SDLV302 – Analyse modale par sous-structuration : poutre bi-appuyée

Résumé :

Ce test valide l'analyse modale d'une structure par la méthode de sous-structuration dynamique. La structure étudiée est une poutre bi-appuyée déformable à l'effort tranchant.
Elle est modélisée par des éléments volumes hexaédriques à 20 nœuds (modélisation 3D).

L'analyse modale est réalisée par trois méthodes :
- approche directe ;
- approche par sous-structuration dynamique de Craig-Bampton ;
- approche directe avec amortissement visqueux proportionnel.

Un interêt particulier de ce test est la présence de relations linéaires entre plusieurs degrés de liberté.

Les fréquences propres calculées sont comparées à des valeurs obtenues analytiquement pour un modèle de poutre de Timoshenko déformable à l'effort tranchant et tenant compte de l'inertie rotatoire des sections.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

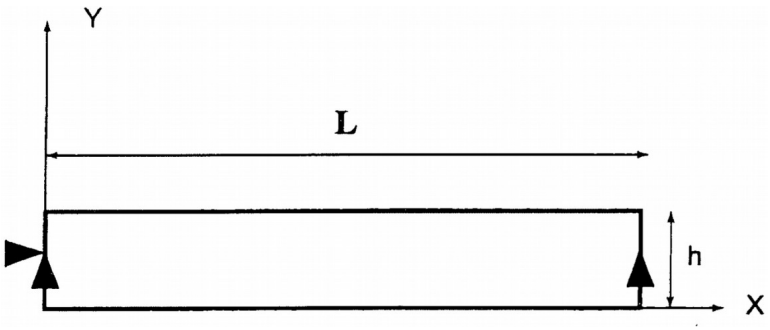


Figure 1.1-1 : Géométrie du problème

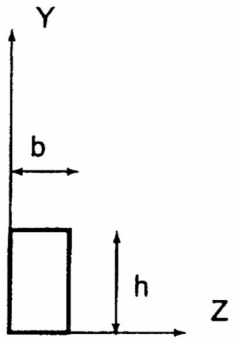


Figure 1.1-2 : Géométrie du problème

Hauteur : $h=0.2\,\mathrm{m}$
Largeur : $b=0.1\,\mathrm{m}$
Longueur : $L=2\,\mathrm{m}$
Section : $A=b\times h=0.02\,\mathrm{m}$
Inertie : $I=\frac{b\times h^3}{12}=1.66\times10^{-5}\,\mathrm{m}$
Coefficient de réduction de section $k'=\frac{5}{6}$

1.2 Propriétés du matériau

Module d'Young	$E=2.1\times10^{11}\,Pa$
Coefficient de Poisson	$\nu=0.3$
Masse volumique	$\rho=7800.0\,kg.m^{-3}$
Module de glissement	$G=\frac{E}{2(1+\nu)}=8.076\times10^{10}\,\mathrm{Pa}$

1.3 Conditions aux limites et chargements

On autorise que la flexion dans le plan XY et l'extension le long de l'axe X. Le modèle étant volumique, les conditions aux limites diffèrent quelque peu de celles que l'on imposerait à un modèle poutre.

Déplacement imposé :

En $X=0$, $Y=h/2$	$DX=0$, $DY=0$
En $X=L$, $Y=h/2$	$DY=0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En $Z=b/2$	$DZ=0$

Aux conditions précédentes, on ajoute la contrainte de planéité des sections en $X=0$ et $X=L$. Cette contrainte peut s'exprimer comme suit. Désignons par $x^T=(X,Y,Z)$ le vecteur des coordonnées et par $u^T=(DX,DY,DZ)$ le vecteur des déplacements; la position d'un point est repérée par le vecteur $x'^T=x^T+u^T=(X',Y',Z')$. Soient A, B et C trois points non-alignés de la section. Un point quelconque P est astreint à la condition :

$$\begin{vmatrix} X'_P & Y'_P & Z'_P & 1 \\ X'_A & Y'_A & Z'_A & 1 \\ X'_B & Y'_B & Z'_B & 1 \\ X'_C & Y'_C & Z'_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est obtenue analytiquement pour une poutre de Timoshenko, prenant en compte la déformation à l'effort tranchant et l'inertie rotatoire des sections. Les aspects théoriques sont développés dans la référence donnée en 2.4.

