC_G

Les valeurs sont en $Pa.\sqrt{m}$.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$max(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	5,5%
$min(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	4,0%
K_{II} en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	9,386 10^5	9,0%
K_{III} en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	6,570 10^5	3,0%
$\hat{G}$ en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	6,906	0,1%
$\hat{G}$ en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	5,703	1,0%
$\hat{K}_I$ en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	4,5%
$\hat{K}_I$ en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	5,5%

3.3.2 Valeurs issues de POST_K1_K2_K3

Les valeurs sont en $Pa.\sqrt{m}$.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$max(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	3%
$min(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	2%
K_{II} en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	9,386 10^5	2%
K_{III} en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	6,570 10^5	2%

3.4 Remarques

Les Figure 3.4-1, Figure 3.4-2, Figure 3.4-3 et Figure 3.4-4 montrent l'évolution de G, K_I K_{II} et K_{III} le long du fond de fissure. On constate que le K3 n'est pas correct. Cela est dû à des incorrections de la base locale aux extrémités, qui sont propagées sur tout le front à cause des polynômes de LEGENDRE.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

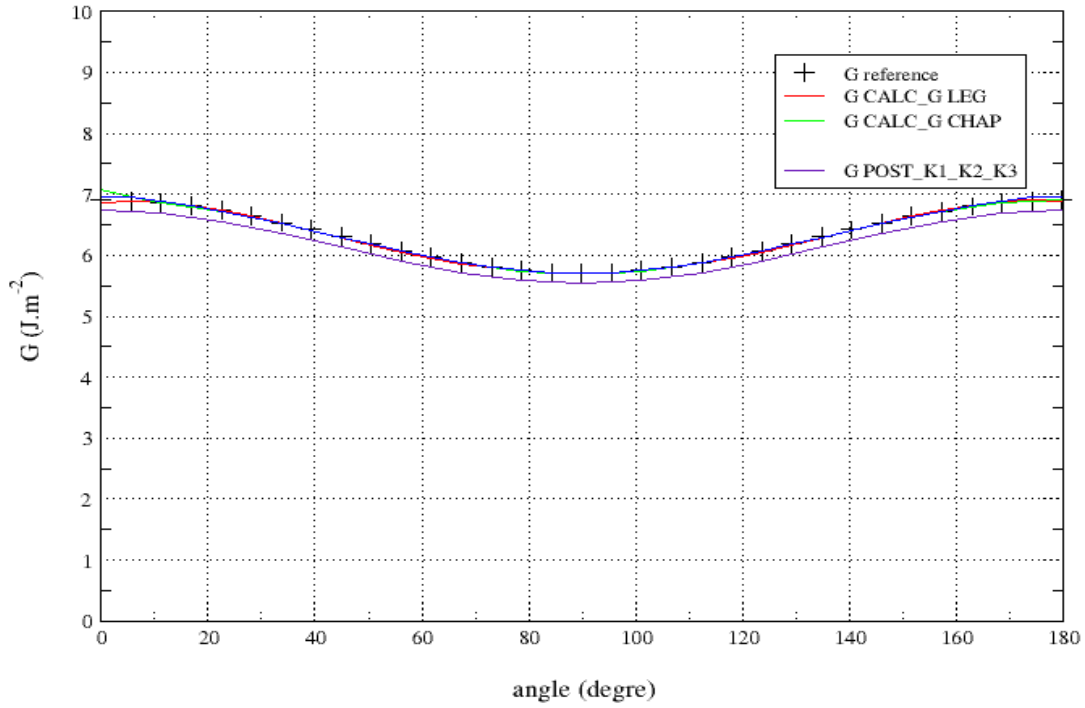


Figure 3.4-1: G le long du fond de fissure

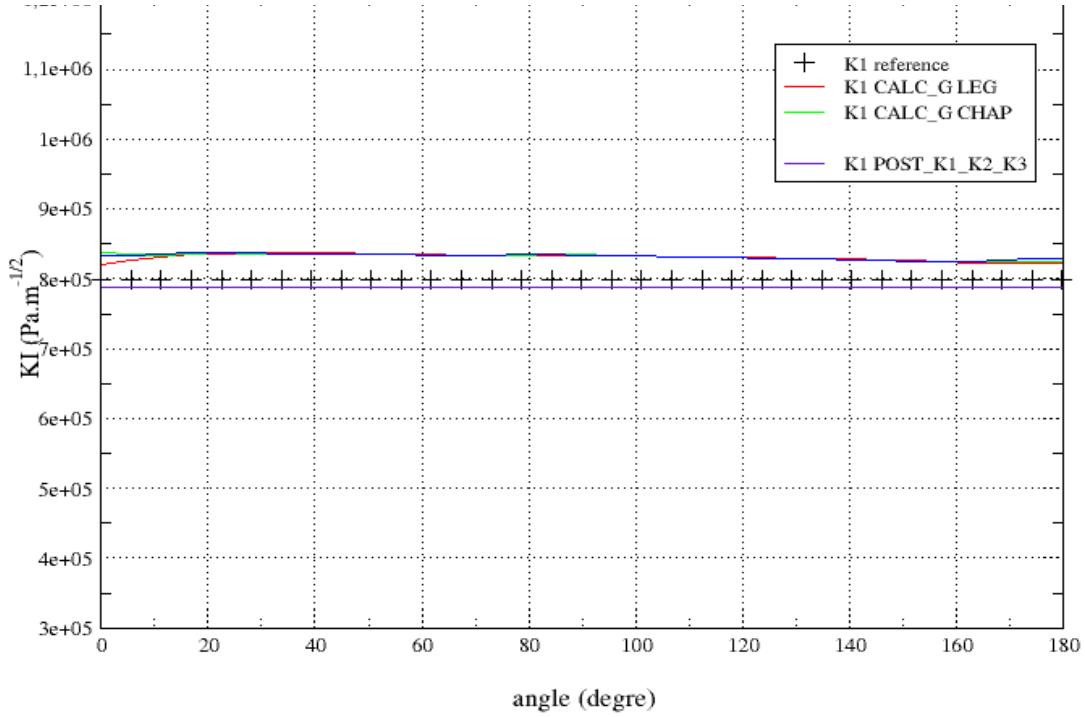


Figure 3.4-2: K1 le long du fond de fissure

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

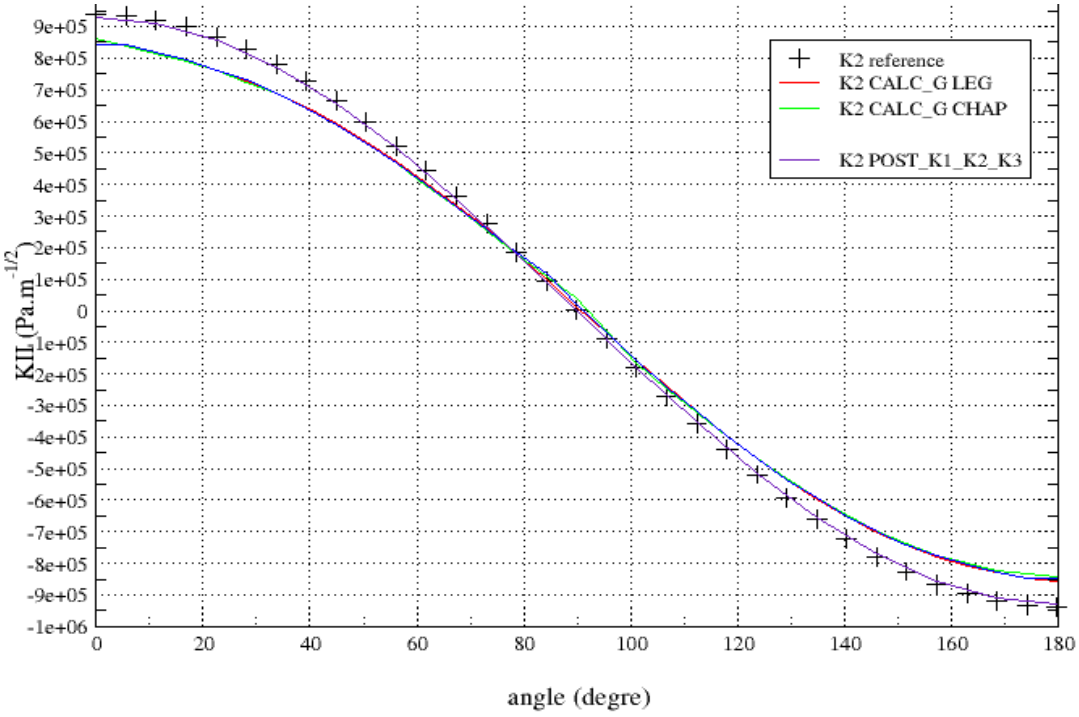


Figure 3.4-3: K2 le long du fond de fissure

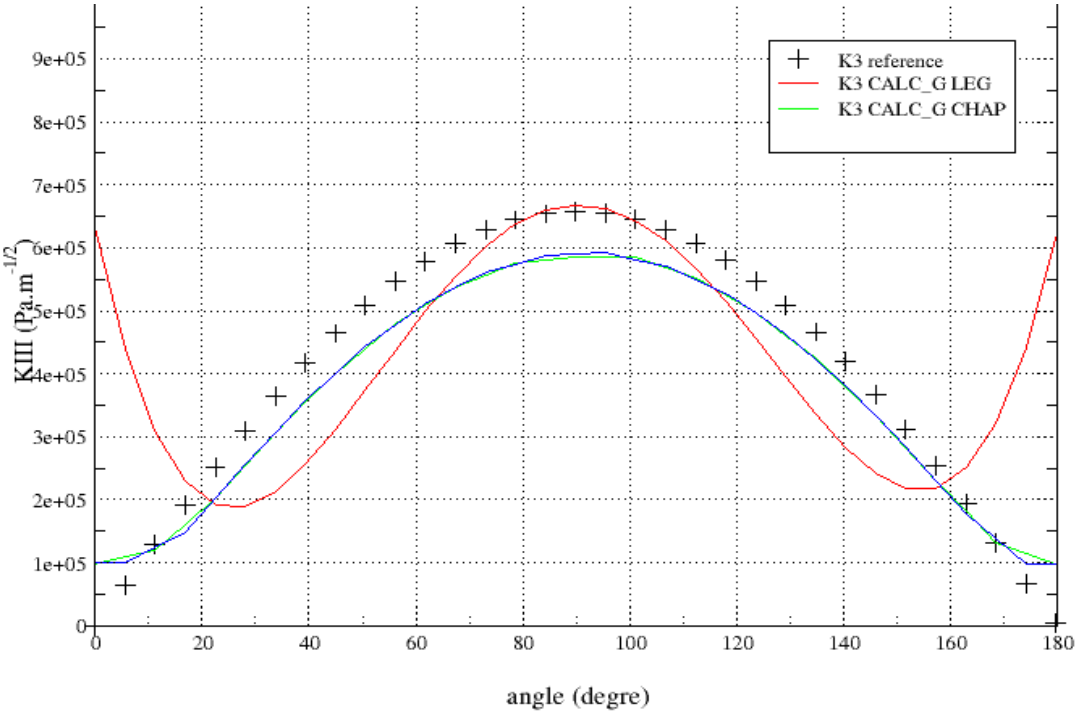


Figure 3.4-4: K3 le long du fond de fissure

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour information, la Figure 3.4-5 présente une comparaison des SIFs le long du fond de fissure avec un lissage de LINEAIRE brut et avec le lissage « chapeau ». On constate que les valeurs brut du lissage de LINEAIRE oscillent le long du fond. Ceci est dû aux fonctions de formes des éléments quadratiques qui sont différentes entre les nœuds milieux et nœuds sommets et qui rendent non-physique l'interprétation du G(s) (et donc des Ki(s)), comme le serait une réaction nodale sur un élément quadratique. Le lissage « chapeau » est une méthode permettant de contourner cette difficulté comme proposé dans la référence (2).

