SDLS01 - Plaque carrée mince, libre ou encastrée au bord

Résumé :

Le domaine d'application de ce cas test concerne la dynamique des structures, et plus particulièrement le calcul modal et le calcul de réponse harmonique.

Pour le calcul modal, il s'agit de calculer les modes propres de flexion d'une plaque carrée mince dans deux configurations :

- Plaque encastrée sur un bord,
- Plaque libre.

La plaque est maillée en éléments triangulaires auxquels sont affectés des éléments DKT.

Quatre modélisations différentes sont testées :

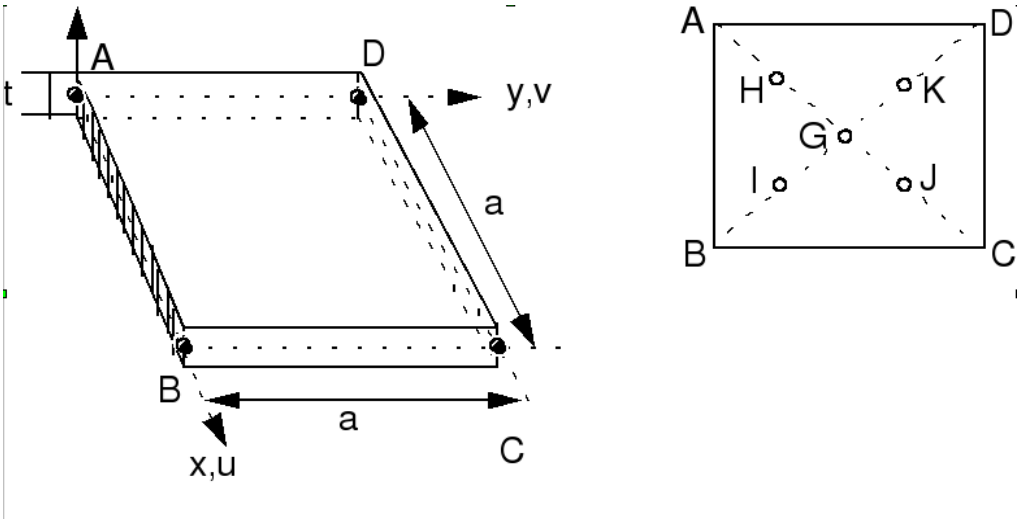
- Calcul modal – Arêtes de la plaque orientées selon les axes du repère,
- Calcul modal – Orientation quelconque de la plaque et réponse harmonique pour la plaque encastrée,
- Calcul modal par sous–structuration dynamique classique et cyclique,
- Calcul modal suite à une condensation de Guyan.

Les résultats de référence des calculs modaux sont issus de calculs analytiques. Ils valident d'une part les outils de création des matrices de masse et de rigidité, ainsi que les opérateurs de sous-structuration dynamique classique et cyclique implémentés dans *Code_Aster*. D'autre part, ce cas test valide le calcul modal suite à une condensation de Guyan (condensation de la matrice de masse).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



Côté $a=1\mathrm{m}$
Epaisseur $t=0.01\mathrm{m}$

Coordonnées des points (en m) :

	A	B	C	D	G	H	I	J	K
x	0.	1.	1.	0.	0.5	0.25	0.75	0.75	0.25
y	0.	0.	1.	1.	0.5	0.25	0.25	0.75	0.75
z	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

1.2 Propriétés de matériaux

$E=2.1\,10^{11}\,Pa \qquad \nu=0.3 \qquad \rho=7800\,kg/m^3$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Cas 1 : coté AB encastré
pour tout point P tel que $y_P=0$:

$$u=v=w=0.$$
$$\theta_x=\theta_y=\theta_z=0.$$

Cas 2 : plaque libre

1.4 Conditions initiales

Sans objet pour l'analyse modale

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

La solution de référence est celle donnée dans la fiche SDLS01/89 du guide VPCS qui présente la méthode de calcul de la façon suivante :

La formulation de M.V. BARTON, pour une plaque de coté a , conduit à :

$$f_i = \frac{1}{2\pi a^2}\lambda_i^2\sqrt{\frac{Et^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \qquad i=1,2,...$$

avec, pour un coefficient de Poisson $\nu=0.3$:

1° : Plaque encastrée sur un côté

i	λ_i^2
1	3.492
2	8.525
3	21.43
4	27.33
5	31.11
6	54.44

2° : Plaque libre

i	λ_i^2
1 à 6	0.
7	13.49
8	19.79
9	24.43
10	35.02
11	35.02

(6 modes de corps solide à fréquence nulle).

