SDLL311 - Réponse dynamique transitoire d'une poutre en traction sous déplacement imposé

Résumé :

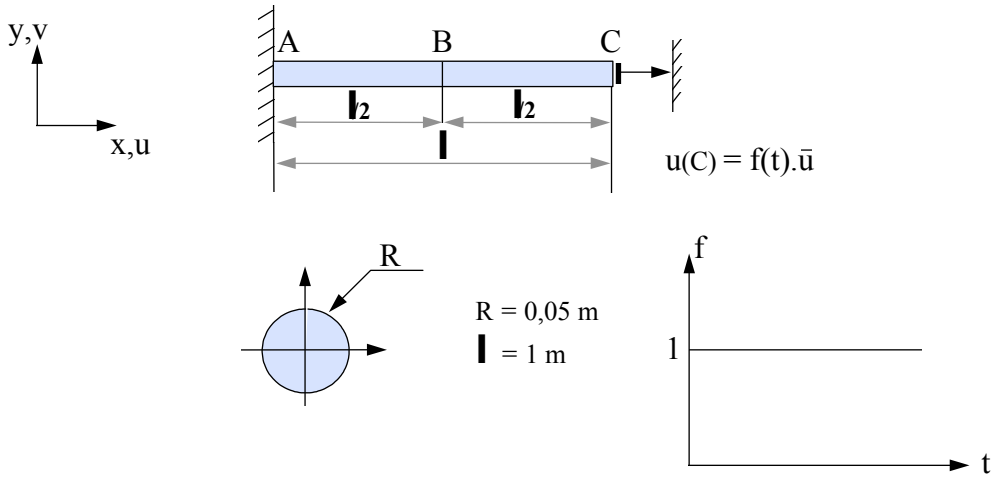
Ce problème-test correspond à une analyse transitoire linéaire d'une barre sollicitée en traction par application d'un déplacement imposé à une extrémité, l'autre extrémité étant encastrée. Le déplacement fonction du temps est de type « Heaviside » imposé à partir de l'instant initial.

Les résultats obtenus au milieu de la poutre pour une modélisation à quatre éléments sont comparés à la solution analytique du problème discrétisé par quatre éléments en ne prenant pas en compte les pics instantanés de vitesse et d'accélération à l'instant initial au niveau de l'extrémité où le déplacement est imposé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie



1.2 Propriétés de matériaux

$E = 98696{,}044\ MPa$

$\nu = 0$

$\rho = 3.10^{6}\ kg/m^{3}$

Amortissement proportionnel de Rayleigh : $\boldsymbol{C} = \lambda \boldsymbol{K} + \mu \boldsymbol{M}$, $\lambda = 5.10^{-4}$, $\mu = 5$

1.3 Conditions aux limites et chargements

Déplacement imposé à l'extrémité C : $u(C) = \bar{u} f(t)$ avec $\bar{u} = 10^{-3} m$ et $f(t)$ évolution en fonction du temps de type Heaviside : $f(t) = 1$, $t \geq 0$.

Extrémité A encastrée.

1.4 Conditions initiales

Déplacement initial nul en tout point.

Vitesse initiale nulle en tout point.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le problème discrétisé vérifie :

$$\left[\begin{array}{c|c} M_{ll} & M_{ld} \\ \hline M_{ld}^T & M_{dd} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \ddot{u}_l \\ \ddot{u}_d \end{array}\right\}+\left[\begin{array}{c|c} C_{ll} & C_{ld} \\ \hline C_{ld}^T & C_{dd} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \dot{u}_l \\ \dot{u}_d \end{array}\right\}+\left[\begin{array}{c|c} K_{ll} & K_{ld} \\ \hline K_{ld}^T & K_{dd} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} u_l \\ u_d \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 0 \\ \hline F_d \end{array}\right\},$$

avec indice l : degré de liberté libre
indice d : degré de liberté imposé

$F_d(t)$ chargements extérieurs appliqués aux nœuds extrémités et conduisant aux déplacements imposés u_d sont inconnus, on élimine donc ces équations et on obtient :

$$\left[M_{ll}\right]\left\{\ddot{u}_l\right\}+\left[C_{ll}\right]\left\{\dot{u}_l\right\}+\left[K_{ll}\right]\left\{u_l\right\}=-\left[M_{ld}\right]\left\{\ddot{u}_d\right\}-\left[C_{ld}\right]\left\{\dot{u}_d\right\}-\left[K_{ld}\right]\left\{u_d\right\}\ .$$

Les seuls termes non nuls du second membre de ce système sont liés aux variables cinématiques relatives au nœud extrémité où le déplacement est imposé. Or, à $t=0$, $\ddot{u}_{dC}$ et $\dot{u}_{dC}$ ne sont pas définies mais à $t=0^-$ et $t=0^+$, $\ddot{u}_{dC}$ et $\dot{u}_{dC}$ sont nulles. Toute la complexité du problème vient de cela.