On constate également qu'il y a une erreur plus importante sur les points aux extrémités du fond pour K_{II} et K_{III} issus de CALC_G. Cela est dû à un traitement particulier des points aux extrémités, qui ne fonctionne bien que si la solution est constante le long du fond. Cela explique pourquoi les valeurs de K_I sont meilleures. Ce traitement particulier n'est réalisé que pour les résultats (G, K_I K_{II} et K_{III}) issus de l'option CALC_G OPTION K, lissage LINEAIRE.

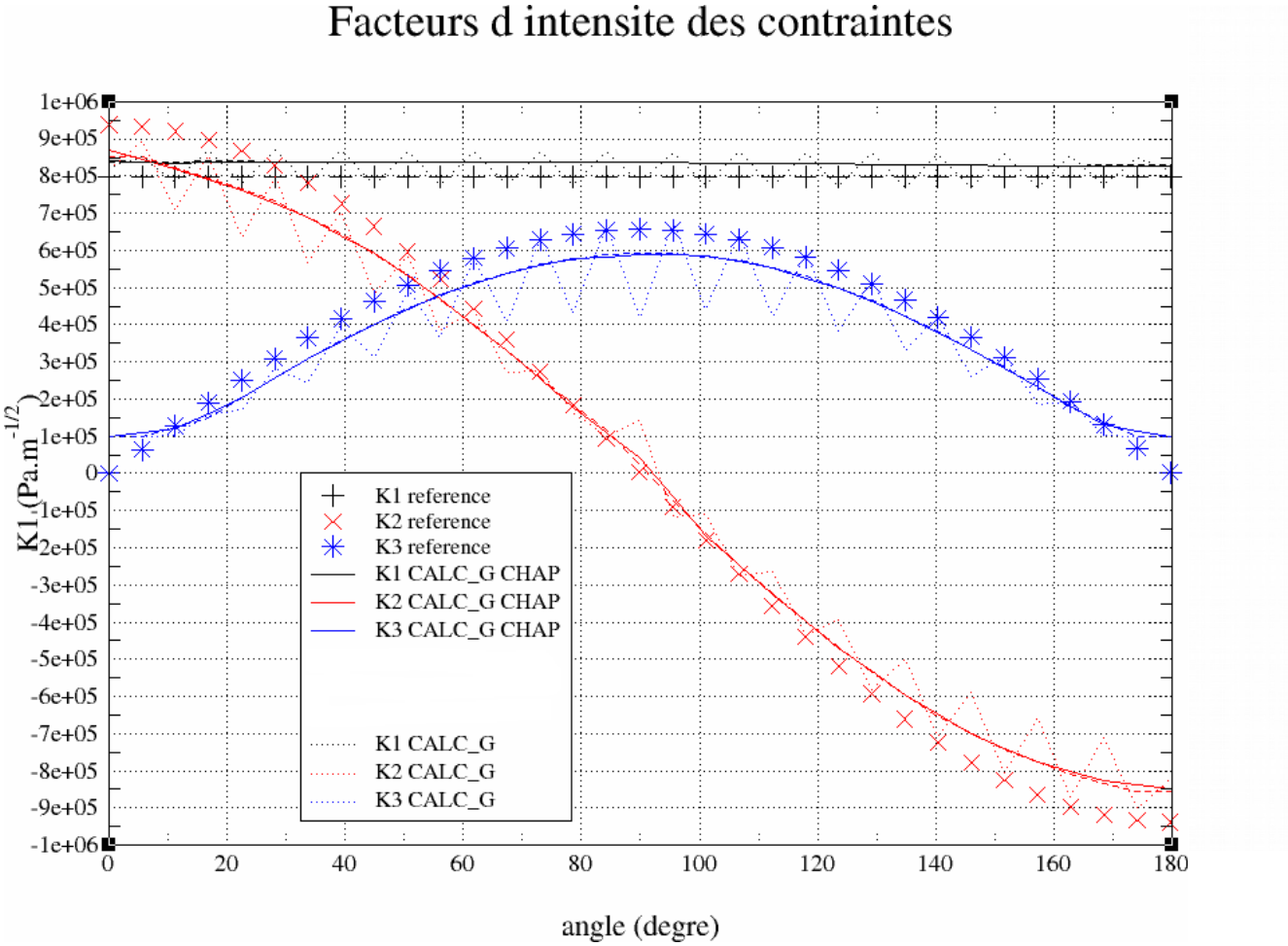


Figure 3.4-5 : Comparaison des valeurs de K1, K2 et K3 pour le lissage de LINEAIRE avec les fonctions « chapeau »

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la fissure n'est pas maillée (cas X-FEM).
Afin d'obtenir une meilleur précision sur les résultats, le maillage initial libre a été raffiné au niveau du fond de fissure à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL.