Cette solution de référence s'applique aux plaques minces telles que : $t/a<0.1$
Les coefficients λ_i sont établis par développement limité sur les déformées modales d'un réseau de poutres croisées (poutre encastrée–libre et poutre libre–libre).

2.2 Résultats de référence

Cas 1 : 6 premiers modes propres

Cas 2 : 11 premiers modes propres

2.3 Incertitude sur la solution

Solution semi–analytique.

2.4 Références bibliographiques

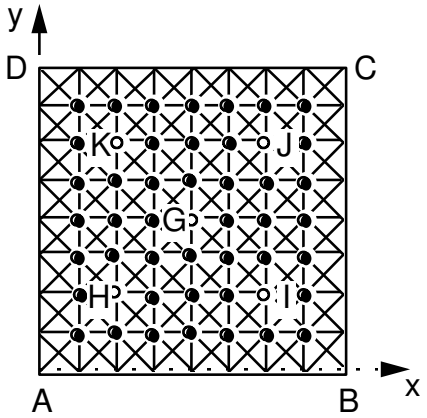
[1] M. V. BARTON Vibrations of rectangular and skew cantilever plates. – Journal of Applied Mechanics, vol 18, p. 129–134 (1951)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKT



Noms des Points nœuds : $A=N1$ $B=N78$ $C=N145$ $D=N80$ $G=N65$ $H=N17$ $I=N73$ $J=N121$ $K=N71$

Conditions limites :

Cas 1 en tous les nœuds du côté AB :

```
DDL_IMPO= _F( GROUP_NO= AB DX =0., DY =0., DZ =0.,
DRX =0.,DRY =0.,DRZ =0.)
```

Cas 2 aucune

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

3.3 Grandeurs testées et résultats

Fréquence (Hz)

Mode propre	Référence	*Aster*	% différence	Tolérance
	1° : Plaque encastrée sur un côté			
1	8.7266	8.6718	–0.63	
2	21.3042	21.2904	–0.06	
3	53.5542	53.0992	–0.85	$1.\ 10^{-2}$
4	68.2984	67.9269	–0.54	
5	77.7448	77.4294	–0.40	
6	136.0471	135.7635	–0.21	

	Aster $epot=ecin$
1	1.4796 10^4
2	1.7331 10^4
3	4.3802 10^4

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4	3.7367 10^4
5	5.4956 10^4
6	1.3483 10^5

2° : Plaque libre

7	33.7119	33.6839	–0.08	
8	49.4558	48.9362	–1.05	
9	61.0513	60.5849	–0.76	1.1 10^{-2}
10	87.5160	87.0993	–0.48	
11	87.5160	87.0993	–0.48	

	Aster $epot = ecin$
7	2.2396 10^4
8	4.7270 10^4
9	7.2453 10^4
10	1.4974 10^5
11	1.4974 10^5

On calcule l'énergie cinétique ECIN_ELEM de l'élément DKT (raccordé au point A dont l'un des cotés est sur AD) du problème 1 (« plaque encastrée sur un coté »):

Option	Composante	Référence (NON_REGRESSION)	*Aster*	% différence
ECIN_ELEM	TOTALE	0.011448	0.0114476	3.5 10^{-4}
ECIN_ELEM	FLEXION	2968.79	2968.7918	6.1 10^{-5}

3.4 Remarques

```
CALC_MODES       OPTION= 'BANDE'
      Cas 1 : FREQ = (8., 140.)
      Cas 2 : FREQ = (32., 90.)
```

Contenu du fichier résultats :

1° : 6 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux énergie de déformation et énergie cinétique des 6 modes.

2° : 5 fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux ($f > 0$) énergie de déformation et cinétique des 5 modes.