Pour obtenir une solution de référence, nous avons considéré $\ddot{u}_{dC}$ et $\dot{u}_{dC}$ uniformément nulles ce qui revient à ne considérer que les forces internes élastiques à l'extrémité C. Ceci est discutable d'un point de vue physique mais, en adoptant les mêmes hypothèses lors de la modélisation du problème, la validation de *Code_Aster* peut être menée à bien.

On calcule la solution de référence en traitant le problème suivant :

$$[M_{ll}]\{\ddot{u}_l\}+[C_{ll}]\{\dot{u}_l\}+[K_{ll}]\{u_l\}=-[K_{ld}]\{u_d(t)\} \text{ avec } \{u_l(0)\}=0 \text{ et } \{\dot{u}_l(0)\}=0\ .$$

Pour ce faire, on transporte le problème dans la base modale du système qui vérifie :

$$[M_{ll}]\{\ddot{u}_l\}+[K_{ll}]\{u_l\}=0\ .$$

L'amortissement étant diagonal, on obtient le système diagonal :

$$\left[m_g\right]\left\{\ddot{X}\right\}+\left[c_g\right]\left\{\dot{X}\right\}+\left[k_g\right]\left\{X\right\}=\left\{g(t)\right\} \text{ où } \left\{g(t)\right\}=\left\{g\right\} \text{ pour } t\geq 0\ ,$$

$$\text{avec } \{X(0)\}=0 \text{ et } \{\dot{X}(0)\}=0\ .$$

Dans l'espace modal, on résout donc trois équations (3 degrés de liberté libres) différentielles du second ordre puis on revient dans l'espace physique. On obtient alors le déplacement du point milieu :

$$u_B(t)=\sum_{i+1}^{3} e^{-\lambda_i t}\left(a_i\cos(\tilde{\omega}_i t)+b_i\sin(\tilde{\omega}_i t)\right),$$

avec $\tilde{\omega}_i$: i ème pseudo-pulsation propre du système amorti.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Résultats de référence

Déplacement, vitesse et accélération du point milieu B de la poutre.

2.3 Incertitude sur la solution

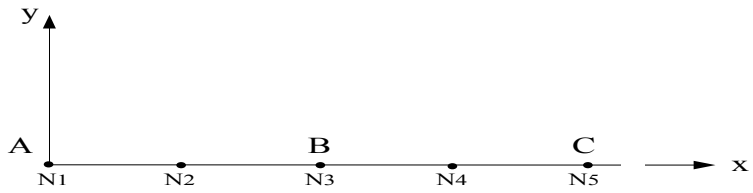
Solution analytique du problème discrétisé en quatre éléments de longueur égale en considérant vitesse et accélération uniformément nulles au point C où le déplacement est imposé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation en élément de poutre 3D : POU_D_T



Découpage :
AC = 4 mailles SEG2 de longueur égale

Conditions limites :

- Nœud $N1(A)$ encastré
  DDL_IMPO $DX=DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$
- Nœud $N5(C)$ en déplacement imposé suivant x
  DDL_IMPO $DY=DZ=DRX=DRY=DRZ=0$ $DX(t)=\bar{u}$

Résolution :
Algorithme d'intégration directe de Newmark
Pas de temps : $\Delta t=10^{-5}\,s$
Durée d'observation : $0{,}03\,s$

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœud s : 5
Nombre de mailles et type : 4 mailles SEG2

3.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement au point milieu B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)
0,0054	87,376 e–3
0,0055	87,360 e–3
0,0108	26,818 e–3
0,0109	26,800 e–3
0,0163	64,386 e–3
0,0164	64,366 e–3
0,0217	41,083 e–3
0,0218	41,084 e–3
0,0271	55,525 e–3
0,0272	55,530 e–3

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

idem que la modélisation A

4.2 Caractéristiques du maillage

idem que la modélisation A

4.3 Grandeurs testées et résultats

- Déplacement au point milieu B

Temps (s)	Déplacement Référence (m)
0,0054	87,376 e–3
0,0055	87,360 e–3
0,0108	26,818 e–3
0,0109	26,800 e–3
0,0163	64,386 e–3
0,0164	64,366 e–3
0,0217	41,083 e–3
0,0218	41,084 e–3
0,0271	55,525 e–3
0,0272	55,530 e–3

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats

Les résultats donnés par *Code_Aster* sont en parfait accord avec les résultats du modèle analytique, que le déplacement en bout poutre soit imposé par un VECTEUR ASSEMBLE ou par une CHARGE.

Attention : les questions de Dirichlet pour le calcul transitoire sur base physique avec DYNA_VIBRA ne sont compatibles qu'avec la méthode d'intégration de NEWMARK.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)