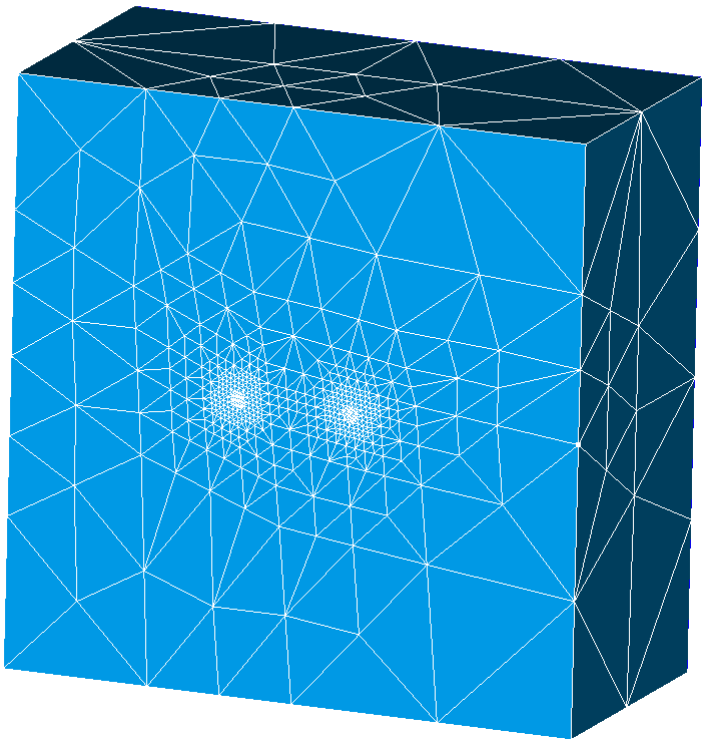


Figure 4.1-1: maillage de la structure raffiné

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1146
Nombre de mailles et type : 64573 TETRA4
La longueur caractéristique d'un élément près du fond de fissure est de $0{,}07\,m$.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Le choix des paramètres numériques pour le post-traitement des SIFs est identique à celui fait pour la modélisation A.

De plus, afin de lisser les résultats de CALC_G_XFEM (inévitable sur un maillage libre), il est nécessaire de ne post-traiter les SIFs qu'en un nombre limité de points, répartis uniformément le long du fond de fissure. On choisit ici 21 points de post-traitement (initialement, il y a 289 points le long du fond de fissure). Cela permet aussi de réduire le temps CPU du post-traitement.

On choisit de la même manière 21 points de post-traitement pour POST_K1_K2_K3.

4.3.1 Valeurs issues de CALC_G

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les valeurs sont en $Pa.\sqrt{m}$.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$max(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	6%
$min(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	3%
K_{II} en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	9,386 10^5	14%
K_{III} en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	6,570 10^5	10%

4.3.2 Valeurs issues de POST_K1_K2_K3

Les valeurs sont en $Pa.\sqrt{m}$.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$max(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	1%
$min(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	3%
K_{II} en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	9,386 10^5	2%
K_{III} en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	6,570 10^5	2%

4.4 Remarques

On constate que, comme pour la modélisation A, CALC_K_G_XFEM donne des résultats moins précis que POST_K1_K2_K3. Pour les fronts courbes, il vaut mieux privilégier le post-traitement des SIF avec POST_K1_K2_K3, pour garder une erreur acceptable en propagation une fissure. Les résultats X-FEM sont aussi précis que les résultats avec une fissure maillée (modélisation A), ce qui renforce encore l'intérêt de l'utilisation X-FEM par rapport à la méthode FEM.
On obtient un très bon accord entre les valeurs de K2 et K3 calculées avec POST_K1_K2_K3 et les valeurs de la solution analytique (voir Figure 4.4-1 Figure 4.4-2).
De plus, on n'observe pas d'effet de parasitage aux bords comme c'est le cas dans la modélisation A. Avec une fissure maillée, on note en effet l'apparition d'un cisaillement aux points débouchants de la fissure difficile à expliquer (voir Figure 3.4-5).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