Définissons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$\Omega_n = \frac{\rho A L^4}{EI} \omega_n^2$ valeurs propres

$j = \frac{I}{A L^2}$ inertie rotatoire

$g = \frac{EI}{k' A G L^2}$ coefficient de cisaillement

Les fréquences propres des premiers modes de flexions sont données par l'expression suivante :

$$\Omega_n = \frac{(g+j)\lambda_n^2 + 1 - \sqrt{(g-j)^2 \lambda_n^4 + 2(g+j)\lambda_n^2 + 1}}{2 g j}$$

avec

$$\lambda_n = n\pi , \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Les fréquences des modes d'extension sont données par :

$$f_n = (2n-1)\frac{1}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} , \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

2.2 Résultats de référence

Mode	Forme	Fréquence (Hz)
1	flexion	115.7
2	flexion	442.2
3	extension	648.6
4	flexion	931.6
5	flexion	1534.0

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

ROBERT G., Solutions analytiques en dynamiques des structures, Rapport Samtech n° 121, Liège, 1996.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation A

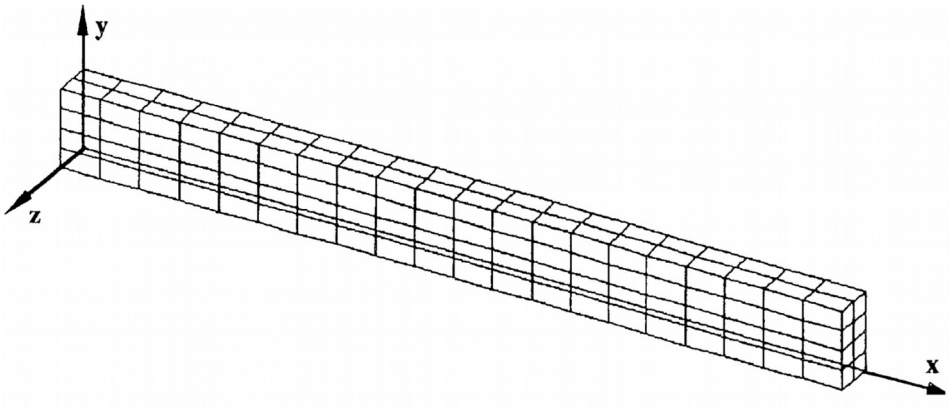


Figure 3.1-1 :Maillage de la géométrie du problème

Dans cette modélisation, la structure complète est maillée au moyen d'éléments volumiques 3D.

La contrainte de planéité s'exprime comme suit. Soient,

- le point A $X=0$, $Y=h/2$, $Z=0$: $DX=DY=0$, $DZ\neq 0$;
- le point B $X=0$, $Y=h/2$, $Z=b$: $DX=DY=0$, $DZ\neq 0$;
- le point C $X=0$, $Y=h$, $Z=b/2$: $DX\neq DY\neq 0$, $DZ=0$

En négligeant les termes du second ordre dans les déplacements, la contrainte de planéité se traduit par une relation linéaire entre les déplacements $DX=0$ des points A , B , C et P , un point quelconque de la face :

$$\begin{vmatrix} DX_P & Y_P & Z_P & 1 \\ DX_A & h/2 & 0 & 1 \\ DX_B & h/2 & b & 1 \\ DX_C & h & b/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La condition s'écrit alors pour $DX_A=0$:

$$DX_P = DX_C \times \left(\frac{2Y_P}{h-1}\right)$$

En $X=L$, la condition de planéité s'obtient de façon analogue mais pour DX_A quelconque. La relation s'écrit alors :

$$DX_P = DX_C \times \left(\frac{2Y_P}{h-1}\right) + 2 \times \left(1-\frac{Y_P}{h}\right) \times DX_A$$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 1077
Nombre de mailles et types : 160 HEXA20

