SDLL153 - Modes propres d'un tuyau élastique mince sous différentes conditions aux limites

Résumé :

Ce test représente un calcul des modes propres d'un tuyau cylindrique mince élastique sous différentes conditions aux limites.

Il permet de valider la modélisation éléments finis :

- COQUE_3D avec les mailles TRIA7 et QUAD9.
- DKT avec les mailles TRIA3 et QUAD4.

Les modes propres obtenus sont comparés à une solution de référence numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

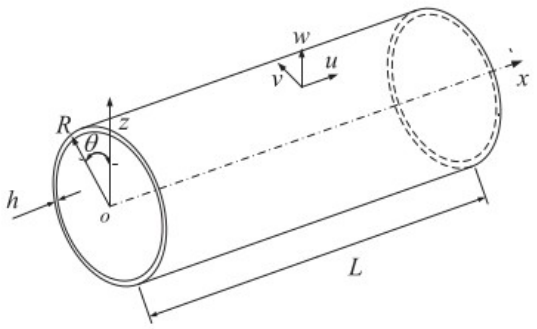


Fig. 1. Schéma de la géométrie du tuyau

Rayon moyen : $R=0.050\,m$
Épaisseur de tuyau : $h=0.0025\,m$
Longueur : $L=1\,m$

Les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{z}$ représentent les directions axiale, circonférentielle et radiale du tuyau.
Les déplacements dans les directions $\vec{x}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{z}$ sont notés par u , v et w .

1.2 Propriétés du matériau

Les propriétés du matériau constituant le tuyau sont :

$E=2.10^{11}\,Pa$	Module d'Young
$\mu=0.3$	Coefficient de poisson
$\rho=7800\,kg/m^3$	Densité volumique

1.3 Conditions aux limites et chargements

On calcul les modes propres sous cinq différentes conditions aux limites :

- FF : les deux extrémités du tuyau sont libres ;
- SF : une extrémité est libre et l'autre est en appui simple ;
- SS : les deux extrémités sont en appui simple ;
- CS : une extrémité en appui simple et l'autre encastrée ;
- CC : les deux extrémités soont encastrées.

où F, S et C représentent *simply-supported* , *clamped* et *free* en anglais.

Sans chargement.

1.4 Conditions initiales

Sans objet

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul et résultats de référence

Pour les vibrations libres d'un tuyau cylindrique mince, la solution de référence retenue est celle obtenue en [bib1] par Haar wavelet discretization method (HWDM). La théorie des coques de Goldenveizer-Novozhilov est adaptée pour formuler ce problème. Théoriquement la solution se compose de termes infinis en séries de Haar wavelet. Cependant, des termes finis sont pratiquement considérés dans le calcul actuel et la convergence des résultats est montré en [bib7] avec J=7 (niveau maximal de résolution).

Pour le cas décrit dans le paragraphe précédent., les fréquences de référence pour des modes propres sont données en [bib1] via un paramètre de fréquence, λ , comme suivants (m et n sont les nombres d'ondes dans les directions axiale et circonférentielle, résultats numériques sont notés dans les colonnes HWDM) :

Table 3
Comparison of frequency parameters for a cylindrical shell with different boundary conditions ($m=1$, $\mu=0.3$, $R/L=0.05$, and $h/R=0.05$).

n	S–S			C–C		
	HWDM	Ref. [38]	Ref. [5]	HWDM	Ref. [38]	Ref. [5]
1	0.016105	0.016102	0.016102	0.033117	0.032860	0.032853
2	0.039271	0.039271	0.039271	0.040674	0.040643	0.040638
3	0.109812	0.109811	0.109811	0.109981	0.115905	0.109973
4	0.210277	0.210277	0.210277	0.210334	0.210331	0.210324
5	0.339877	0.339877	0.339877	0.339905	0.339903	0.339887
6	0.498444	0.498443	0.498443	0.498460	0.498459	0.498430
7	0.685919	0.685919	0.685919	0.685931	0.685930	0.685887
8	0.902278	0.902278	0.902278	0.902287	0.902286	0.902230

Table 4
Comparison of frequency parameters for a cylindrical shell with different boundary conditions ($m=1$, $\mu=0.3$, $R/L=0.05$, and $h/R=0.05$).

n	F–F		S–F		C–S	
	HWDM	Ref. [38]	HWDM	Ref. [38]	HWDM	Ref. [38]
1	0.035442	0.035662	0.024606	0.024813	0.023185	0.023934
2	0.038719	0.039149	0.038902	0.039157	0.039719	0.039779
3	0.109507	0.109811	0.109597	0.109811	0.109872	0.109881
4	0.209964	0.210280	0.210050	0.210286	0.210297	0.210302
5	0.339551	0.339880	0.339638	0.339878	0.339885	0.339888
6	0.498110	0.498446	0.498197	0.498436	0.498446	0.498448

