SSLL111 - Réponse statique d'une poutre béton armé (section en T) à comportement linéaire

Résumé :

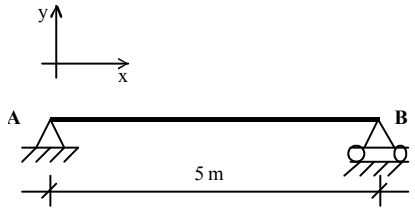
Le problème consiste à analyser la réponse d'une poutre en béton armé par l'intermédiaire d'une modélisation poutre multifibre. Ce test correspond à une analyse statique d'une poutre ayant un comportement linéaire.
Trois cas de charge successifs sont testés : une force ponctuelle, le poids propre et une élévation de température. Pour le premier cas de charge, deux maillages de la section, l'un grossier et l'autre plus fin sont testés.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

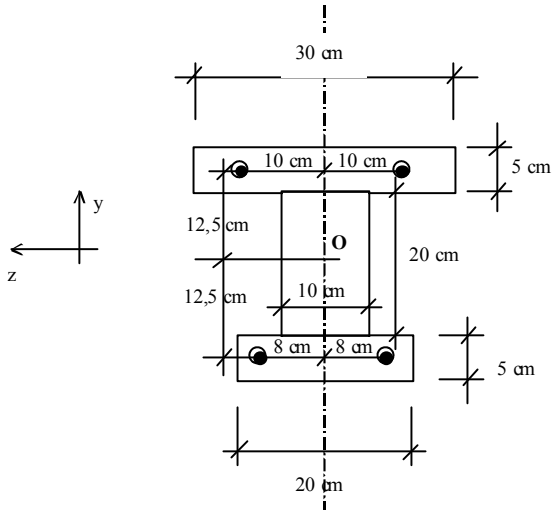
1 Problème de référence

1.1 Géométrie

Poutre en flexion trois points, définie par :



Avec une section en double T :



Sur ce schéma, O est situé à mi-hauteur de la section.

La section totale des aciers supérieurs est $3.10^{-4} m^2$ et celle des aciers inférieurs est $4.10^{-4} m^2$.

1.2 Propriétés de matériaux

- béton : $E=2.10^{10} Pa$; $\nu=0.2$; $\rho=2400 kg.m^{-3}$; $\alpha=10-5K^{-1}$
- acier : $E=2,1.10^{11} Pa$; $\nu=0.33$; $\rho=7800 kg.m^{-3}$; $\alpha=10-5K^{-1}$

1.3 Conditions aux limites

Appui simple en B : $dy=0$
Appui "double" en A : $dx=dy=dz=0$ de même que $rx=ry=0$.

1.4 Chargements

Trois cas de charge sont testés successivement :

- Chargement 1 : effort concentré au milieux de la poutre, $F=10000 N$
- Chargement 2 : poids propre de la poutre, $g=9,8 m.s^{-2}$
- Chargement 3 : échauffement homogène de la poutre $\Delta T=100 K$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

Les calculs de référence sont effectués à partir d'un simple calcul élastique en RdM.

2.1 Centre élastique

En flexion simple, pour un comportement élastique, l'axe neutre passe par le centre élastique (barycentre des sections pondéré par les modules des matériaux) :

$$C \text{ tel que } \int_S E\,\overrightarrow{CM}\,dS = \vec{0}$$

On détermine d'abord la position des centres de gravité du béton seul G_b et de l'acier seul G_a par rapport au point O.

$$y_{G_b} = \frac{0.125\times 0.3\times 0.05 - 0.125\times 0.2\times 0.05}{0.2\times 0.05 + 0.1\times 0.2 + 0.3\times 0.05} = 1.38888\,10^{-2}\,m$$
$$y_{G_a} = \frac{0.125\times 3 - 0.125\times 4}{3+4} = -1.78571\,10^{-2}\,m$$
$$z_{G_a} = z_{G_b} = 0\,m$$

On peut ensuite déterminer la position par rapport à O du centre élastique C.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{E_a S_a \overrightarrow{OG_a} + E_b S_b \overrightarrow{OG_b}}{E_a S_a + E_b S_b}$$

La section de béton S_b est $0{,}045\,m^2$ et la section d'acier S_a est $7.10^{-4}\,m^2$. Le module d'Young du béton est $2.10^{10}\,MPa$ et celui de l'acier $21.10^{10}\,MPa$. On a donc

$$y_c = \frac{2\times 0.045\times 1.38888 - 21\times 7\,10^{-4}\times 1.78571}{2\times 0.045 + 21\times 7\,10^{-4}} = 0.94317\,10^{-2}\,m$$
$$z_c = 0\,m$$