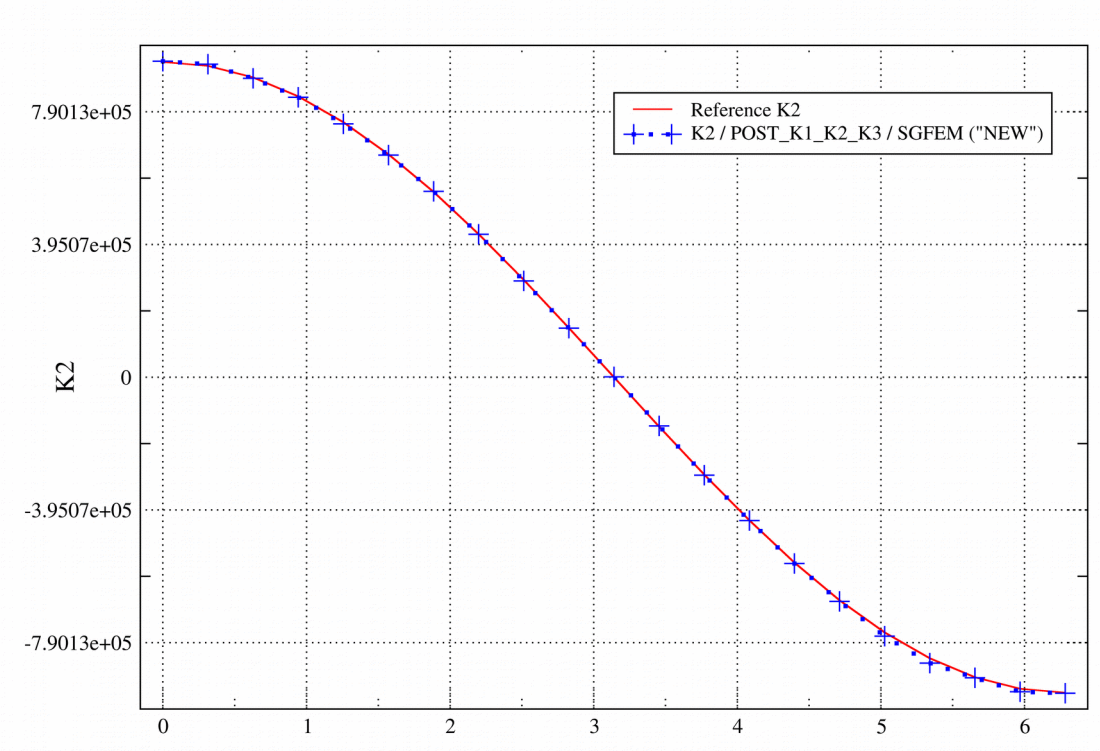


Figure 4.4-1: mode 2 le long du front en fonction de l'abscisse curviligne

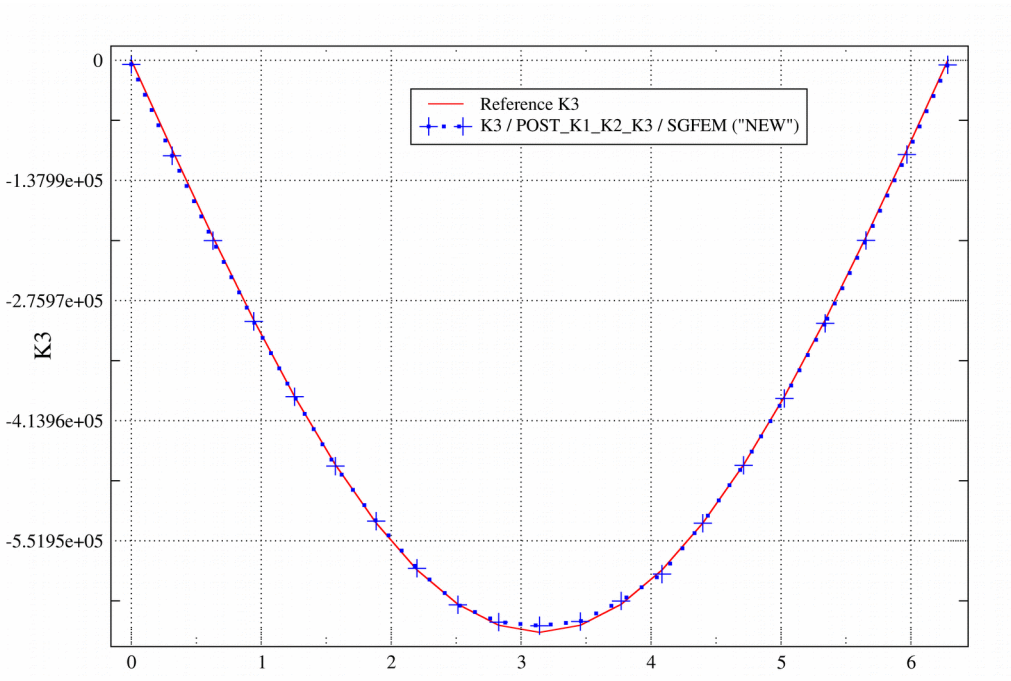


Figure 4.4-2: mode 3 le long du front en fonction de l'abscisse curviligne

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Identiques à la modélisation A sauf pour les éléments 3D_INCO_UPG et 3D_INCO_UP

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 9967
Nombre de mailles et type : 864 PENTA15 et 1568 HEXA20
La longueur caractéristique d'un élément près du fond de fissure est de $0,06\,m$.

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Les couronnes d'intégration du champ théta pour la commande CALC_G sont :
$\mathrm{RINF}=0,1\,m$ et $\mathrm{RSUP}=0,5\,m$.
On choisit un lissage de type LINEAIRE.
Le paramètre ABS_CURV_MAXI de l'opérateur POST_K1_K2_K3 est choisi de manière à retenir 5 nœuds sur le segment d'extrapolation.

Pour tester la valeur de K_I pour tous les points du fond de fissure, on teste le min et le max des valeurs le long du fond.
Le K_{II} est testé uniquement au point tel que $\omega=0°$ (où K_{II} est normalement maximal).
Le K_{III} est testé uniquement au point tel que $\omega=90°$ (où K_{III} est normalement maximal).

Théoriquement, il faudrait tester la valeur absolue de K_{II} et K_{III} car le signe est arbitraire.

5.3.1 Valeurs issues de CALC_G

Les valeurs sont en $Pa.\sqrt{m}$ obtenues à partir du cas test SSLV154A.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$max(K_I)$	'ANALYTIQUE'	8,361 10^5	3%
$min(K_I)$	'ANALYTIQUE'	8,361 10^5	1%
K_{II} en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	8,644 10^5	2%
K_{III} en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	6,747 10^5	3%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Dans cette modélisation, la fissure est maillée avec Zcracks (cas FEM). Le maillage est libre.

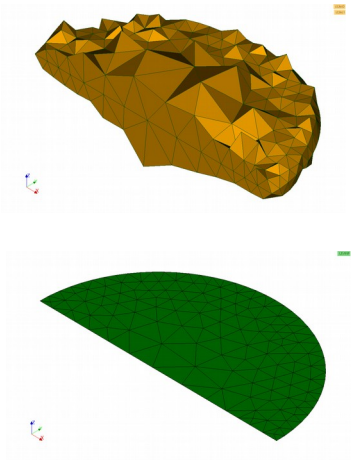


Figure 6.1-1: maillage libre

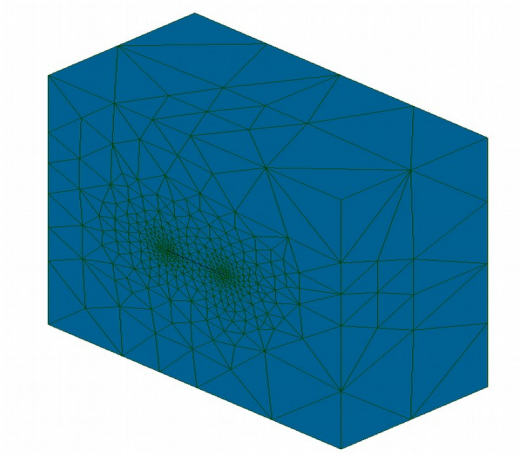


Figure 6.1-2: maillage de la structure

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 19666
Nombre de mailles et type : 13697 TETRA10
Nombre de nœuds en fond de fissure : 83
La longueur caractéristique d'un élément près du fond de fissure est de $0,15\,m$.