Fig. 2. Résultats de référence dans [bib1]

Ce paramètre de fréquence λ est défini par :

$$\lambda=\omega R\sqrt{\rho(1-\mu^2)/E}$$

où ω est la fréquence propre (unité : rad/s).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par conséquent, on peut obtenir un tableau de fréquence en Hz ($f = 2\pi\omega$) avec la géométrie et les propriétés de matériaux pour notre cas :

Tab. 1. Fréquences des modes propres de référence d'après [bib1]

m=1	FF (Hz)	SF (Hz)	SS (Hz)	CS (Hz)	CC (Hz)
n=1	598,846	415,756	272,118	391,746	559,562
n=2	654,216	657,308	663,543	671,113	687,249
n=3	1850,287	1851,807	1855,440	1856,454	1858,296
n=4	3547,660	3549,113	3552,948	3553,286	3553,911
n=5	5737,228	5738,698	5742,737	5742,872	5743,210
n=6	8416,323	8417,793	8421,966	8422,000	8422,237

Pour compléter les solutions analytiques de ce problème, on cite [bib2] qui compare une dizaine de théories de coque. Il met également en évidence les formes des modes propres en fonction des valeurs m et n (Fig. 3). Pour le cas de la condition limite SS, on trouve une cohérence des résultats (λ) lors de n =1,2,3 et m =1 (marqué en tache noire sur la courbe 2 dans Fig. 4, l/mR =20 correspondant à notre cas).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

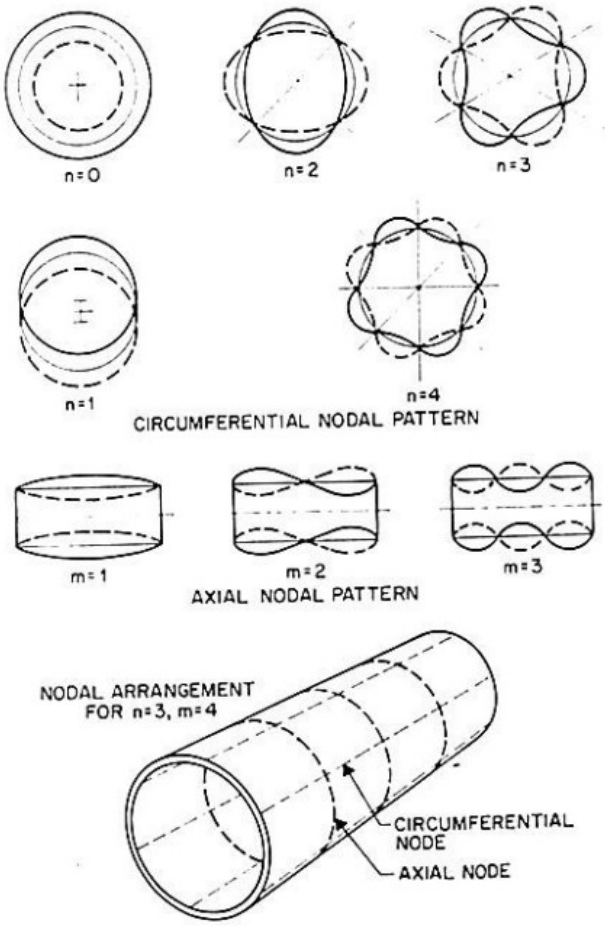


FIGURE 2.2.—Nodal patterns for circular cylindrical shells supported at both ends by shear diaphragms. (After ref. 2.35)

Fig. 3. Schéma des modes propres en fonction de m et n dans [bib2]

