SDLS03 - Plaque rectangulaire mince simplement appuyée sur les bords

Résumé :

Ce problème tridimensionnel consiste à chercher les fréquences de vibration d'une structure mécanique de type plaque. Deux configurations différentes permettent de tester les modes de vibration dans le plan de la plaque (comportement en membrane) avec des appuis élastiques sur deux bords opposés, et les modes de vibration en flexion d'une plaque appuyée sur son contour.

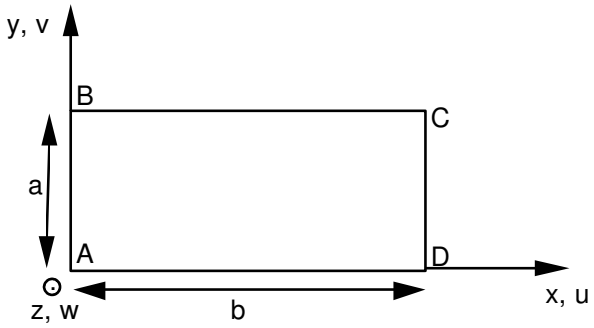
Ce test de mécanique des structures correspond à une analyse dynamique d'un modèle surfacique ayant un comportement linéaire. Il comporte deux modélisations (maillage en triangle ou en quadrangle).

Ce problème permet de tester les éléments de plaque en flexion transverse et en membrane et le calcul des fréquences de vibration par la méthode de Lanczos ou la méthode de Bathe et Wilson.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Soit une plaque dont les caractéristiques sont les suivantes :

longueur : $a=1.5\,m$ largeur : $b=1\,m$ épaisseur : $t=0.01\,m$

Les points caractéristiques de la plaque ont pour coordonnées :

	A	B	C	D
x	0.	0.	1.	1.
y	0.	1.5	1.5	0.
z	0.	0.	0.	0.

1.2 Propriétés des matériaux

Les paramètres caractérisant les propriétés du matériau sont :

$E=2.1\,10^{11}\ Pa$ $\nu=0.3$ $\rho=7800\,kg/m^3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

1.3.1 Problème de flexion

La plaque est en appui simple sur tous ses côtés : pour tout point P du bord on a : $w=0$.

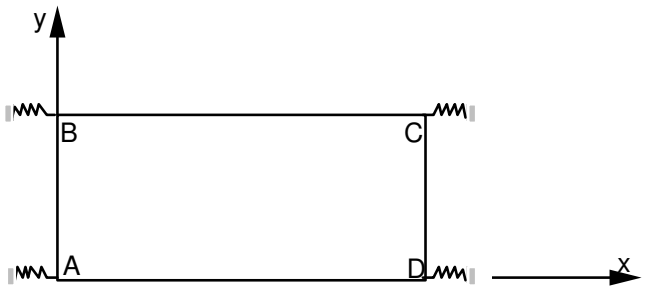
1.3.2 Problème de membrane

Pour tous les points de la plaque, on bloque le déplacement en z et les trois degrés de rotation, c'est-à-dire :

$$w=0. \quad \theta_x=\theta_y=\theta_z=0.$$

Sur les côtés AD et BC on bloque le déplacement en y : pour $y=0.$ ou $y=a$ on a $v=0$.

Aux points A, B, C, D , on attache des ressorts de raideur k . L'axe de ces ressorts est la direction x .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La valeur numérique de k est la suivante : $k=25\,N/m$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

2.1.1 Problème de flexion

La solution de référence du problème de flexion est celle donnée dans la fiche SDLS03/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante.

La formulation de M.V. BARTON pour une plaque rectangulaire, posée sur ses quatre côtés conduit pour les modes de flexion à :

$$f_{ij}=\frac{\pi}{2}\left[\left[\frac{i}{a}\right]^2+\left[\frac{j}{b}\right]^2\right]\sqrt{\frac{E\,t^2}{12\,\rho(1-\nu^2)}}$$

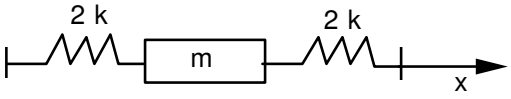
avec :

i = nombre de demi-longueur d'onde selon y (dimension a),

j = nombre de demi-longueur d'onde selon x (dimension b).

2.1.2 Problème de membrane

Le problème traité en membrane est équivalent pour la recherche de la première fréquence de vibration au problème unidimensionnel suivant :



où :

k est la raideur des ressorts,

m est la masse de la plaque.

La fréquence cherchée est donc : $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}$

2.2 Résultats de référence

Pour le problème de flexion, on calcule les six premières fréquences de vibration et pour le calcul en membrane, on ne calcule que la première fréquence.

2.3 Incertitude sur la solution

Les solutions étant analytiques, il n'y a pas d'incertitude.

