SSLV130 - Cylindre creux en incompressible

Résumé :

Ce test permet de valider les éléments quasi-incompressibles en statique pour un problème tridimensionnel, axisymétrique ou bidimensionnel (déformations planes). On considère un cylindre creux soumis à une pression interne. Le matériau a un coefficient de POISSON égal à 0.4999 et on utilise les éléments quasi-incompressibles (modélisation INCO_UPG et INCO_UP). Dans tous les cas de modélisation, on réalise le test en imposant ou non la condition d'incompressibilité parfaite si nécessaire (DDL_IMPO et GONF=0)

Cinq modélisations sont effectuées pour ce problème.
La modélisation INCO_UPG est testée dans les configurations suivantes :
- modélisation A : modélisation 3D_INCO_UPG avec des HEXA20 ;
- modélisation B : modélisation 3D_ INCO_UPG avec des TETRA10 ;
- modélisation E : modélisation 3D_ INCO_UPG avec des PENTA15 ;
- modélisation C : modélisation D_PLAN_INCO_UPG avec un maillage mixte TRIA6/QUAD8 ;
- modélisation D : modélisation AXIS_INCO_UPG avec un maillage mixte TRIA6/QUAD8.

La modélisation INCO_UP est testée dans les configurations suivantes :
- modélisation A : modélisation 3D_INCO_UP avec des HEXA20 ;
- modélisation B : modélisation 3D_ INCO_UP avec des TETRA10 et avec des TETRA4 ;
- modélisation C : modélisation D_PLAN_INCO_UP avec un maillage mixte TRIA6/QUAD8 et avec des TRIA3 ;
- modélisation D : modélisation AXIS_INCO_UP avec un maillage mixte TRIA6/QUAD8 et avec des TRIA3.

La modélisation INCO_UPO est testée dans les configurations suivantes :
- modélisation A : modélisation 3D_INCO_UPO avec des HEXA8 ;
- modélisation B : modélisation 3D_ INCO_UPO avec des TETRA4 ;
- modélisation E : modélisation 3D_ INCO_UPO avec des PENTA6 ;
- modélisation C : modélisation D_PLAN_INCO_UPO avec un maillage mixte TRIA6/QUAD8 ;
- modélisation D : modélisation AXIS_INCO_UPO avec un maillage mixte TRIA6/QUAD8.

Ce test est similaire au test SSLV100.

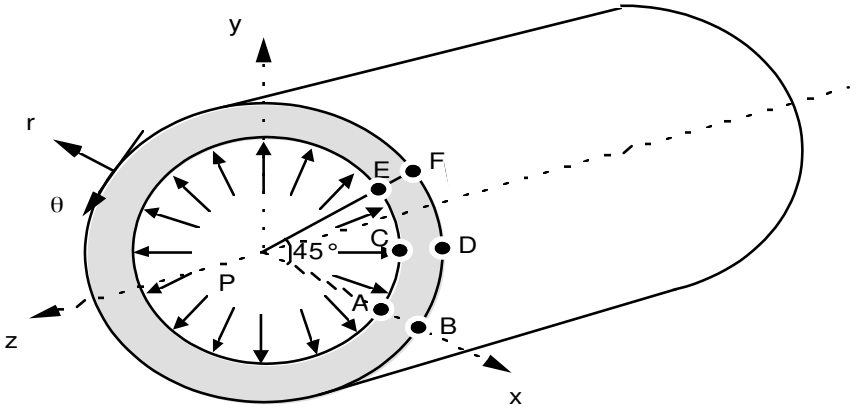
Les résultats numériques sont satisfaisants pour toutes les modélisations. Le fait d'imposer explicitement la condition d'incompressibilité n'influence que très peu les résultats. Les éléments linéaires pour la modélisation à 2 champs sont logiquement un peu moins précis que les éléments quadratiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Rayon interne a = 0.1 m
Rayon externe b = 0.2 m

Rayon interne : $a=0,1\,mm$
Rayon exerne : $b=0,2\,mm$

Coordonnées des points (mm)