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

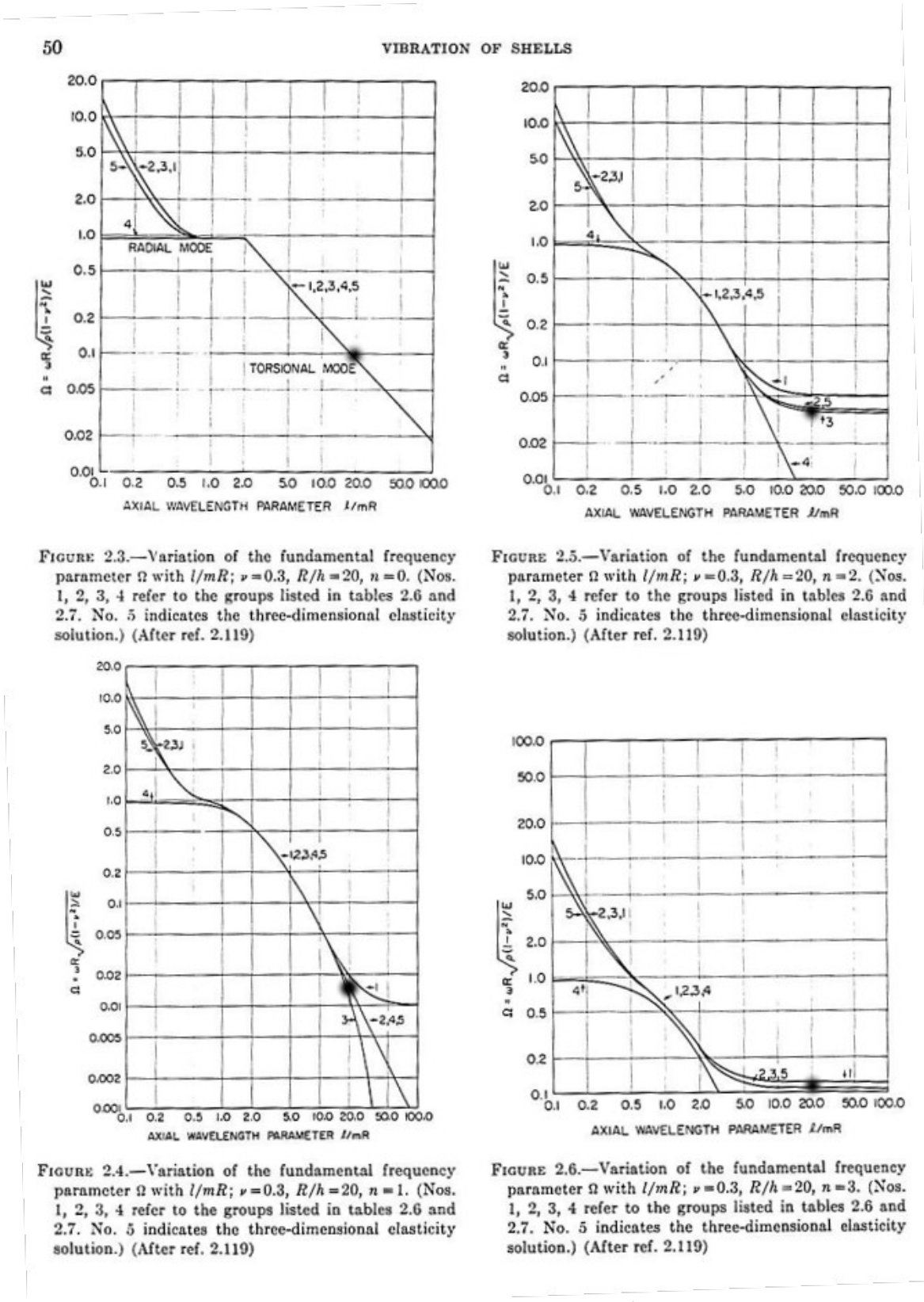


FIGURE 2.3.—Variation of the fundamental frequency parameter Ω with l/mR; $\nu=0.3$, $R/h=20$, $n=0$. (Nos. 1, 2, 3, 4 refer to the groups listed in tables 2.6 and 2.7. No. 5 indicates the three-dimensional elasticity solution.) (After ref. 2.119)

FIGURE 2.5.—Variation of the fundamental frequency parameter Ω with l/mR; $\nu=0.3$, $R/h=20$, $n=2$. (Nos. 1, 2, 3, 4 refer to the groups listed in tables 2.6 and 2.7. No. 5 indicates the three-dimensional elasticity solution.) (After ref. 2.119)

FIGURE 2.4.—Variation of the fundamental frequency parameter Ω with l/mR; $\nu=0.3$, $R/h=20$, $n=1$. (Nos. 1, 2, 3, 4 refer to the groups listed in tables 2.6 and 2.7. No. 5 indicates the three-dimensional elasticity solution.) (After ref. 2.119)

FIGURE 2.6.—Variation of the fundamental frequency parameter Ω with l/mR; $\nu=0.3$, $R/h=20$, $n=3$. (Nos. 1, 2, 3, 4 refer to the groups listed in tables 2.6 and 2.7. No. 5 indicates the three-dimensional elasticity solution.) (After ref. 2.119)

Fig. 4. Comparaison de l'évolution λ de en fonction de l/mR entre différentes théories des coques pour le cas SS dans [bib2] : courbe 2 pour la théorie de Goldenveizer-Novozhilov

