SSLP316 - Estimateur d'erreur sur une plaque fissurée avec X-FEM

Résumé :

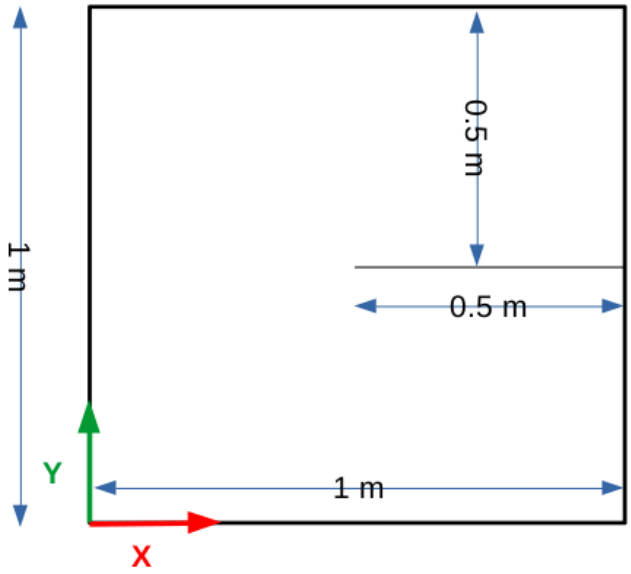
L' objectif de ce test est de valider l'estimateur d'erreur en norme de l' énergie basé sur les résidus d' équilibre dans le cadre X-FEM. Les conditions de type Neumann et Dirichlet sont traitées.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On considère un carré de côté $1\,m$ traversé par une fissure horizontale :



La fissure est définie par les « level set » normale $l_n(Y)=Y-0.5$ et tangente $l_t(X)=-X+0.5$.

1.2 Propriétés du matériau

Le matériau est élastique isotrope dont les propriétés sont :
- $E=100\,000\,MPa$
- $\nu=0.0$

1.3 Conditions aux limites et chargements

1.3.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Pour la modélisation A, on impose des conditions aux limites de Dirichlet sur tout le contour du carré correspondant au mode d'ouverture asymptotique en mode I [1]. On a alors :

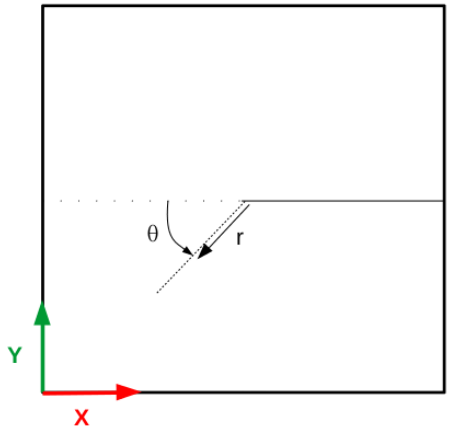
$$u_X=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}K_I\cos\frac{\theta}{2}(\kappa-\cos\theta) \text{ et } u_Y=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}K_I\sin\frac{\theta}{2}(\kappa-\cos\theta),$$

avec :

$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$ et $\kappa=3-4\nu$ en contraintes planes,

r et θ sont les coordonnées polaires comme définies sur la figure suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

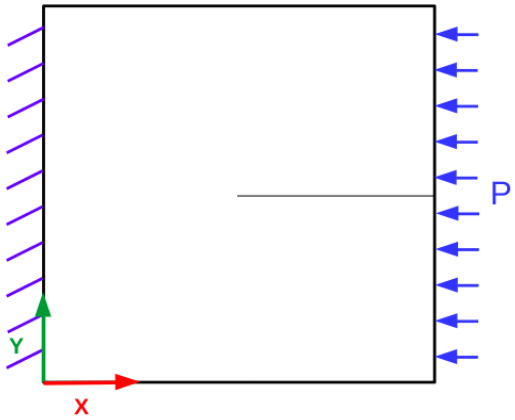


Avec $\nu=0.0$ et $K_I=1$, on impose finalement :

$$u_X=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(3-\cos\theta) \text{ et } u_Y=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}K_I\sin\frac{\theta}{2}(3-\cos\theta) .$$

1.3.2 Conditions aux limites de Neumann

Pour la modélisation B, on impose des conditions aux limites de Neumann. Une compression uniforme $P=-20MPa$ est imposée sur le bord droit tandis que le bord gauche est encastré.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul

