SDLS503 - Vibrations de flexion d'une poutre sandwich

Résumé :

Ce test représente un calcul en analyse modale d'une poutre sandwich simplement supportée. Ce test permet de valider :

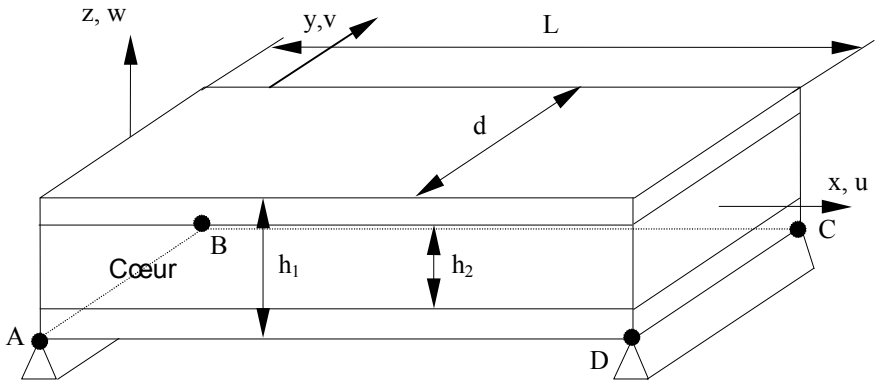
- la modélisation éléments finis de plaques DKT avec des mailles QUAD4 et TRIA3,
- la modélisation éléments finis de plaques DST avec des mailles QUAD4 et TRIA3,
- la prise en compte de la rigidité en cisaillement transverse,
- la prise en compte de matériau composite.

Les fréquences et les modes obtenus sont comparés à une solution de référence analytique. Il faut noter que la modélisation DKT, dont la formulation ne prend pas en compte le cisaillement transverse, n'est pas adaptée pour modéliser ce cas-test. Ainsi, les erreurs sont très importantes pour les modélisations A et B. Les résultats obtenus avec DST sont satisfaisants.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



L = 1.0 m
d = 0.1m
h_1 = 0.1m
h_2 = 0.05m

1.2 Propriétés du matériau

Revêtements : $E_x = E_y = 4.10^{10}\,Pa$ $G_{xz} = G_{yz} = 4.10^{9}\,Pa$ $\nu_{xz} = 0.3$ $\rho_1 = 2000\,kg/m^3$

Cœur : $E_x = E_y = 4.10^{7}\,Pa$ $G_{xz} = G_{yz} = 1.5.10^{7}\,Pa$ $\nu_{xz} = 0.3$ $\rho_2 = 50\,kg/m^3$

Coefficient de cisaillement k : $1/k = 110.8$.

Les coefficients de Poisson sont identiques : $\nu_{xz} = \nu_{xy} = \nu_{yz}$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

La poutre repose simplement sur les cotés AB et CD .

1.4 Conditions initiales

Sans objet.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le calcul s'effectue à partir des relations d'équilibre dynamique et de comportement [bib2] rappelées ci-après :

$$\frac{\partial M_y}{\partial x}+V_z=\langle \rho I\rangle \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial V_z}{\partial x}=\langle \rho S\rangle \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2}$$

$$M_y=\langle E I\rangle \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \qquad V_z=k\langle G S\rangle\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}-\theta_y\right)$$

Ces relations permettent d'écrire l'équation du mouvement de flexion dynamique transverse $v(x,t)$. On obtient l'équation aux fréquences propres après avoir associé les conditions aux limites.
L'équation aux fréquences propres s'écrit :

$$\sin(X_2)=0 \quad \text{avec} \quad X_2=\left[\bar{\omega}^2\frac{(1+a)}{2}+\sqrt{\bar{\omega}^2\left(\bar{\omega}^2\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right)}\right]^{1/2}$$

et

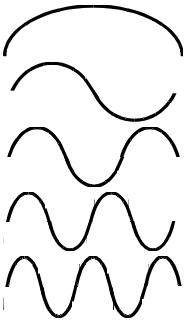
$$\bar{\omega}^2=\frac{\langle \rho I\rangle \omega^2 L^2}{\langle E I\rangle} \; ; \bar{r}^2=\frac{\langle \rho I\rangle}{\langle \rho S\rangle L^2} \; ; a=\frac{\langle \rho S\rangle\langle E I\rangle}{k\langle \rho I\rangle\langle G S\rangle}$$

Les solutions de l'équation aux fréquences propres s'écrivent alors : $X_2=n\pi \quad (n=1,2,3,...)$

2.2 Résultats de référence

5 premières fréquences et modes propres de flexion associés.