2.4 Références bibliographiques

1) M.V. BARTON "Vibrations of rectangular and skew cantilever plates" - Journal of Applied Mechanics, vol. 18, p. 129-134 (1951).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

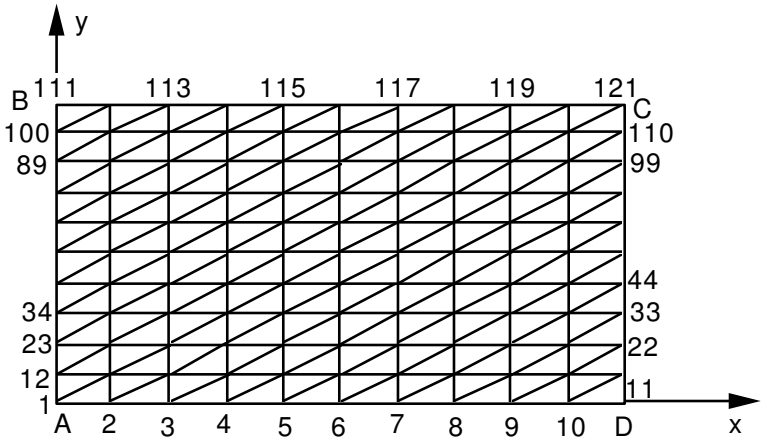
On a découpé la plaque en 200 mailles TRIA3. Deux modélisations pour la plaque sont utilisées : DKT et DST.

Pour le problème de flexion, les conditions aux limites sont les suivantes :

- en tous les nœuds du bord : $DZ=0$

Pour le problème de membrane, les conditions aux limites sont :

- en tous les nœuds du maillage : $DZ=0 \quad DRX=DRY=DRZ=0$,
- en tous les nœuds des côtés AB et BC : $DY=0$
- aux points A, B, C, D on ajoute des éléments discrets de rigidité (direction x).



3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 121

Nombre de mailles et types : 200 TRIA3

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point A = $N1$	Point C = $N121$
Point B = $N111$	Point D = $N11$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les modes de flexion :

Numéro du mode	Fréquences			
	Référence	*Aster* DKT	% différence	% tolérance
4	35.63	35.46	–0.477	0.5
5	68.51	67.82	–1.003	1.1
6	109.62	108.67	–0.867	0.9
7	123.32	121.90	–1.150	1.2
8	142.51	139.99	–1.761	1.8
9	197.32	191.70	–2.846	2.9

Aster DST	% différence	% tolérance
35.45	–0.492	0.5
67.80	–1.030	1.1
108.62	–0.910	1.
121.84	–1.199	1.3
139.92	–1.815	1.9
191.57	–2.912	3.

Pour le problème en membrane :

Référence	*Aster* DKT	% différence	% tolérance
0.14714	0.147136	–0.002	0.1

	Aster DST	% différence	% tolérance
	0.147136	–0.001	0.1

3.4 Remarques

Pour le problème en flexion, la position modale du premier mode trouvé dans la bande $(5.,200.)$ est la quatrième, parce qu'il y a trois modes de corps solide à la fréquence zéro :

- modes de translation u et v dans le plan,
- mode de rotation autour de l'axe z .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

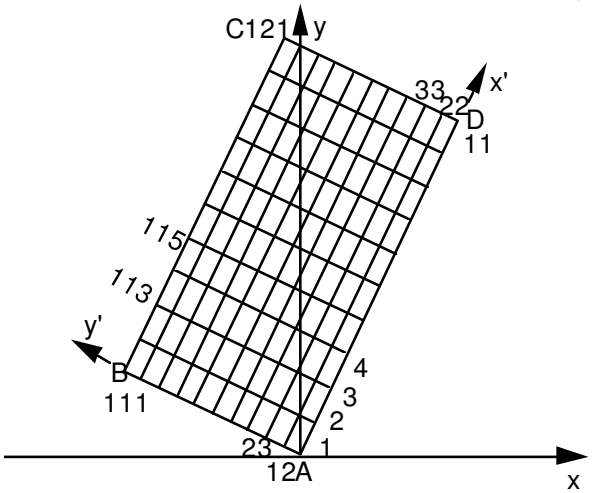
4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

On a découpé la plaque en 100 mailles QUAD4.

Trois modélisations pour la plaque sont utilisées : Q4G, DKT (DKQ), DST (DSQ).

Par rapport à la modélisation A, la plaque a été tournée dans le plan (o, x, y) d'un angle de $60°$



Pour le problème de flexion, les conditions aux limites sont les suivantes :

- en tous les nœuds du bord : $DZ=0$

Pour le problème de membrane, les conditions aux limites sont :

- en tous les nœuds du maillage : $DZ=0 \quad DRX=DRY=DRZ=0$,
- au nœud A , on bloque le déplacement DY dans le repère (A, x', y') ,
- aux points A, B, C, D on ajoute des éléments discrets de rigidité (direction x').