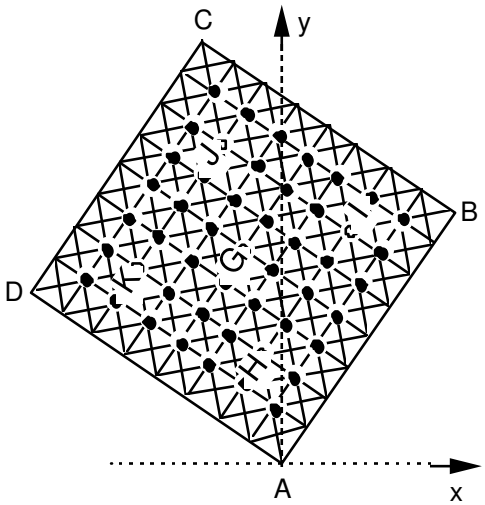
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation B

Modélisation DKT avec maillage identique à la modélisation A.

Rotation de la plaque telle que le côté AB est sur la droite $3\mathrm{y}=4\mathrm{x}$



Noms des Points nœuds : $A=N1$ $B=N78$ $C=N145$ $D=N80$
$G=N65$ $H=N17$ $I=N73$ $J=N121$ $K=N71$

Conditions limites :

Cas 1 en tous les nœuds du côté AB :

```
DDL_IMPO= (GROUP_NO= AB DX =0., DY =0., DZ =0., DRX =0.,DRY =0.,DRZ =0.)
```

Cas 2 : aucune

Réponse harmonique :

Force nodale point C ($N145$) : $Fz=-98100$

Matériau : AMOR_ALPHA : 0.1 AMOR_BETA : 0.1

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Les valeurs des fréquences propres sont identiques à celles de la modélisation A.

Réponse harmonique :

FREQ : $50\,Hz$ NOEUD : $N145$ MAILLE : $M255$

Référence	*Aster* 3.03.15	*Aster* 3.05.16	% différence
DEPL 'DZ'	2.90290E–02	2.90290E–02	0.0
	5.20606E–02	5.20606E–02	
DEPL 'DRX'	2.52920E–02	2.52920E–02	0.0
	9.44717E–02	9.44717E–02	
VITE 'DZ'	–1.63553E+01	–1.63553E+01	0.0
	9.11973E+00	9.11973E+00	
VITE 'DRX'	–2.96792E+01	–2.96792E+01	0.0
	7.94573E+00	7.94573E+00	
ACCE 'DZ'	–2.86505E+03	–2.86505E+03	0.0
	–5.13817E+03	–5.13817E+03	
ACCE 'DRX'	–2.49622E+03	–2.49622E+03	0.0
	–9.32398E+03	–9.32398E+03	
'EFGE_ELNO' 'MXX'	1.14053E+01	1.14053E+01	0.0
	1.45539E+03	1.45539E+03	
'EFGE_ELNO' 'MYY'	1.10224E+01	1.10224E+01	0.0
	–1.31441E+03	–1.31441E+03	
'EFGE_ELNO' 'MXY'	1.03148E+01	1.03148E+01	0.0
	3.55382E+02	3.55382E+02	
'EFGE_ELNO' 'QX'	3.66163E+02	3.66163E+02	0.0
	–3.77331E+03	–3.77331E+03	
'EFGE_ELNO' 'QY'	–3.14676E+02	–3.14676E+02	0.0
	2.06813E+03	2.06813E+03	
'SIGM_ELNO' 'SIXZ'	5.49245E+04	5.49245E+04	0.0
	–5.65997E+05	–5.65997E+05	
'SIGM_ELNO' 'SIYZ'	–4.72014E+04	–4.72014E+04	0.0
	3.10219E+05	3.10219E+05	

4.4 Remarques

CALC_MODES OPTION= 'BANDE'
Cas 1 : FREQ = (8., 140.)
Cas 2 : FREQ = (32., 90.)