	A	B	E	F	C	D
x	0.1	0.2	$0.1\times\cos(45)$	$0.2\times\cos(45)$	$0.1\times\cos(22.5)$	$0.2\times\cos(22.5)$
y	0	0	$0.1\times\sin(45)$	$0.1\times\sin(45)$	$0.1\times\sin(22.5)$	$0.1\times\sin(22.5)$
z	0	0	0	0	0	0

1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés élastiques du matériau considéré sont les suivantes :
Module d'Young: $E=2.10^5\,MPa$
Coefficient de Poisson: $\nu=0.4999$

1.3 Conditions aux limites et chargements

La pression interne imposée est égale à $P=60\,MPa$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

La solution générale en déplacement est la suivante :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{Pa^2}{E(b^2-a^2)}(1+\nu)\left[(1-2\nu)r+\dfrac{b^2}{r}\right] \\ u_\theta = u_z = 0 \end{cases}$$

En déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{Pa^2}{E(b^2-a^2)}(1+\nu)\left[(1-2\nu)-\dfrac{b^2}{r}\right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{Pa^2}{E(b^2-a^2)}(1+\nu)\left[(1-2\nu)+\dfrac{b^2}{r}\right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases}$$

En contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = P\dfrac{a^2}{b^2-a^2}\left[1-\dfrac{b^2}{r}\right] \\ \sigma_{\theta\theta} = P\dfrac{a^2}{b^2-a^2}\left[1+\dfrac{b^2}{r}\right] \\ \sigma_{zz} = 2\nu P\dfrac{a^2}{b^2-a^2} \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

On obtient pour un cylindre parfaitement incompressible $(\nu = 0.5)$:

	$r=0,1$	$r=0,2$
u_r	$6.10^{-5}\,mm$	$3.10^{-5}\,mm$
ε_{rr}	-6.10^{-4}	$-1,5\,10^{-4}$
$\varepsilon_{\theta\theta}$	-6.10^{-4}	$1,5\,10^{-4}$
σ_{rr}	$-60\,MPa$	$0\,MPa$
$\sigma_{\theta\theta}$	$100\,MPa$	$40\,MPa$
σ_{zz}	$20\,MPa$	$20\,MPa$

Le passage dans le système cartésien se fait à l'aide des relations suivantes :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr}\cos(\theta)^2 + \sigma_{\theta\theta}\sin(\theta)^2 - 2\sigma_{r\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr}\sin(\theta)^2 + \sigma_{\theta\theta}\cos(\theta)^2 + 2\sigma_{r\theta}\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\sigma_{xy} = \sigma_{rr}\sin(\theta)\cos(\theta) - \sigma_{\theta\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) - 2\sigma_{r\theta}(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On compare aux valeurs de référence :

- les déplacements (u, v) aux points A et F,
- les déformations (ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy}) et les contraintes (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}) aux points A et F,
- les déformations équivalentes et les contraintes équivalentes au point A.

Enfin, pour tester le passage des grandeurs des points de Gauss aux nœuds pour les nœuds milieux, on teste également les déformations et les contraintes non nulles en un nœud milieu de la structure.

2.3 Références bibliographiques

1) Y.C. FUNG : Foundations of solid mechanics. Prenctice-hall, inc. Englewood Cliffs. NJ. 1965, p. 243-245