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Références bibliographiques

1) X. XIE, G. JIN, Z. LIU : Free vibration analysis of cylindrical shells using the haar wavelet method, International Journal of Mechanical Sciences 77 (2013) 47-56.
2) W. LEISSA : Vibration of shells. Ohio State University, 1973.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKT (QUAD4)

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 3030
Nombre de mailles et types : 3000 QUAD4
(Le cercle est coupé en 30 segments)

3.3 Grandeurs testées et résultats

Tab . 2 . Résultats de la modélisation A

m=1	FF			SF			SS		
	Aster	**Ref**	**% diff**	**Aster**	**Ref**	**% diff**	**Aster**	**Ref**	**% diff**
n=2	657,335	654,216	0,48	657,938	657,308	0,10	667,023	663,543	0,52
n=3	1858,85	1850,29	0,46	1859,73	1851,81	0,43	1865,40	1855,44	0,54
n=4	3564,70	3547,66	0,48	3565,61	3549,113	0,46	3572,44	3552,95	0,55
n=5	5767,42	5737,23	0,53	5768,30	5738,70	0,52	5775,67	5742,74	0,57
n=6	8466,42	8416,32	0,60	8467,30	8417,79	0,59	8474,04	8421,97	0,62

m=1	SC			CC		
	Aster	**Ref**	**% diff**	**Aster**	**Ref**	**% diff**
n=2	675,59	671,113	0,67	690,073	687,249	0,41
n=3	1866,57	1856,45	0,54	1868,14	1858,30	0,53
n=4	3572,85	3553,29	0,55	3573,32	3553,91	0,55
n=5	5775,87	5742,87	0,57	5776,09	5743,21	0,57
n=6	8474,16	8422,00	0,62	8474,27	8422,24	0,62

3.4 Remarques

On n'a pas trouvé le mode propre pour $n=1$ et $m=1$.

Grâce à la symétrie de la structure du tuyau, on observe que les modes propres de $n=2-6$ et $m=1$ apparaissent toujours en couple.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation COQUE_3D (QUAD9)

4.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 5400
Nombre de mailles et types : 1340 QUAD9
(Le cercle est coupé en 20 segments)

4.3 Grandeurs testées et résultats

Tab . 3 . Résultats de la modélisation B

m=1	FF			SF			SS		
	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff
n=2	660,729	654,216	1,00	661,256	657,308	0,6	670,323	663,543	1,02
n=3	1865,28	1850,29	0,81	1866,01	1851,81	0,77	1872,62	1855,44	0,93
n=4	3573,33	3547,66	0,72	3573,86	3549,113	0,70	3584,50	3552,95	0,89
n=5	5786,88	5737,23	0,87	5787,12	5738,70	0,84	5804,33	5742,74	1,07
n=6	8562,17	8416,32	1,73	8532,92	8417,79	1,37	8558,68	8421,97	1,62

m=1	SC			CC		
	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff
n=2	678,72	671,113	1,13	692,930	687,249	0,83
n=3	1873,76	1856,45	0,93	1875,31	1858,30	0,92
n=4	3584,91	3553,29	0,89	3585,38	3553,91	0,89
n=5	5804,53	5742,87	1,07	5804,76	5743,21	1,07
n=6	8558,81	8422,00	1,62	8558,95	8422,24	1,62

4.4 Remarques

On n'a pas trouvé le mode propre pour $n=1$ et $m=1$.

Grâce à la symétrie de la structure du tuyau, on observe que les modes propres de $n=2-6$ et $m=1$ apparaissent toujours en couple.

En comparant avec la modélisation A, on observe des résultats moins précis en COQUE_3D (maillage avec 3030 nœuds, 30 points sur le cercle) que ceux en DKT (maillage avec 5400 nœuds, 40 points sur le cercle).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Modélisation C

5.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation DKT (TRIA3)

5.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 6030
Nombre de mailles et types : 12000 TRIA3
(Le cercle est coupé en 30 segments)