2.1.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Le champ de contrainte analytique correspondant au problème de la plaque fissurée infinie soumise au mode I s'écrit [1] :

$$\sigma_{XX}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}K_I\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \quad , \quad \sigma_{YY}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}K_I\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \quad \text{et}$$
$$\sigma_{XY}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}K_I\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \ .$$

Avec $K_I=1.0$, on a :

$$\sigma_{XX}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \quad , \quad \sigma_{YY}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \quad \text{et}$$
$$\sigma_{XY}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \ .$$

2.1.2 Conditions aux limites de Neumann

Sachant que $\nu=0.0$ et que la pression imposée est constante , le champ de contrainte correspond simplement à la pression imposée :

$\sigma_{XX}=-P=20\,MPa$, $\sigma_{YY}=0\,MPa$ et $\sigma_{XY}=0\,MPa$.

2.2 Grandeurs et résultats de référence

On compare le champ de contraintes SIGM_ELNO calculé aux nœuds par l'opérateur CALC_ERREUR et on vérifie par des non régressions qu'ils correspondent bien au champ SIEF_ELNO calculé par l'opérateur CALC_CHAMP.
On teste également le champ de contraintes calculé aux nœuds des sous-éléments X-FEM.
Enfin on teste le champ d'estimation de l'erreur en résidu [2] .

2.2.1 Conditions aux limites de Dirichlet

Sachant que le raffinement du maillage sera insuffisant pour capter la variation de contrainte asymptotique en fond de fissure, le calcul de l'indicateur d'erreur qui se base sur ces variations numériques n'est pas en mesure de faire une bonne estimation de l'erreur. On décide donc d'appliquer des tests de non régression.

2.2.2 Conditions aux limites de Neumann

Les contraintes sont constantes dans la plaque. La solution étant P0, l'erreur numérique doit être nulle. L'erreur estimée doit également être nulle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Références bibliographiques

[1] G. IRWIN, "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", Journal of Applied Mechanics 24, 361-364, 1957.

[2] Document R4.10.02, Estimateur d'erreur en résidu, manuel de Référence de *Code_Aster*.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

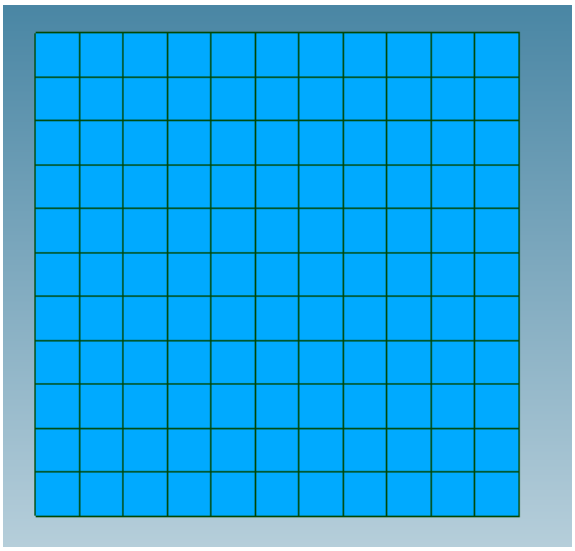
3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation C_PLAN.

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage contient 121 éléments de type QUAD4.



3.3 Grandeurs testées et résultats

On teste le s contraintes maximales et minimales sur la plaque pour le champ SIEF_ELNO :

Identification	Type de référence
MAX - SIXX	'NON_REGRESSION'
MIN - SIXX	'NON_REGRESSION'
MAX - SIXY	'NON_REGRESSION'
MIN - SIXY	'NON_REGRESSION'

On teste les contraintes maximales et minimales sur la plaque pour le champ SIGM_ELNO calculé en souterrain par l'opérateur CALC_ERREUR :

Identification	Type de référence
MAX - SIXX	'NON_REGRESSION'
MIN - SIXX	'NON_REGRESSION'
MAX - SIXY	'NON_REGRESSION'
MIN - SIXY	'NON_REGRESSION'

On teste les contraintes minimums et maximums sur la plaque du champ SISE_ELNO (nœud des sous-éléments X-FEM) calculé en souterrain par l'opérateur CALC_ERREUR :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