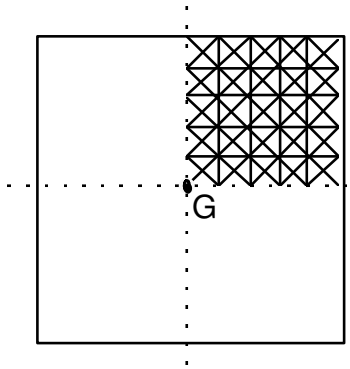
Contenu du fichier résultats :

1° : 6 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.
2° : 11 premières fréquences propres, vecteurs propres et paramètres modaux.
3° : déplacement DZ DRX au nœud $N145$
efforts généralisés et contraintes maille $M255$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation



Dans les 2 cas, la plaque est découpée en 4 parties de dimensions égales. Chaque sous–structure considérée est maillée en triangles auxquels sont affectés des éléments de plaque DKT.

Cas 1 : Plaque encastrée sur un bord
La structure est étudiée à l'aide de la méthode de sous–structuration classique avec interfaces de type CRAIG_BAMPTON. La base modale utilisée pour chaque sous–structure est composée de 25 modes propres et des modes contraints associés aux interfaces.
Cas 2 : Plaque libre
La structure est étudiée à l'aide de la méthode de sous–structuration cyclique avec interfaces de type CRAIG_BAMPTON HARMONIQUE et prise en compte de la spécificité du noeud de l'axe (point G). La base modale utilisée pour le secteur de base est composée de 25 modes propres et des modes harmoniques associés aux interfaces.

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 121
Nombre de mailles et types : 200 TRIA3

5.3 Grandeurs testées et résultats

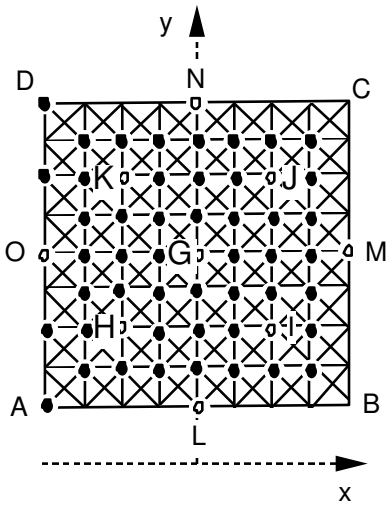
Ordre du mode propre i	Fréquence (Hz) Référence	*Aster*	% différence	Tolérance
	1° : Plaque encastrée sur un côté			
1	8.7266	8.6419	–0.97	
2	21.3042	21.2253	–0.37	
3	53.5542	52.9693	–1.09	$1.25\ 10^{-2}$
4	68.2984	67.5444	–1.10	
5	77.7448	77.3966	–0.45	
6	136.0471	134.5785	–1.08	
	2° : Plaque libre			
7	33.7119	33.6808	–0.09	
8	49.4558	48.9785	–0.96	
9	61.0513	60.6739	–0.62	$1.\ 10^{-2}$
10	87.5160	87.0662	–0.51	
11	87.5160	87.0662	–0.51	

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

DKT + sous–structuration de GUYAN



Conditions limites : Plaque libre

Condensation des matrices de masse et rigidité sur les noeuds :

$(A, B, C, D, G, H, I, J, K, L, M, N, O)$.

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 145

Nombre de mailles et types : 256 TRIA3

6.3 Grandeurs testées et résultats

Ordre du mode propre i	Fréquence (Hz) Référence	*Aster*	% différence	Tolérance
	2° : Plaque libre			
7	33.7119	33.8758	–0.48	
8	49.4558	49.5240	–0.14	1.1 10^{-2}
9	61.0513	61.6240	–0.94	

6.4 Remarques

On cherche à calculer les 3 premières fréquences propres non nulles du problème de la plaque libre sur ses bords.

Si on condense les matrices sur les seuls nœuds :

$(A, B, C, D, G, H, I, J, K)$

La précision des fréquences n'est alors que de 2% .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour obtenir les résultats voulus avec la précision attendue (1%), il faut ajouter les points (L, M, N, O) .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

- Modélisations A et B :

Précision sur les fréquences propres $\leq 1\%$ jusqu'au sixième mode de flexion.

- Modélisation C :

En sous–structuration, la qualité des résultats pourrait être améliorée par l'utilisation d'un maillage de sous–structure plus fin.

- Modélisation D :

Pour obtenir une précision de 1% sur les fréquences propres, il est nécessaire de condenser aussi sur les 4 nœuds milieux des bords L , M , N et O .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)