2) [V3.04.100] Cylindre creux en déformations planes

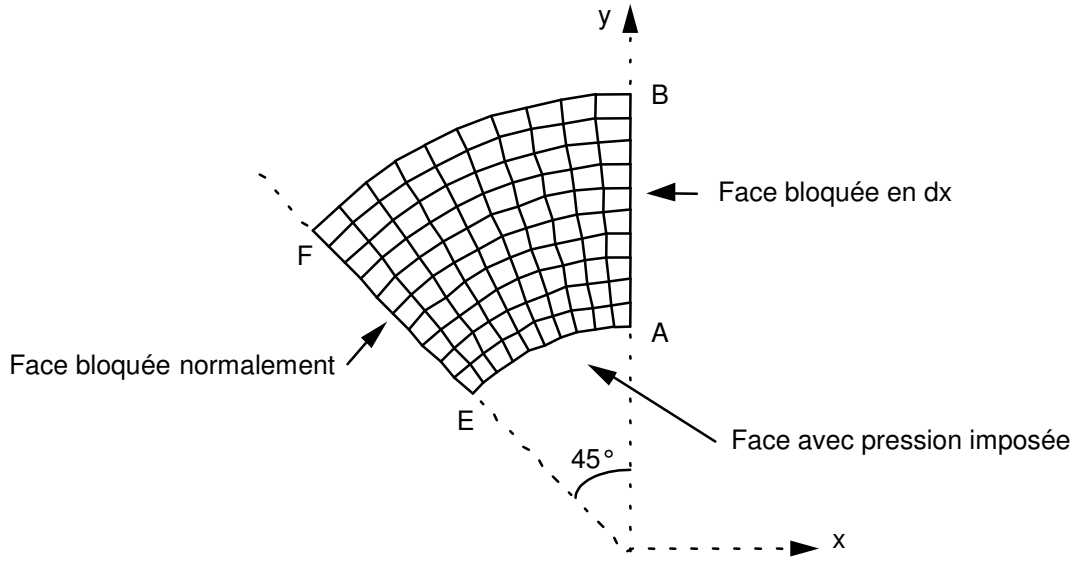
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillages :

1. de type HEXA20 pour les modélisations 3D_INCO_UPG et 3D_INCO_UP
2. de type HEXA8 pour la modélisation 3D_INCO_UPO



Suivant l'axe z :

- épaisseur totale $e=0.01\,mm$
- 2 couches d'éléments

Pour les besoins de dépouillement en un nœud milieu, on définit le nœud $NOEUMI=A+(0.0.e/4)$ où les déformations et les contraintes sont les mêmes qu'en A.

Conditions limites :

```
DDL_IMPO= GROUP_NO =’FACSUP’, DZ = 0
   GROUP_NO =’FACINF’, DZ = 0      faces AEFD ( z=0 et z=0.01 )
   GROUP_NO =’FACEAB’, DX = 0      face AB
FACE_IMPO =GROUP_MA =’FACEEF’, DNOR = 0      face EF
PRES_REP  =GROUP_MA =’FACEAE’, PRES = 60     face AE
```

3.2 Caractéristiques des maillages

Maillage 1 HEXA20 :
Nombre de nœuds : 1501 nœuds
Nombre de mailles : 240 HEXA20

Maillage 2 HEXA8 :
Nombre de nœuds : 429 nœuds
Nombre de mailles : 240 HEXA 8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point A :

- première colonne 3D_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne 3D_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne 3D_INCO_UP
- quatrième colonne 3D_INCO_UPO

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
v	'ANALYTIQUE'	6. 10 -5	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	100.	0,10%	0,10%	0,10%	0,15%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	–60.	0,50%	0,50%	0,50%	9,0%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	5,0%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	0,50%	0,50%	0,50%	50,00%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	6. 10 -4	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	–6. 10 -4	0,50%	0,50%	0,50%	7,0%
ε_{zz}	'ANALYTIQUE'	0.	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	$3,10^{-5}$
ε_{eq} -I NVA_2	'ANALYTIQUE'	6.92 10 -4	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	$5,10^{-2}$
ε_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	–6. 10 -4	0,50%	0,50%	0,50%	7,0%
ε_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	0.	0,50%	0,50%	0,50%	10 -5
ε_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	6. 10 -4	10 -5	10 -5	10 -5	5,10 -2
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	0,50%	0,50%	0,50%	5,00%
σ_{eq} - TRESCA	'ANALYTIQUE'	160.	0,50%	0,50%	0,50%	5,00%
σ_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	-60.	0,50%	0,50%	0,50%	10,0%
σ_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	5,00%
σ_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%	0,50%	0,50%	1,50%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	0,50%	0,50%	0,50%	5,0%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Résultats au point F :

- première colonne 3D_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne 3D_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne 3D_INCO_UP
- quatrième colonne 3D_INCO_UPO

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
u	'ANALYTIQUE'	–2.12 10^{-5}	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
v	'ANALYTIQUE'	2.12 10^{-5}	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	3,0%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	6,0%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	1,0%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	2,0%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	1.5 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	2,0%

