SDLL401 - Poutre droite inclinée à 20°, soumise à des efforts sinusoïdaux

Résumé :

Ce test est issu de la validation indépendante de la version 4 des modèles de poutres.

Il permet de vérifier les efforts internes sur une poutre inclinée, pour des chargements sinusoïdaux en fonction du temps (une modélisation avec des éléments POU_D_T, poutre droite de Timoshenko).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

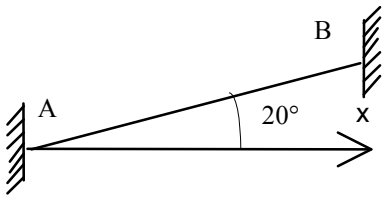


Figure -1.1-a

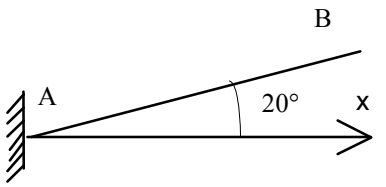


Figure -1.1-b

Poutre droite de longueur $1\,m$.
inclinaison $20\,°$ par rapport à x (sens trigonométrique).

Caractéristiques de la section :

$S=\pi\times 0.01^2\,m^2$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young	$E=2.10^{11}\,Pa$
Coefficient de Poisson	$\nu=0,3$
Masse volumique	$\rho=7800\,kg/m^3$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.3 Conditions aux limites et chargement

Condition aux limites :

- Pour le chargement réparti [Figure -1.1-a]
  Nœuds A et B encastrés : $DX , DY , DZ , DRX , DRY , DRZ$ bloqués
- Pour le chargement ponctuel [Figure -1.1-b]
  Nœud A encastré : $DX , DY , DZ , DRX , DRY , DRZ$ bloqués

Chargements :

- $f(t)=1000\times\cos(t)$ suivant la direction AB
  soit réparti soit appliqué à l'extrémité B
- $M_T(t)=1000\times\cos(t)$ appliqué à l'extrémité B

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solutions de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour les solutions de référence

2.1.1 Chargement réparti de traction-compression

Une poutre droite de longueur L travaillant uniquement en traction-compression est soumise à un chargement réparti constant suivant x mais variant de façon sinusoïdale en fonction du temps. Elle est encastrée à ses deux extrémités.

$$\begin{cases} \rho S \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t) \\ u(0)=0, \;\; u(L)=0 \end{cases}$$

Pour résoudre, on applique à l'équation la transformée de Fourier en temps :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{E} 4\pi^2 \omega^2 \hat{u} + \frac{1}{ES} \hat{f}(\omega)$$

$\hat{u}$: transformée de Fourier de u ,
$\hat{f}$: transformée de Fourier de f.

Ainsi, nous avons pour $f(t) = F \cos(2\pi \omega_0 t)$:

$$u(x,t) = \frac{a^2 F}{ES\, 4\pi^2 \omega_o^2} \left(\cos\left(\frac{2\pi\omega_o}{a} L\right) - 1 \right) \frac{\sin\left(\frac{2\pi\omega_o}{a} x\right)}{\sin\left(\frac{2\pi\omega_o}{a} L\right)} - \left(\cos\left(\frac{2\pi\omega_o}{a} x\right) - 1 \right) \cos\left(2\pi\omega_o t\right).$$

avec : $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$.

L'utilisation de la loi de comportement nous donne l'effort de traction compression :

$$N(x,t) = \frac{a F}{2\pi\omega_0} \left\{ \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi\omega_0}{a} L\right) \right] \frac{\cos\left(\frac{2\pi\omega_0}{a} x\right)}{\sin\left(\frac{2\pi\omega_0}{a} L\right)} - \sin\left(\frac{2\pi\omega_0}{a} x\right) \right\} \cos\left(2\pi\omega_0 t\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.1.2 Chargements ponctuels

Une poutre console de longueur L travaillant uniquement en traction compression (ou en torsion) est soumise à une force sinusoïdale en temps, (ou un moment) appliquée à son extrémité libre.

2.1.2.1 Traction

$$\begin{cases} \rho S \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{ES} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(\text{L}) = \dfrac{1}{\text{ES}} \ \text{f(t)}. \end{cases}$$

La technique de résolution est équivalente à celle du paragraphe [§2.1.1.1].