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 121 Nombre de mailles et types : 100 QUAD4

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point A = $N1$ Point B = $N111$ Point C = $N121$ Point D = $N11$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les modes de flexion :

Numéro du mode	Fréquences			
	Référence	***Aster* DKQ**	**% différence**	**% tolérance**
4	35.63	35.359	–0.760	0.8
5	68.51	67.491	–1.427	1.5
6	109.62	108.563	–0.964	1.
7	123.32	121.144	–1.765	1.8
8	142.51	138.402	–2.882	2.9
9	197.32	188.500	–4.470	4.5
		***Aster* DSQ**		
4	35.63	35.351	–0.782	0.8
5	68.51	67.464	–1.527	1.6
6	109.62	108.494	–1.027	1.1
7	123.32	121.060	–1.832	1.9
8	142.51	138.291	–2.961	3.
9	197.32	188.298	–4.572	4.6
		***Aster* Q4G**		
4	35.63	36.011	1.068	1.1
5	68.51	70.795	3.336	3.5
6	109.62	114.593	4.536	4.6
7	123.32	134.899	9.39	9.4
8	142.51	142.941	4.513	4.6
9	197.32	212.045	7.463	7.5

Pour le problème en membrane :

	Référence	***Aster***	**% différence**	**% tolérance**
DKQ	0.14714	0.14713	–0.003	0.1
DSQ	0.14714	0.14714	–0.002	0.1
Q4G	0.14714	0.14714	0.	0.1

4.4 Remarques

Pour le problème en flexion, la position modale du premier mode trouvé dans la bande $(5.,200.)$ est la quatrième, parce qu'il y a trois modes de corps solide à la fréquence zéro :

- modes de translation u et v dans le plan,
- mode de rotation autour de l'axe z .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation D

5.1 Caractéristiques de la modélisation

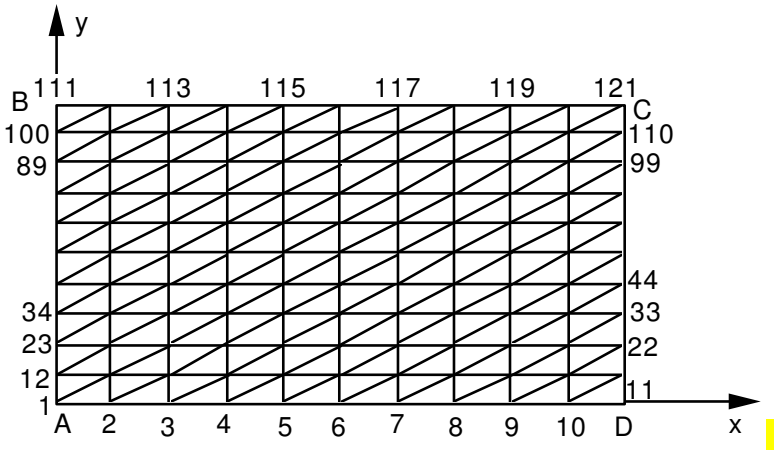
On a découpé la plaque en 200 mailles TRIA3. une modélisation pour la plaque est utilisée : Q4G.

Pour le problème de flexion, les conditions aux limites sont les suivantes :

- en tous les nœuds du bord : $DZ=0$

Pour le problème de membrane, les conditions aux limites sont :

- en tous les nœuds du maillage : $DZ=0 \quad DRX=DRY=DRZ=0$,
- en tous les nœuds des côtés AB et BC : $DY=0$
- aux points A, B, C, D on ajoute des éléments discrets de rigidité (direction x).



5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 121

Nombre de mailles et types : 200 TRIA3

Les points caractéristiques du maillage sont les suivants :

Point A = $N1$ Point C = $N121$
Point B = $N111$ Point D = $N11$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Grandeurs testées et résultats

Pour les modes de flexion :

Numéro du mode	Identification	Type de Référence	Référence	% tolérance
4	Fréquences	'ANALYTIQUE'	35.63	1.5
5	Fréquences	'ANALYTIQUE'	68.51	3.5
6	Fréquences	'ANALYTIQUE'	109.62	3.0
7	Fréquences	'ANALYTIQUE'	123.32	7.0
8	Fréquences	'ANALYTIQUE'	142.51	8.5
9	Fréquences	'ANALYTIQUE'	197.32	10.0

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Synthèse des résultats

La précision, pour les modes de flexion, reste acceptable sur les six premiers modes. Notons cependant que la précision est moins bonne que dans le cas de la plaque libre dans l'espace (test SDLS01 [V2.03.001]).

On remarque que le traitement des modes de corps solide est convenable.

Pour le test en membrane, les résultats sont très satisfaisants.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)