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer GONF = 0) - valeur au nœud $NOEUMI$:

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	–60.	0,50%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	–6. 10^{-4}	0,50%

3.4 Remarques

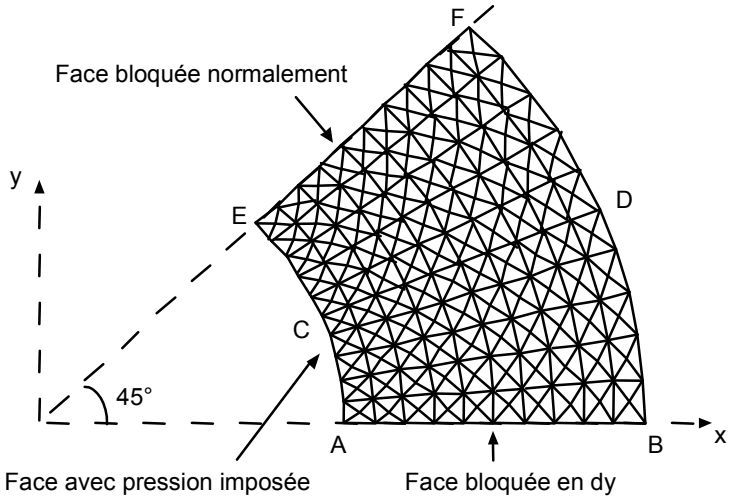
Hormis pour 3D_INCO_UPO, on obtient de très bons résultats quelle soit la formulation retenue puisque pour toutes les grandeurs examinées, la différence entre la solution obtenue avec le code et la solution analytique est inférieure à $0.2\,\%$. On voit que l'écart entre les solutions obtenues en imposant ou non la condition $tr(\boldsymbol{\varepsilon})=0$ est insignifiant.
Les résultats obtenus avec 3D_INCO_UPO sont moins précis. Cela s'explique par le fait que les éléments utilisés sont linéaires. Pour retrouver un résultat plus précis, il faudrait raffiner le maillage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 3D incompressibles de type TETRA10 uniquement



AB est sur l'axe OX (contrairement à la modélisation A).

Pour les besoins de dépouillement, on définit le nœud $NOEUMI = A + (0.0.e/4)$ où les déformations et les contraintes sont les mêmes qu'en A .

Conditions limites :

```
DDL_IMPO= GROUP_NO =’FACSUP’,DZ = 0
   GROUP_NO =’FACINF’, D Z = 0    faces AEFD ( z=0 et z=0.01 )
   GROUP_NO =’FACEAB’,DY = 0      face AB
FACE_IMPO =GROUP_MA =’FACEEF’,DNOR = 0      face EF
PRES_REP  =GROUP_MA =’FACEAE’,PRES = 60     face AE
```

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 13907
Nombre de mailles : 8519 TETRA10

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Résultat au point A :

- première colonne 3D_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne 3D_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne 3D_INCO_UP avec éléments quadratiques
- quatrième colonne 3D_INCO_UP avec éléments linéaires
- cinquième colonne 3D_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
u	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-5}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
v	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	–60.	1,00%	1,00%	1,00%	4,00%	3,00%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	100.	1,00%	1,00%	1,00%	1,50%	1,00%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	2,50%	2,50%	2,50%	10,00%	3,00%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	-6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,50%	2,0%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	1,00%
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	3. 10^{-5}	3. 10^{-5}	3. 10^{-5}	3. 10^{-5}	3. 10^{-5}
ε_{eq} -I NVA_2	'ANALYTIQUE'	6.92 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	1,50%
ε_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	–6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,50%	2,0%
ε_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	1,0%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,5%
σ_{eq} - TRESCA	'ANALYTIQUE'	160.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,5%
σ_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	-60.	3,00%	3,00%	3,00%	4,00%	3,00%
σ_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	20.	3,00%	3,00%	3,00%	10,00%	3,00%
σ_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	100.	1,00%	1,00%	1,00%	1,50%	1,00%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,5%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Résultat au point F :