- Fréquence mode 1 : $64.476\,Hz$
- Fréquence mode 2 : $131.918\,Hz$
- Fréquence mode 3 : $198.734\,Hz$
- Fréquence mode 4 : $265.383\,Hz$
- Fréquence mode 5 : $331.963\,Hz$



2.3 Incertitudes sur la solution

La solution de référence est calculée dans le cadre des hypothèses de la théorie des poutres [bib2] : $\sigma_y=\sigma_z=0$.

2.4 Références bibliographiques

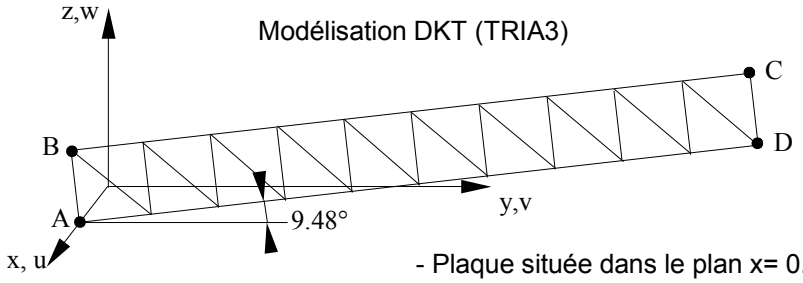
1) VPCS : Progiciel de calcul de structures composites ; Exemples de validation. Revue des composites et des matériaux avancés, Volume 5 - numéro hors série/ 1995 - Edition Hermes.

2) CIEAUX J.M. : Flexion dynamique des poutres composites à phases orthotropes ; Validité du domaine quasi-statique. Thèse de l'Université Paul Sabatier Toulouse III, 1988.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation



- Plaque située dans le plan x= 0.33
- Conditions aux limites : Cotés AB et CD : u=0

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3

3.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	*Aster*	% différence
Fréquence mode 1	64.476	277.449	330.
Fréquence mode 2	131.918	1105.83	738.
Fréquence mode 3	198.734	2473.80	1.14E3
Fréquence mode 4	265.383	4363.97	1.54E3
Fréquence mode 5	331.963	6753.904	1.93E3

3.4 Remarques

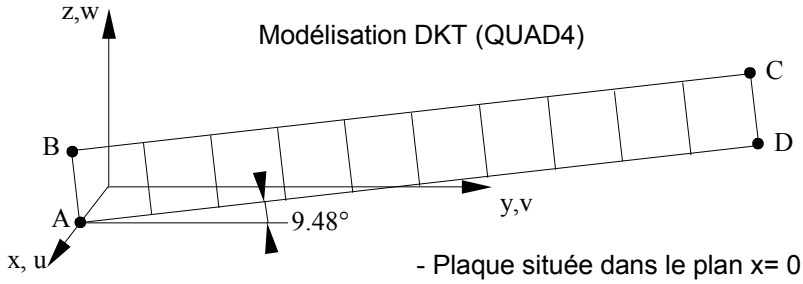
Dans le tableau de résultats, nous avons reporté les fréquences dont les modes sont identiques aux modes de référence.

- les effets du cisaillement transverse sont négligés dans la modélisation DKT,
- les résultats Code_Aster sont très supérieurs aux résultats de référence,
- apparition d'un mode de membrane entre les modes 2 et 3 et entre les modes 5 et 6 de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation



- Plaque située dans le plan x= 0.33
- Conditions aux limites : Cotés AB et CD : u=0

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 10 QUAD4

4.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	*Aster*	% différence
Fréquence mode 1	64.476	277.788	331
Fréquence mode 2	131.918	1111.225	742.
Fréquence mode 3	198.734	2500.930	1.16E3
Fréquence mode 4	265.383	4449.073	1.52E3
Fréquence mode 5	331.963	6960.324	2.00E3

4.4 Remarques

Dans le tableau de résultats, nous avons reporté les fréquences dont les modes sont identiques aux modes de référence.