3.3 Grandeurs testées et résultats

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Mode	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
1	115.7	'ANALYTIQUE'	1.0
2	442.2	'ANALYTIQUE'	1.0
3	648.6	'ANALYTIQUE'	1.0
4	931.6	'ANALYTIQUE'	1.0
5	1534.0	'ANALYTIQUE'	1.0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation B

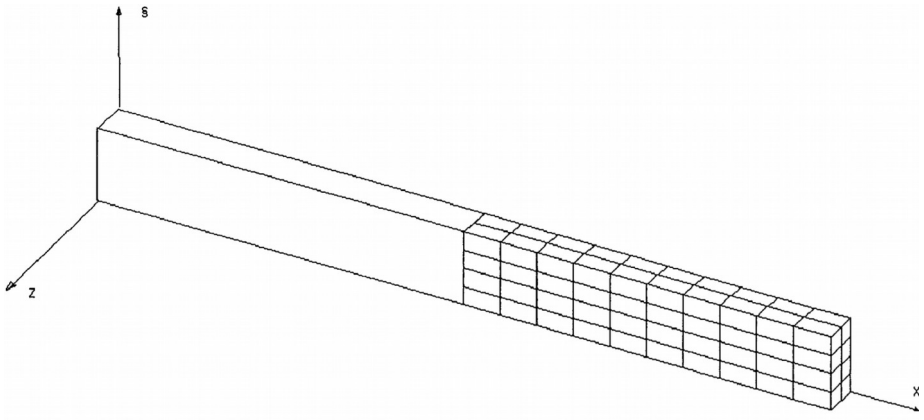


Figure 4.1-1 : Maillage de la géométrie du problème.

La poutre est divisée en deux parties égales. Chaque moitié est représentée par une sous-structure. Celles-ci sont générées par la méthode de Craig-Bampton. Sa base modale se compose des normaux à interface bloquées, au nombre de 10 et des modes statiques contraints relatifs aux points tels que $X=L$ et $Y=h/2$ (on ne considère en ces points que les degrés de liberté non fixés par les conditions aux limites).

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 557
Nombre de mailles et types : 80 HEXA20

4.3 Grandeurs testées et résultats

Mode	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance (%)
1	115.7	'ANALYTIQUE'	1.0
2	442.2	'ANALYTIQUE'	1.0
3	648.6	'ANALYTIQUE'	1.0
4	931.6	'ANALYTIQUE'	1.0
5	1534.0	'ANALYTIQUE'	1.0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation C

Identique à la modélisation A avec ajout d'amortissement visqueux proportionnel tel que :

$$[C]=\alpha[K]+\beta[M]$$

avec

$$\alpha=0.2852750549\times 10^{-4} \text{ et } \beta=57.62031174$$

On utilise la méthode de Lanczos (METHODE = 'TRI_DIAG') pour calculer les modes propres.

5.2 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation A.

5.3 Grandeurs testées et résultats

Tests de non-régression uniquement sauf pour la validation des options MATE_ELGA et MATE_ELEM.

Identification	Valeur de référence	Type de référence	Tolérance
Champ MATE_ELGA, Maille MA000074, Point 1, Comp. RHO	1E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %
Champ MATE_ELEM, Maille MA000074, Comp. E	1E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %
Champ MATE_ELGA, Maille MA000081, Point 1, Comp. RHO	3E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %
Champ MATE_ELEM, Maille MA000081, Comp. E	3E3	'ANALYTIQUE'	0,1 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation D

Identique à la modélisation A avec ajout d'amortissement visqueux proportionnel tel que :

$$[C]=\alpha[K]+\beta[M]$$

avec,

$$\alpha=1.14110022\times10^{-4} \text{ et } \beta=230.4812469$$

On utilise la méthode de Sorensen (METHODE = 'SORENSEN') pour calculer les modes propres.

6.2 Caractéristiques du maillage

Identique à la modélisation A.

6.3 Grandeurs testées et résultats

Tests de non-régression uniquement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

La modélisation A permet de valider le calcul des modes propres par rapport à une solution de référence obtenue analytiquement ; l'erreur maximale est de moins de 0.5 %.
La modélisation B valide la sous-structuration dynamique avec interface de Craig-Bampton. L'erreur relative entre les modélisations A et B est nulle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)