- première colonne 3D_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne 3D_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne 3D_INCO_UP avec éléments quadratiques
- quatrième colonne 3D_INCO_UP avec éléments linéaires
- cinquième colonne 3D_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
u	'ANALYTIQUE'	2.12 10^{-5}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
v	'ANALYTIQUE'	2.12 10^{-5}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	20.	1,00%	1,00%	1,00%	1,50%	1,50%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	1,00%	1,00%	1,00%	1,50%	1,00%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	-20.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	-1.5 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	1,00%

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer GONF = 0) - valeur au nœud $NOEUMI$:

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	-60.	1,70%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	100.	0,60%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	3,50%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	-6. 10^{-4}	0,50%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%

4.4 Remarques

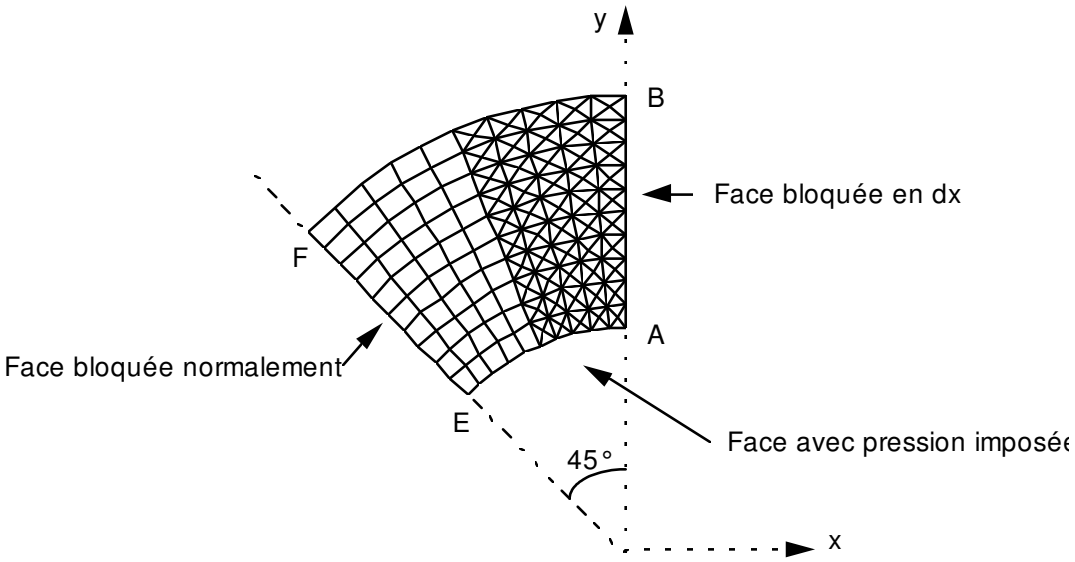
Les résultats obtenus ici sont un peu moins bons que dans le cas de la modélisation A, mais la discrétisation est plus grossière puisqu'il y a environ 2 fois moins de nœuds dans ce cas-test. Les résultats sont tout de même satisfaisants puisque les écarts sont inférieurs à $0.2\,\%$ pour les déplacements, inférieurs à $0.5\,\%$ pour les déformations et inférieurs à $1\,\%$ pour les contraintes. On constate à nouveau qu'il n'y a pas d'amélioration significative du résultat lorsqu'on impose explicitement $tr\,\varepsilon=0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 2D incompressibles de type QUAD8 et TRIA6.



Conditions limites :

```
DDL_IMPO= GROUP_NO ='GRNM11',DX = 0          côté AB
FACE_IMPO =GROUP_MA ='GRMA12',DNOR = 0       coté EF
PRES_REP  =GROUP_MA ='GRMA13',PRES =    60   face AE
```

Nom des nœuds :

$A=N2$, $B=N361$, $C=N121$, $D=N584$, $E=N155$, $F=N503$

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 591
Nombre de mailles : 200 TRIA6, 50 QUAD8.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point A :