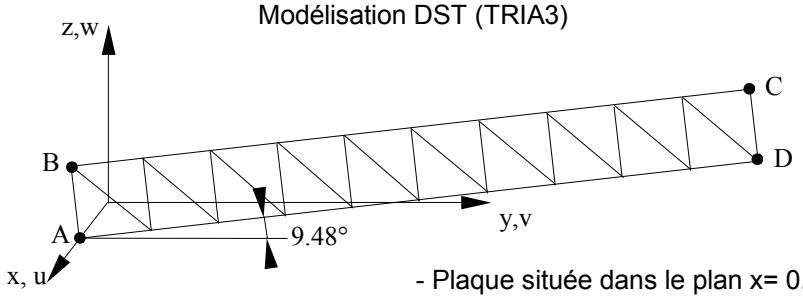
- les effets du cisaillement transverse sont négligés dans la modélisation DKT,
- les résultats Code_Aster sont très supérieurs aux résultats de référence,
- apparition d'un mode de membrane entre les modes 2 et 3 et entre les modes 5 et 6 de référence.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DST (TRIA3)



- Plaque située dans le plan x= 0.33
- Conditions aux limites : Cotés AB et CD : u=0

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 20 TRIA3

5.3 Grandeurs testées et résultats

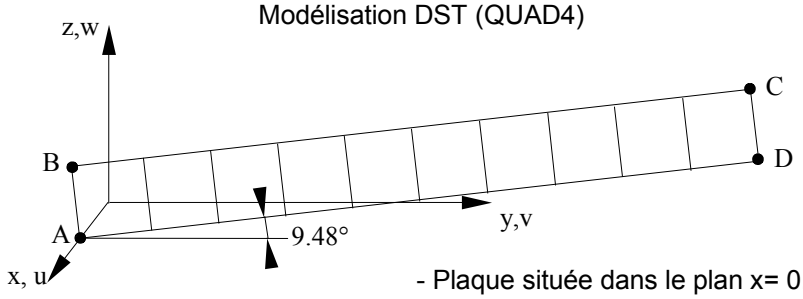
Identification	Référence	*Aster*	% différence
Fréquence mode 1	64.476	64.573	0.150
Fréquence mode 2	131.918	133.987	1.568
Fréquence mode 3	198.734	206.046	3.679
Fréquence mode 4	265.383	282.875	6.591
Fréquence mode 5	331.963	365.919	10.229

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DST (QUAD4)



- Plaque située dans le plan x= 0.33
- Conditions aux limites : Cotés AB et CD : u=0

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 22
Nombre de mailles et type : 10 QUAD4

6.3 Grandeurs testées et résultats

Identification	Référence	*Aster*	% différence
Fréquence mode 1	64.476	64.595	0.184
Fréquence mode 2	131.918	131.495	-0.320
Fréquence mode 3	198.734	196.861	-0.942
Fréquence mode 4	265.383	260.247	-1.935
Fréquence mode 5	331.963	320.409	-3.480

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

La modélisation DKT n'est pas adaptée pour modéliser ce cas-test, les erreurs sont très importantes. La formulation DKT ne prend pas en compte le cisaillement transverse contrairement à la modélisation DST. Pour ce type d'exemple, où la structure est constituée d'un matériau composite et relativement épaisse ($h/L=0.1$), il est préférable d'utiliser la modélisation DST.

Les résultats obtenus avec DST sont :

- satisfaisants pour les 3 premières fréquences avec la maille TRIA3 et pour les 5 premières fréquences pour la maille QUAD4 avec une meilleure précision pour la maille QUAD4,
- l'erreur de 10% pour la 4ième et 5ième fréquence avec la maille TRIA3 est significative. Un maillage plus fin devrait permettre d'améliorer les résultats en ayant une meilleure représentation des derniers modes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)