Les nœuds milieux des arêtes des éléments touchant le fond de fissure sont déplacés au quart de ces arêtes.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Les couronnes d'intégration du champ théta pour la commande CALC_G sont :
$\mathrm{RINF}=0,06\,m$ et $\mathrm{RSUP}=0,22\,m$.
On choisit trois types de lissage :

- LEGENDRE avec DEGRE=5 (valeur par défaut)
- LINEAIRE avec un nombre de points réduit en fond de fissure (NB_POINT_FOND = 21)
- LINEAIRE avec le lissage « chapeau » appliqué à posteriori

Pour tester la valeur de K_I pour tous les points du fond de fissure, on teste le min et le max des valeurs le long du fond.
Le K_{II} est testé uniquement au point tel que $\omega=0°$ (où K_{II} est normalement maximal).
Le K_{III} est testé uniquement au point tel que $\omega=90°$ (où K_{III} est normalement maximal).

Théoriquement, il faudrait tester la valeur absolue de K_{II} et K_{III} car le signe est arbitraire.

6.3.1 Valeurs issues de CALC_G option K avec un lissage de Legendre

Les valeurs sont en $Pa\,.\sqrt{m}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$max(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	10,0%
$min(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	10,0%
K_{II} en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	9,386 10^5	10,0%
K_{III} en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	6,570 10^5	10,0%

6.3.2 Valeurs issues de CALC_G option K avec un lissage de LINEAIRE et un nombre de points réduit en fond de fissure

Les valeurs sont en $Pa.\sqrt{m}$.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$max(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	10,0%
$min(K_I)$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	10,0%
K_{II} en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	9,386 10^5	10,0%
K_{III} en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	6,570 10^5	10,0%

6.3.3 Valeurs issues de CALC_G option K avec un lissage de LINEAIRE et le lissage « chapeau »

Les valeurs sont en $Pa.\sqrt{m}$.

Identification	Type de référence	Valeur de référence	% Tolérance
$\hat{G}$ en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	6,906	70%
$\hat{G}$ en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	5,703	6,0%
$\hat{K}_I$ en $\omega=0°$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	11,0%
$\hat{K}_I$ en $\omega=90°$	'ANALYTIQUE'	7,978 10^5	7,5%

6.4 Remarques

Les tolérances sont assez élevées avec l'utilisation d'un lissage de LINEAIRE et NB_POINT_FOND, cependant, raffiner le maillage permet d'améliorer les résultats.

Les Figure 6.4-1, Figure 6.4-2, Figure 6.4-3 et Figure 6.4-4 montrent l'évolution de G, K_I K_{II} et K_{III} le long du fond de fissure. On constate que le K3 n'est pas correct. Cela est dû à des incorrections de la base locale aux extrémités, qui sont propagées sur tout le front à cause des polynômes de LEGENDRE.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