- première colonne D_PLAN_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne D_PLAN_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne D_PLAN_INCO_UP avec maillage quadratique
- quatrième colonne D_PLAN_INCO_UP avec maillage linéaire
- cinquième colonne D_PLAN_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
u	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
v	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-5}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%	0,50%	0,50%	0,60%	0,50%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	–60.	0,50%	0,50%	0,50%	2,50%	2,10%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	5,00%	1,60%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	0,3	0,3	0,3	1,5	0,9
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	–6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,50%	1,50%
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{eq} -I NVA_2	'ANALYTIQUE'	6.92 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	1,00%
ε_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	–6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,50%	1,50%
ε_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
σ_{eq} - TRESCA	'ANALYTIQUE'	160.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
σ_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	-60.	1,00%	1,00%	1,00%	2,50%	2,10%
σ_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	20.	1,00%	1,00%	1,00%	5,00%	1,60%
σ_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	100.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Résultats au point F :

- première colonne D_PLAN_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne D_PLAN_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne D_PLAN_INCO_UP avec maillage quadratique
- quatrième colonne D_PLAN_INCO_UP avec maillage linéaire
- cinquième colonne D_PLAN_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
u	'ANALYTIQUE'	–2.12 10^{-5}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
v	'ANALYTIQUE'	2.12 10^{-5}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	1,00%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	2,00%	1,50%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	1.5 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%

5.4 Remarques

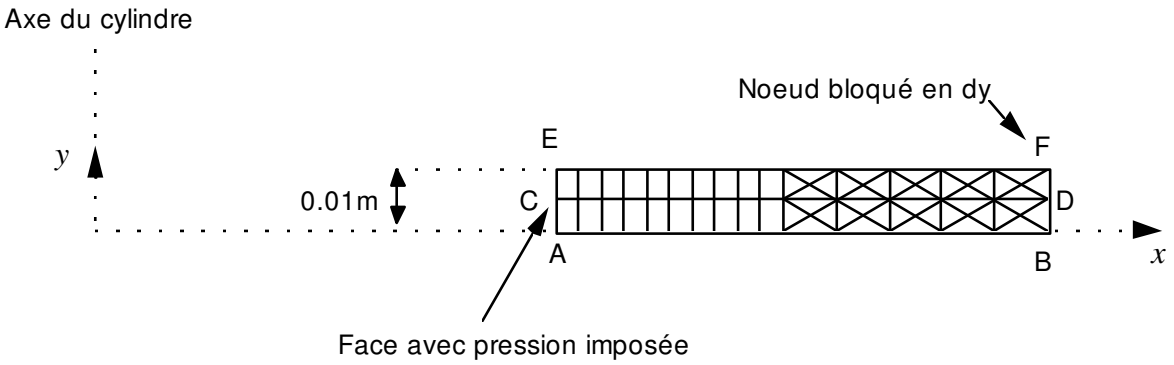
Comme pour la modélisation 3D, les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Éléments AXI incompressibles (TRIA6 + QUAD8)



Pour les besoins de dépouillement, on définit les nœuds :

- $NOEUMIA = A + (0.0.01/4)$ où les déformations et contraintes sont les même qu'en A
- $NOEUMIB = B + (0.0.01/4)$ où les déformations et contraintes sont les même qu'en B

Conditions limites :

```
DDL_IMPO= GROUP_NO =’FACSUP’,DY = 0        y=0.1
   GROUP_NO =’FACINF’,DY = 0        y=0
PRES_REP  =GROUP_MA =’FACEAE’,PRES = 60 face AE
```

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 175.
Nombre de mailles et types : 20 QUAD8, 40 TRIA6.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point A :

- première colonne AXIS_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne AXIS_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne AXIS_INCO_UP avec maillage quadratique
- quatrième colonne AXIS_INCO_UP avec maillage linéaire
- cinquième colonne AXIS_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
u	'ANALYTIQUE'	6. 10 -5	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%
v	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	–60.	0,50%	0,50%	0,50%	0,70%	1,50%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20/03/12	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	9,00%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	6,00%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	0,01	10^{-5}	0,08	0,2
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	-6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	0,60%	0,60%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{eq} -I NVA_2	'ANALYTIQUE'	6.92 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	3,0%
ε_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	–6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,00%	6,0%
ε_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,60%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	3,00%
σ_{eq} - TRESCA	'ANALYTIQUE'	160.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	3,00%
σ_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	-60.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	2,00%
σ_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	20.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	23,%
σ_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	100.	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	5,5%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	1,00%	1,00%	1,00%	1,00%	3,00%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Résultats au point F :