2.2 Moments quadratiques

Les moments quadratiques des sections rectangulaires de béton sont calculées par la formule suivante :

$$\frac{b\,h^3}{12} + b\times h\times d^2$$

Où, b représente la largeur, h la hauteur et d la distance du centre de gravité de la section par rapport à l'axe pour lequel on calcule le moment.
On obtient alors le moment quadratique de la section de béton par rapport à l'axe z passant par le centre élastique :

$$I_{béton} = \frac{0.3\times 0.05^3}{12} + (0.3\times 0.05)\cdot(0.125 - 0.94317\cdot 10^{-2})^2 + \frac{0.1\times 0.2^3}{12} + (0.1\times 0.2)\cdot(0.94317\cdot 10^{-2})^2$$
$$+ \frac{0.2\times 0.05^3}{12} + (0.2\times 0.05)\cdot(0.125 + 0.94317\cdot 10^{-2})^2 = 0.4547\cdot 10^{-3}\,m^4$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les inerties des aciers sont calculées par la formule suivante :

$$\frac{\pi \phi^4}{64} + S \times d^2 \approx S \times d^2$$

Où, ϕ représente le diamètre de l'acier, S la section d'acier et d la distance du centre de gravité de la section par rapport à l'axe pour lequel on calcule le moment. Le diamètre des aciers étant petit, on néglige le premier terme.
On obtient alors le moment quadratique des sections d'acier par rapport à l'axe z passant par le centre élastique :

$$3\,10^{-4} \times (0.125 - 0.94317\,10^{-2})^2 + 4\,10^{-4} \times (0.125 + 0.94317\,10^{-2})^2 = 0.1124\,10^{-4}\,m^4$$

Pour le section complète de la poutre, le moment quadratique pondéré par les modules d'Young des matériaux est :

$$EI = 2\,10^{10} \times 0.4547\,10^{-3} + 21\,10^{10} \times 0.1124\,10^{-4} = 11.4544\,10^6\,Pa\,.\,m^4$$

2.3 Cas de charge 1

Pour le cas de charge 1 (charge concentrée au milieu de la poutre), la flèche est calculée par la formule de RDM suivante :

$$f = \frac{F \times l^3}{48\,EI}$$

Ce qui donne la flèche :

$$f = \frac{10000 \times 5^3}{48 \times 11.4544\,10^6} = 2.2735\,10^{-3}\,m$$

On peut également calculer les efforts généralisés suivants :

- l'effort tranchant au début de la poutre (partie gauche) vaut $\frac{F}{2} = 5000\,N$,
- le moment fléchissant au milieu de la poutre vaut : $\frac{F \times l}{4} = 1.25\,10^4\,N.m$.

2.4 Cas de charge 2

Pour le cas de charge 2 (poids propre de la poutre), la flèche est calculée par la formule de résistance des matériaux suivante :

$$f = \frac{5 \times p \times l^4}{384\,EI}$$

où p est la charge linéique due au poids des matériaux :

$$p = g(\rho_a S_a + \rho_b S_b) = 9.8 \times (2800 \times 7\,10^{-4} + 2400 \times 0.045) = 1111.9\,N.m^{-1}$$

Ce qui donne la flèche :

$$f = \frac{5 \times 1111.9 \times 5^4}{384 \times 11.4544\,10^6} = 7.9\,10^{-4}\,m$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.5 Cas de charge 3

Pour le cas de charge 3 (élévation homogène de température), la poutre étant isostatique et les coefficients de dilatation du béton et de l'acier étant identiques, la solution est simple :

Les contraintes et efforts généralisés sont nuls.

L'allongement de la poutre est : $\Delta l = \alpha \times l \times \Delta T$

Ce qui donne avec les valeurs de notre cas :

$$\Delta l = 10^{-5} \times 5 \times 100 = 5.10^{-3} m$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

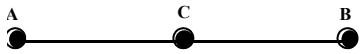
3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

On utilise une modélisation POU_D_EM.

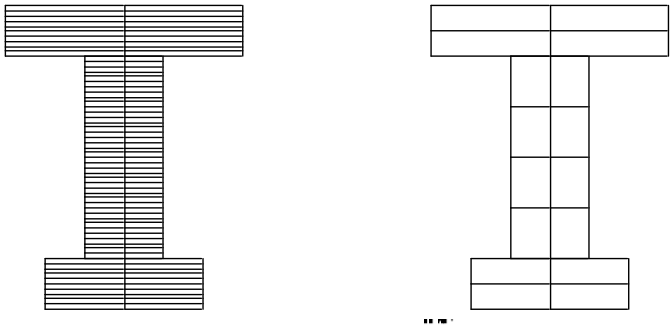
3.2 Caractéristiques du maillage

Maillage longitudinal de la poutre :
Nous avons 3 nœuds et deux éléments (POU_D_EM).