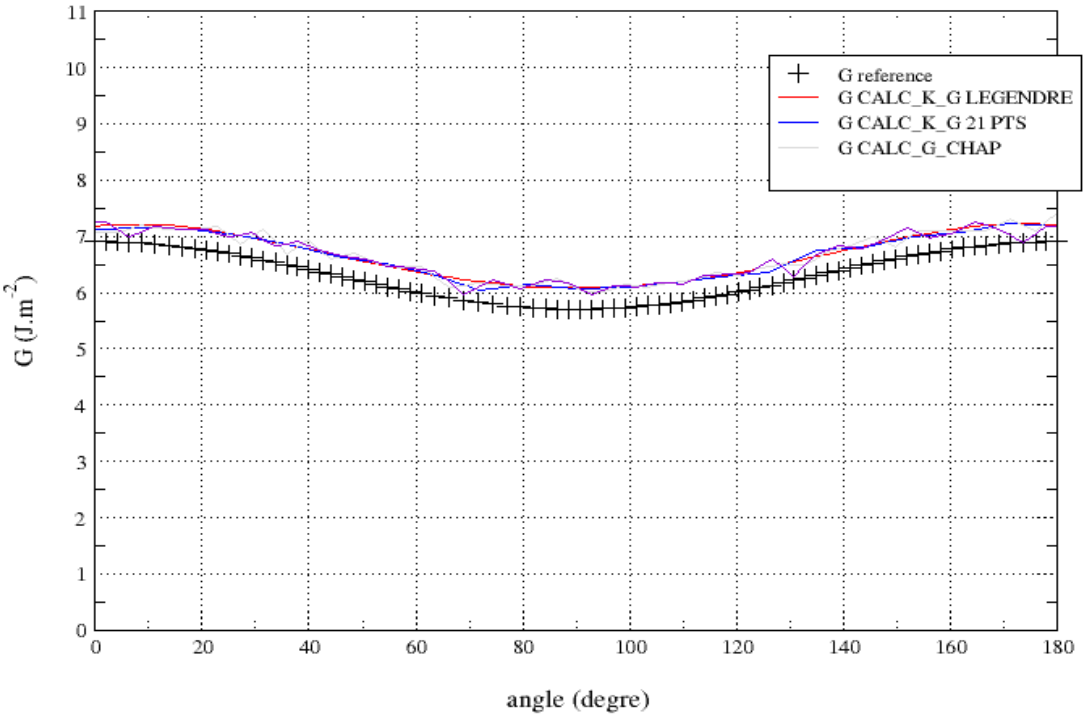


Figure 6.4-1: G le long du fond de fissure

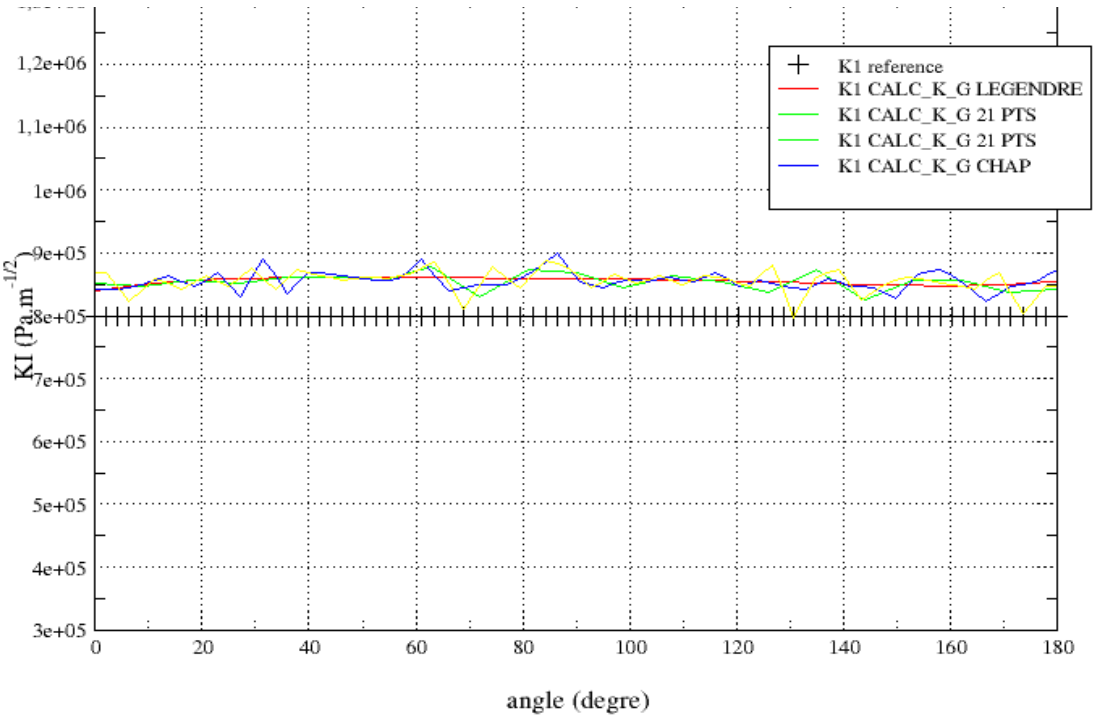


Figure 6.4-2: K1 le long du fond de fissure

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

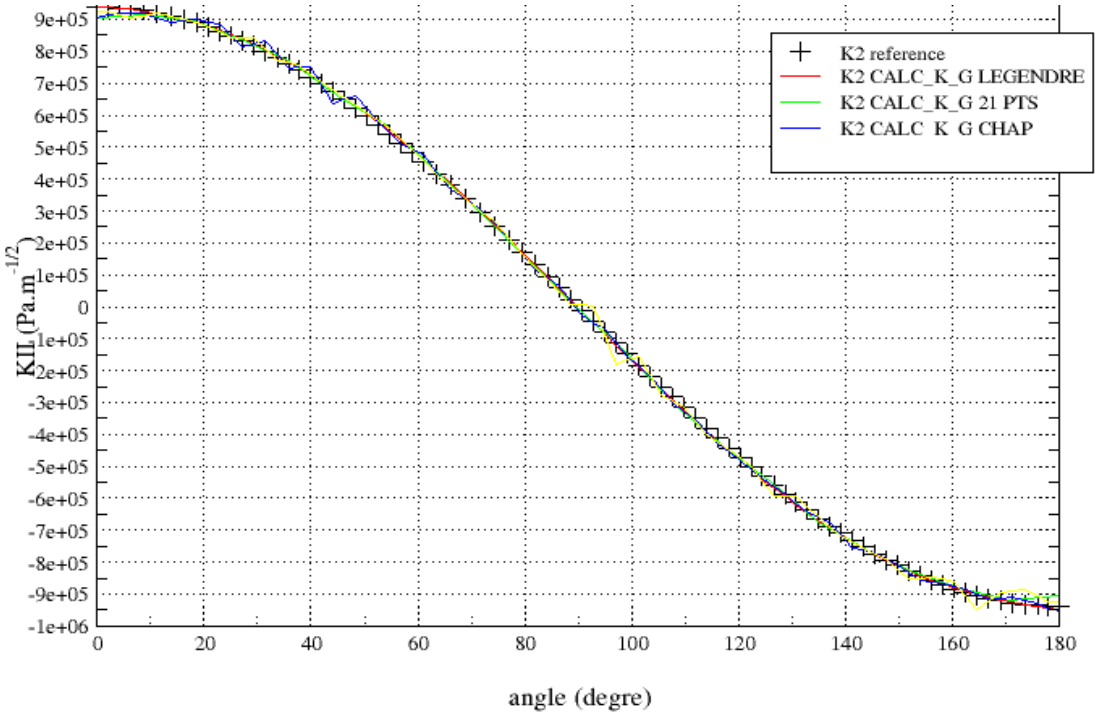


Figure 6.4-3: K2 le long du fond de fissure

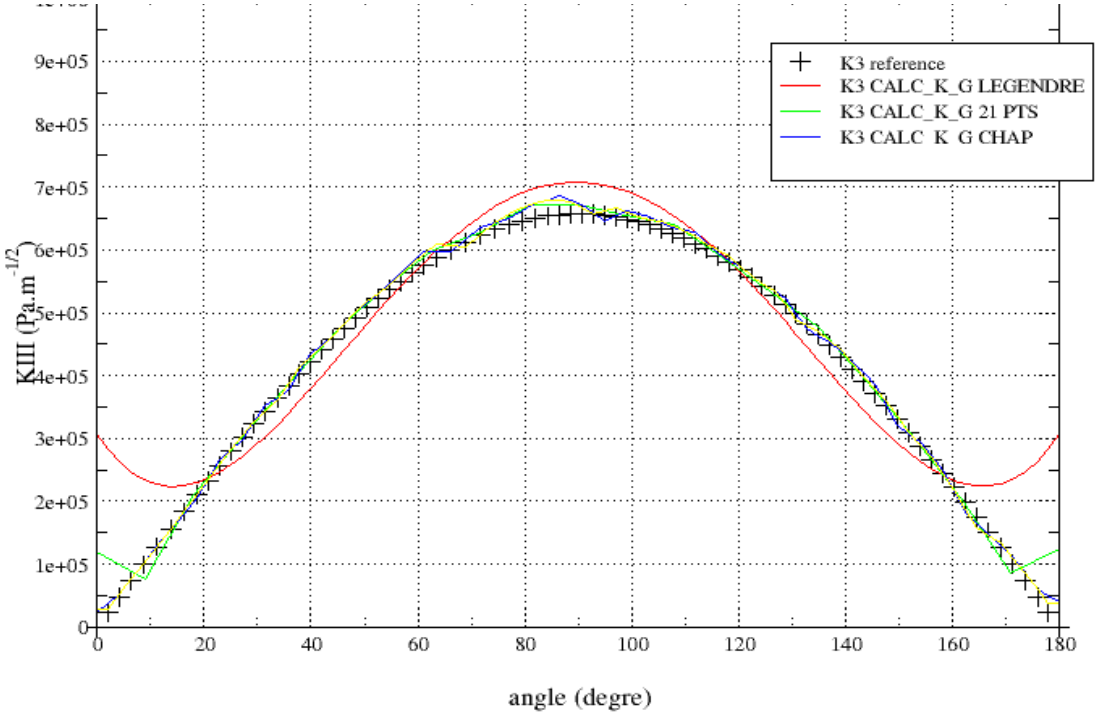


Figure 6.4-4: K3 le long du fond de fissure

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette modélisation valide le calcul de G et des facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure 3D en mode mixte avec l'utilisation de l'option NB_POINT_FOND qui permet de réduire le nombre de points en fond de fissure pour le lissage de LINEAIRE. L'utilisation de cette option est fortement préconisée pour un lissage de LINEAIRE avec un maillage libre et un nombre de nœuds important en fond de fissure ; ainsi, le