- première colonne AXIS_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne AXIS_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne AXIS_INCO_UP avec maillage quadratique
- quatrième colonne AXIS_INCO_UP avec maillage linéaire
- cinquième colonne AXIS_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance				
			1	2	3	4	5
u	'ANALYTIQUE'	3. 10^{-5}	0,10%	0,10%	0,10%	0,10%	2,0%
v	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	0.	0.03	0.03	0.03	0.10	0.70
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	1,1%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	40.	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	0,60%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	5. 10^{-3}	5. 10^{-}	5. 10^{-3}	0,01	0,2
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	-1.5 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%	1, 0%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer $GONF=0$)

NOEUMIA

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	-60.	0,50%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	-6. $10-4$	0,50%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	6. $10-4$	0,50%

NOEUMIB

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	0.	0,50%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	40.	0,50%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	-1.5 $10-4$	0,50%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	$1.5\ 10^{-4}$	0,50%

6.4 Remarques

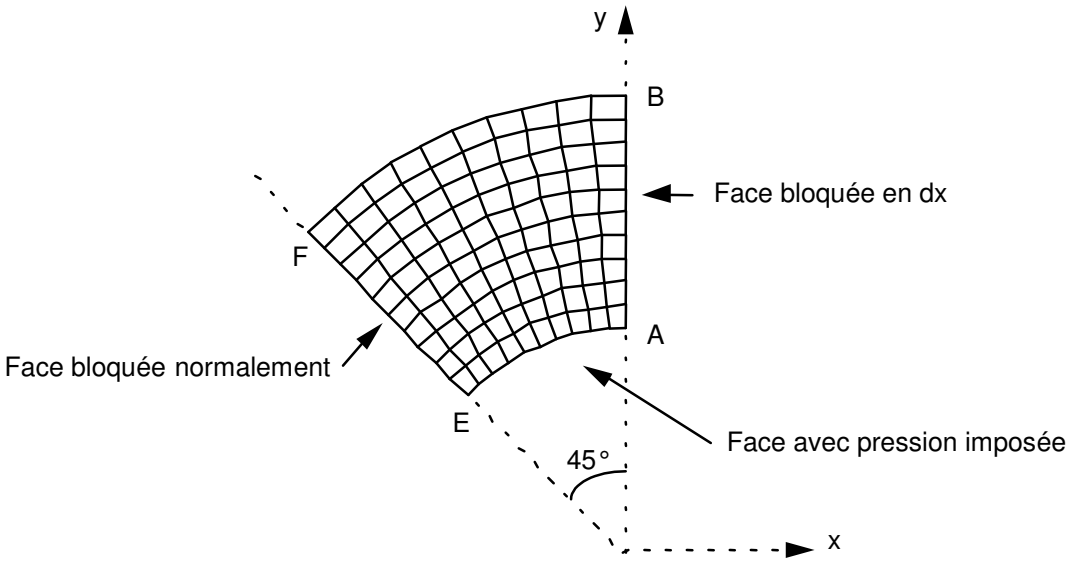
La précision obtenue est très bonne.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Modélisation E

7.1 Caractéristiques de la modélisation

Maillage avec des éléments 3D incompressibles de type PENTA15 uniquement



Suivant l'axe z :

- épaisseur totale $e=0.01\,mm$
- 2 couches d'éléments

Pour les besoins de dépouillement en un nœud milieu, on définit le nœud $NOEUMI=A+(0.0.e/4)$ où les déformations et les contraintes sont les mêmes qu'en A.