Pour $f(t) = F\cos(2\pi\omega_0 t)$, nous avons :

$$u(\text{x},\ \text{t}) = \frac{\text{a F}}{\text{ES}2\pi\omega_\text{o}} \ \frac{\sin\left(\dfrac{2\pi\omega_\text{o}}{\text{a}}\ \text{x}\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi\omega_\text{o}}{\text{a}}\ \text{L}\right)} \ \cos(2\pi\omega_o\ \text{t})$$

avec $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$

et $N(\text{x},\ \text{t}) = F \ \dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi\omega_\text{o}}{\text{a}}\ \text{x}\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi\omega_\text{o}}{\text{a}}\ \text{L}\right)} \ \cos(2\pi\omega_o\ \text{t})$

2.1.2.2 Torsion

$$\begin{cases} G\, I_p \dfrac{\partial^2 \theta x}{\partial x^2} - I_{\theta_x} \dfrac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = f(t) \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$I_p = \frac{\pi\ 0{,}01^4}{2} m^4, \qquad \theta_x(x,t) = \frac{b\,F}{G\,I_p\ 2\pi\omega_0} \frac{\sin\dfrac{2\pi\omega_0}{b}x}{\cos\dfrac{2\pi\omega_0}{b}L}\cos(2\pi\omega_0 t)$$

$$I_{\theta_x} = \rho\ I_p \qquad M_T(x,t) = F\frac{\cos\left(\dfrac{2\pi\omega_0}{b}x\right)}{\cos\left(\dfrac{2\pi\omega_0}{b}L\right)}\cos(2\pi\omega_0 t)$$

avec $b = \dfrac{G}{\rho}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Résultats de référence

Les efforts intérieurs (N et MT)

2.3 Incertitude sur la solution

Solution analytique.

2.4 Références bibliographiques

1) Rapport n° 2314/A de l'Institut Aérotechnique « Proposition et réalisation de nouveaux cas tests manquant à la validation des poutres ASTER »

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Le modèle est composé de 2 éléments poutre droite de Timoshenko.

3.2 Caractéristiques du maillage

2 éléments POU_D_T

3.3 Grandeurs testées et résultats

3.3.1 Charge répartie en traction

		Résultats analytiques	Tolérance
Effort normal pour $x=0$	$t=1/3\,s$	472,478 N	1E-3 %
	$t=2/3\,s$	392,944 N	1E-3 %
Effort normal pour $x=L/2$	$t=1/3\,s$	0 N	1E-6 N (*)
	$t=2/3\,s$	0 N	1E-6 N (*)

(*) Écart absolu

3.3.2 Charge ponctuelle

3.3.2.1 Chargement en traction

Effort normal pour $x=0$

	Résultats analytiques	Tolérance
$t=1/3\,s$	944,957 N	1E-3 %
$t=2/3\,s$	785,887 N	1E-3 %

3.3.2.2 Chargement en torsion

Moment de torsion pour $x=0$

	Résultats analytiques	*Tolérance*
$t=1/3\,s$	944,957 N.m	1E-3 %
$t=2/3\,s$	785,887 N.m	1E-3 %

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

On constate que la poutre est très raide sur ses modes de traction-compression :

$$f_{0\,traction/compression}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{(a)}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{(\frac{E}{\rho})}=806\ Hz$$

En comparaison, la fréquence des efforts de traction-compression à $\frac{1}{2\pi}Hz$ peuvent être considérés comme quasi-statiques. C'est ce qui est fait dans la modélisation B : on compare les résultats d'un calcul avec l'opérateur de statique linéaire de Code_Aster avec les résultats de la modélisation A sur le cas de la force répartie.

La modélisation éléments finis étant identique à celle de la modélisation A, les résultats attendus sont les mêmes :

Charge répartie en traction

		Résultats analytiques	Tolérance
Effort normal pour $x=0$	$t=1/3\ s$	472,478 N	1E-3 %
	$t=2/3\ s$	392,944 N	1E-3 %
Effort normal pour $x=L/2$	$t=1/3\ s$	0 N	1E-6 N (*)
	$t=2/3\ s$	0 N	1E-6 N (*)

(*) Écart absolu

5 Synthèse des résultats

Ce test permet de vérifier que les efforts internes des éléments de poutre en dynamique sont corrects. Les résultats montrent un très bon accord avec la solution analytique, pour un maillage composé seulement de deux éléments POU_D_T.

On montre aussi que pour un système très raide par rapport à la fréquence de la sollicitation, un calcul quasi-statique donne d'aussi bons résultats que le calcul dynamique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)