temps de calcul est significativement diminué ainsi que les oscillations présentes pour lissage de LINEAIRE est utilisé sans NB_POINT_FOND. De même, le lissage « chapeau » permet également de supprimer les oscillations des valeurs de G et K, comme montré en Figure 6.4-5, qui sont d'autant plus importantes pour un maillage libre.

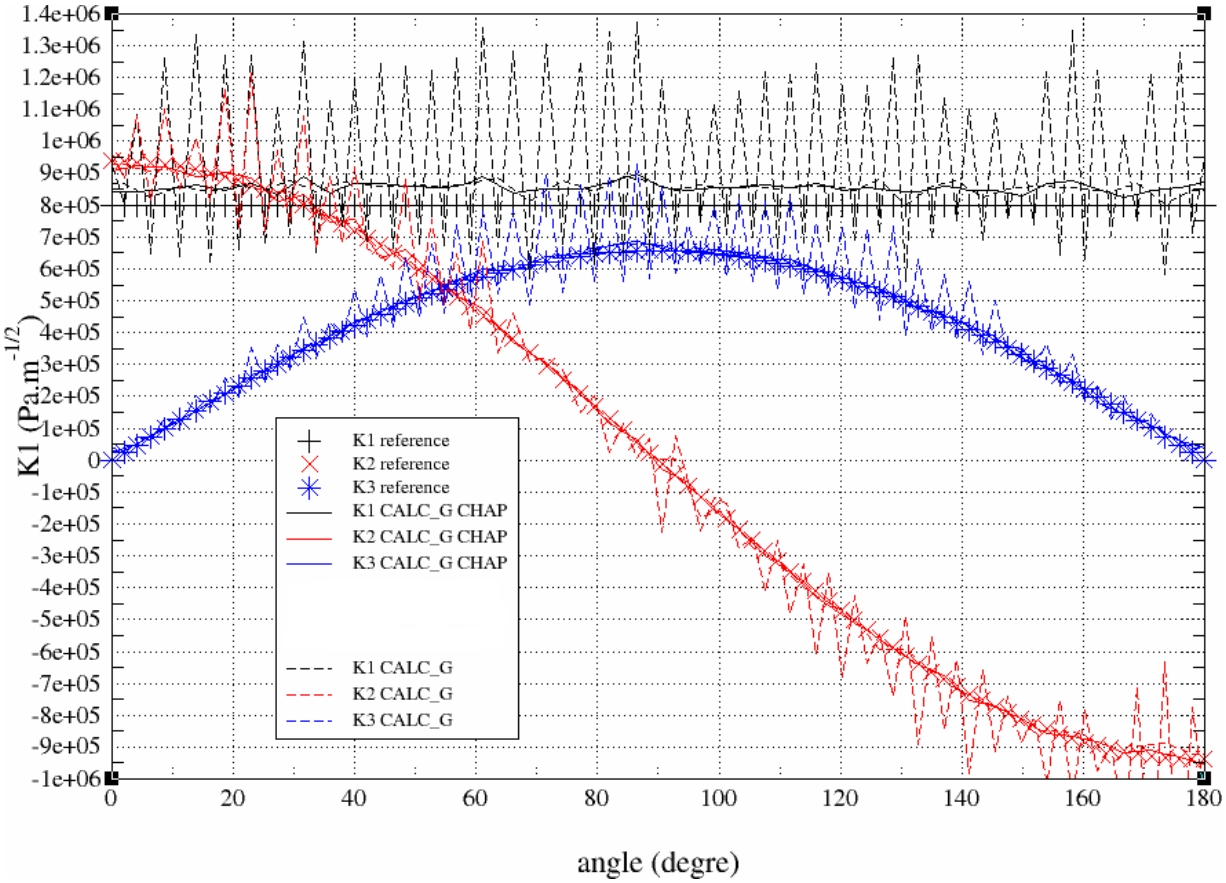


Figure 6.4-5: Comparaison des valeurs de K1, K2 et K3 pour le lissage de LINEAIRE avec les fonctions « chapeau »

7 Synthèse des résultats

Ce cas-test valide la calcul des facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure 3D en mode mixte. On constate pour la commande CALC_G (option K) des erreurs importantes aux points extrémités si le K n'est pas constant le long du fond de fissure.

Ce problème n'apparaît pas pour la commande POST_K1_K2_K3.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)