La partie béton de la section transversale de la poutre est maillée (DEFI_GEOM_FIBRE / SECT) tandis que les aciers sont donnés directement sous forme de 4 fibres ponctuelles dans DEFI_GEOM_FIBRE / FIBRE.

Deux maillages de la partie béton sont testés pour le cas de charge 1. Le maillage fin est constitué de 120 fibres et le maillage grossier est constitué de 16 fibres :



Remarque :

Le problème étant $2D$, une seule fibre dans la largeur pourrait sembler suffisante (multicouches), mais cela conduirait à avoir des termes nuls dans la matrice de rigidité (l'inertie propre des fibres n'étant pas prise en compte) et à une erreur lors de la résolution du système d'équations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

3.3.1 Cas de charge 1

	Référence
Flèche (maillage fin)	2,2735 10^{-3}
Flèche (maillage grossier)	2,2735 10^{-3}
Effort tranchant (appuis A)	5000
Moment fléchissant (Milieu)	1,25 10^{4}

1) Les calculs sont effectués sans prendre en compte l'inertie propre de chaque fibre. Les résultats montrent qu'il n'est néanmoins pas très utile d'en tenir compte car la différence entre un maillage grossier et un maillage fin n'est pas flagrante.
   Le maillage de la section n'a pas besoin d'être très fin pour avoir des résultats précis (en élasticité).
2) L'option EFGE_NOEU utilisée pour calculer les efforts généralisés aux nœuds fait une moyenne des efforts généralisés de tous les éléments connectés au nœud. Dans notre cas, nous avons 2 éléments de poutre superposés (un pour le béton, un pour l'acier), les efforts calculés sont donc divisés par 2.
   Si l'on additionne les valeurs d'efforts par élément (EFGE_ELNO) de l'élément béton et de l'élément acier, on retrouve bien les valeurs théoriques.

Remarque :

Si on fait un calcul de flèche en prenant O (mi-hauteur) comme axe de référence à la place du centre élastique (COOR_AXE_POUTRE), l'erreur relative sur la flèche est de 0,2% (car ici le centre élastique est pratiquement à mi-hauteur (voir 1.2.1).

On teste également la distribution en volume de la composante SIXX des champs SIEF_ELGA et SIGM_ELNO ainsi que le volume de la poutre béton.

3.3.2 Cas de charge 2

	Référence
Flèche (maillage fin)	7,900 10^{-4}

3.3.3 Cas de charge 3

	Référence
Allongement	5,00 10^{-3}
Efforts	0,00

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

La modélisation B reprend le cas 1/ de la modélisation A.
Le maillage de la section (Figure 4-1: Section de la poutre pour SSLL111b) est toutefois légèrement différent et les axes ont été changés : la flexion se fait dans le plan Z .

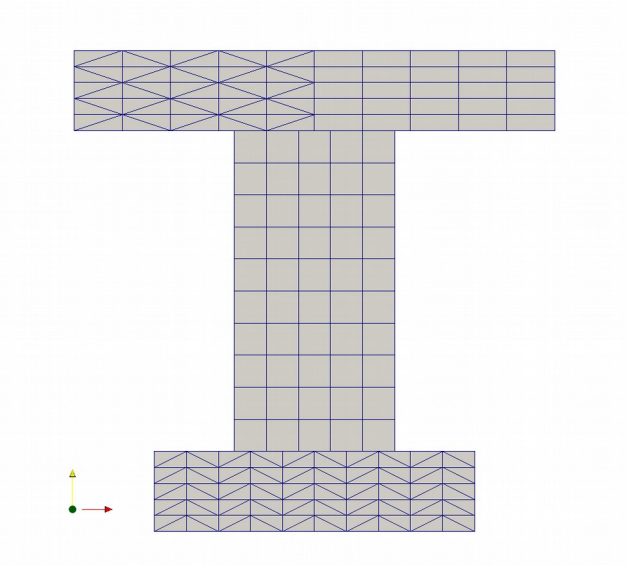


Figure 4-1: Section de la poutre pour SSLL111b

On n'a écrit pour cette modélisation que des tests de non-régression, bien que l'on puisse se référer à certaines valeurs de la modélisation A.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)