Conditions limites :

```
DDL_IMPO= GROUP_NO ='FACSUP',DZ = 0
   GROUP_NO ='FACINF',DZ = 0      faces AEFD ( z=0 et z=0.01 )
   GROUP_NO ='FACEAB',DX = 0      face AB
FACE_IMPO =GROUP_MA ='FACEEF',DNOR = 0      face EF
PRES_REP  =GROUP_MA ='FACEAE',PRES =    60. face AE
```

7.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1501 nœuds
Nombre de mailles : 480 PENTA15

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.3 Grandeurs testées et résultats

Résultats au point A :

- première colonne 3D_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne 3D_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne 3D_INCO_UP
- quatrième colonne 3D_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
u	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
v	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-5}	0,10%	0,10%	0,10%	0,50%
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%	0,50%	0,50%	6,0%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	–60.	0,50%	0,50%	0,50%	15,0%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	5,00%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	0,6	0,6	0,6	06/03/12
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,0%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	–6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	1,0%
ε_{zz}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	$5,10^{-5}$
ε_{eq} -I NVA_2	'ANALYTIQUE'	6.92 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	8,0%
ε_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	–6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	8,0%
ε_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	0.	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
ε_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	6. 10^{-4}	0,50%	0,50%	0,50%	8,0%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	0,50%	0,50%	0,50%	10,%
σ_{eq} - TRESCA	'ANALYTIQUE'	160.	0,50%	0,50%	0,50%	10,%
σ_{eq} - PRIN_1	'ANALYTIQUE'	-60.	0,50%	0,50%	0,50%	12,%
σ_{eq} - PRIN_2	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	5,00%
σ_{eq} - PRIN_3	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%	0,50%	0,50%	6,0%
σ_{eq} -VMIS	'ANALYTIQUE'	138.56	0,50%	0,50%	0,50%	10,%

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Résultats au point F :

- première colonne 3D_INCO_UPG sans imposer $GONF=0$
- deuxième colonne 3D_INCO_UPG en imposant $GONF=0$
- troisième colonne 3D_INCO_UP
- quatrième colonne 3D_INCO_UPO avec éléments linéaires

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance			
			1	2	3	4
u	'ANALYTIQUE'	–2.12 10 -5	0,10%	0,10%	0,10%	0,30%
v	'ANALYTIQUE'	2.12 10 -5	0,10%	0,10%	0,10%	0,30%
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	50,00%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	6,0%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	0,50%
σ_{xy}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%	0,50%	0,50%	1,50%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	0.	10 -5	10 -5	10 -5	10 -5
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	0.	10 -5	10 -5	10 -5	10 -5
ε_{xy}	'ANALYTIQUE'	1.5 10 -4	0,50%	0,50%	0,50%	1,50%

Vérification du passage aux nœuds pour les nœuds milieux (uniquement pour le résultat obtenu sans imposer $GONF=0$) - valeur au nœud $NOEUMI$:

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Tolérance (%)
σ_{xx}	'ANALYTIQUE'	100.	0,50%
σ_{yy}	'ANALYTIQUE'	–60.	0,50%
σ_{zz}	'ANALYTIQUE'	20.	0,50%
ε_{xx}	'ANALYTIQUE'	6. 10 -4	0,50%
ε_{yy}	'ANALYTIQUE'	–6. 10 -4	0,50%

7.4 Remarques

Hormis pour la modélisation 3D_INCO_UPO, on obtient de très bons résultats quelque soit la formulation retenue puisque pour toutes les grandeurs examinées, la différence entre la solution obtenue avec le code et la solution analytique est inférieure à $0.5\,\%$. On voit que l'écart entre les solutions obtenues en imposant ou non la condition $tr(\boldsymbol{\varepsilon})=0$ est insignifiant.
Les résultats obtenus avec 3D_INCO_UPO sont moins précis. Cela s'explique par le fait que les éléments utilisés sont linéaires. Pour retrouver un résultat plus précis, il faudrait raffiner le maillage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Synthèse des résultats

Avec un coefficient de Poisson ν très proche de 0.5, on retrouve les résultats de la solution analytique incompressible avec une différence faible. On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'imposer explicitement la condition d'incompressibilité $tr\varepsilon=0$ pour obtenir de bons résultats puisque les résultats sont quasi-identiques que l'on active ou non, la condition $GONF=0$ avec DDL_IMPO.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)