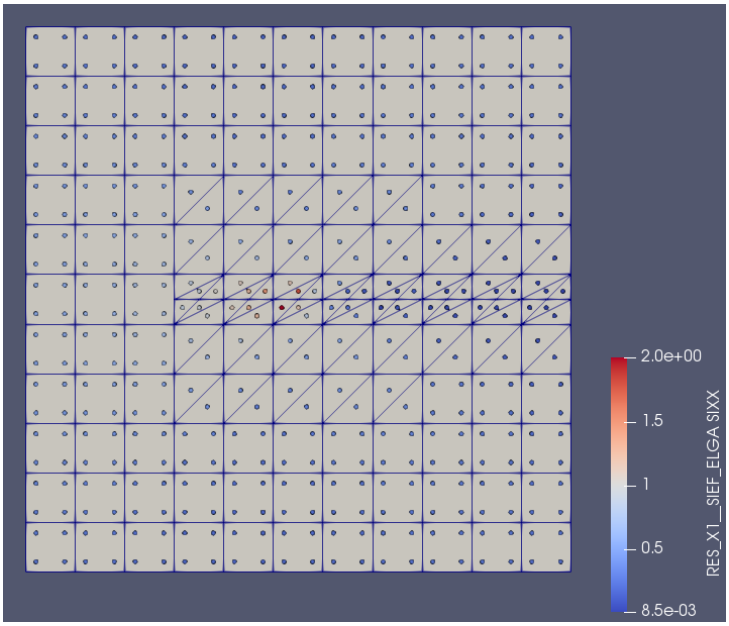
Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
$MAX - X4$	'NON_REGRESSION'	0.812078942873 MPa	1E-04%
$MIN - X4$	'NON_REGRESSION'	-0.510118026455 MPa	1E-04%

Enfin on teste le champ pour l'estimateur d'erreur ERME_ELEM :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
$MAX - ERREST$	'NON_REGRESSION'	0.000698457464821	1E-04%
$MIN - ERREST$	'NON_REGRESSION'	3.49704197058E-06	1E-04%

3.4 Remarques

Les contraintes obtenues calculées aux nœuds du maillage par CALC_ERREUR et par CALC_CHAMP sont bien les mêmes.
Le champ de contraintes est résolu aux points de Gauss :



Le lissage fait par le calcul des contraintes aux nœuds introduit des erreurs qui conduisent l'opérateur CALC_ERREUR à sous-estimer l'erreur du champ asymptotique en fond de fissure.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation D_PLAN.

4.2 Caractéristiques du maillage

On utilise le même maillage que pour la modélisation A.

4.3 Grandeurs testées et résultats

On teste le s contraintes minimums et maximums sur la plaque pour le champ SIEF_ELNO calculé par l'opérateur CALC_CHAMP :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
MAX - $SIXX$	'ANALYTIQUE'	20.0 MPa	5E-3%
MIN - $SIXX$	'ANALYTIQUE'	20.0 MPa	5E-3%
MAX - $SIXY$	'ANALYTIQUE'	0.0 MPa	0.05
MIN - $SIXY$	'ANALYTIQUE'	0.0 MPa	0.05

On teste les contraintes minimums et maximums sur la plaque pour le champ SIGM_ELNO calculé en souterrain par l'opérateur CALC_ERREUR :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
MAX - $SIXX$	'ANALYTIQUE'	20.0 MPa	5E-3%
MIN - $SIXX$	'ANALYTIQUE'	20.0 MPa	5E-3%
MAX - $SIXY$	'ANALYTIQUE'	0.0 MPa	0.05
MIN - $SIXY$	'ANALYTIQUE'	0.0 MPa	0.05

On teste les contraintes minimums et maximums sur la plaque du champ SISE_ELNO (nœud des sous-éléments X-FEM) calculé en souterrain par l'opérateur CALC_ERREUR :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
MAX - $X4$	'ANALYTIQUE'	0.0 MPa	0.05
MIN - $X4$	'ANALYTIQUE'	0.0 MPa	0.05

Enfin on teste le champ pour l'estimateur d'erreur ERME_ELEM :

Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
MAX - $ERREST$	'ANALYTIQUE'	0.0	1E-04
MIN - $ERREST$	'ANALYTIQUE'	0.0	1E-04

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.4 Remarques

Les contraintes obtenues calculées aux nœuds du maillage par CALC_ERREUR et par CALC_CHAMP sont bien les mêmes.
Le calcul de l'erreur tient bien compte des efforts de pression appliqués sur le bord droit. On obtient une estimation de l'erreur nulle (à l'erreur numérique près).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les modélisations A et B permettent bien de couvrir les opérateurs de calcul de l'estimateur d'erreur en résidu mécanique dans le cadre X-FEM.
Il faut cependant faire attention quant à l'interprétation de ces estimations en fond de fissure. La méthode de ré-interpolation aux nœuds et aux nœuds des sous-éléments d'intégration ne semble pas convaincante pour bien estimer l'erreur des champs asymptotiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)