5.3 Grandeurs testées et résultats

Tab . 4 . Résultats de la modélisation C

m=1	FF			SF			SS		
	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff
n=2	656,432	654,216	0,34	657,048	657,308	0,04	666,260	663,543	0,41
n=3	1853,03	1850,29	0,15	1853,95	1851,81	0,12	1860,07	1855,44	0,25
n=4	3544,79	3547,66	0,08	3545,74	3549,113	0,10	3553,92	3552,95	0,03
n=5	5717,42	5737,23	0,35	5718,28	5738,70	0,36	5728,62	5742,74	0,25
n=6	8362,13	8416,32	0,64	8362,94	8417,79	0,65	8374,69	8421,97	0,56

m=1	SC			CC		
	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff
n=2	674,87	671,113	0,56	689,418	687,249	0,32
n=3	1861,27	1856,45	0,26	1862,87	1858,30	0,25
n=4	3554,36	3553,29	0,03	3554,85	3553,91	0,03
n=5	5728,83	5742,87	0,24	5729,07	5743,21	0,25
n=6	8374,82	8422,00	0,56	8374,96	8422,24	0,56

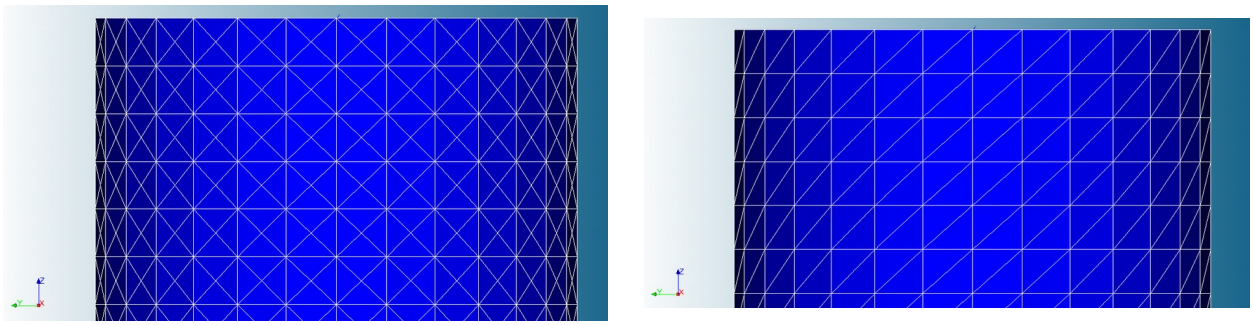
5.4 Remarques

On n'a pas trouvé le mode propre pour $n=1$ et $m=1$.

Grâce à la symétrie de la structure du tuyau, on observe que les modes propres de $n=2-6$ et $m=1$ apparaissent toujours en couple.

Attention : lors de l'utilisation des maillages en triangles, les résultats sont très sensibles à la qualité de maillage. Par exemple, lors de l'utilisation du maillage dans la Fig. 5(b), on observe toujours une torsion dans les modes propres et également une différence de fréquence entre les couples des modes symétries.
Bien que cette erreur diminue avec un maillage plus fin, on recommande des maillages avec des éléments bien répartis dans la structure, comme dans Fig. 5(a).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



(a) (b)

Fig. 5. Exemples des maillages en triangle

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Modélisation D

6.1 Caractéristiques de la modélisation

Modélisation COQUE_3D (TRIA7)

6.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 16120
Nombre de mailles et types : 5360 TRIA7
(Le cercle est coupé en 20 segments)

6.3 Grandeurs testées et résultats

Tab . 5 . Résultats de la modélisation D

m=1	FF			SF			SS		
	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff
n=2	663,440	654,216	1,41	663,950	657,308	1,01	672,797	663,543	1,39
n=3	1881,30	1850,29	1,68	1882,05	1851,81	1,63	1888,12	1855,44	1,76
n=4	3621,85	3547,66	2,09	3622,55	3549,113	2,07	3631,32	3552,95	2,21
n=5	5889,97	5737,23	2,66	5890,50	5738,70	2,65	5902,73	5742,74	2,79
n=6	8701,24	8416,32	3,39	8701,61	8417,79	3,37	8717,54	8421,97	3,51

m=1	SC			CC		
	Aster	Ref	% diff	Aster	Ref	% diff
n=2	681,14	671,113	1,49	695,289	687,249	1,17
n=3	1889,25	1856,45	1,77	1890,77	1858,30	1,75
n=4	3631,73	3553,29	2,21	3632,19	3553,91	2,20
n=5	5902,93	5742,87	2,79	5903,15	5743,21	2,78
n=6	8717,66	8422,00	3,51	8717,79	8422,24	3,51

6.4 Remarques

On n'a pas trouvé le mode propre pour $n=1$ et $m=1$.

Grâce à la symétrie de la structure du tuyau, on observe que les modes propres de $n=2-6$ et $m=1$ apparaissent toujours en couple.

On observe le même comportement dans la modélisation B. Les résultats en COQUE_3D sont moins précis que ceux en DKT bien qu'il y a plus de points dans le maillage.

On constate la même sensibilité des résultats à la qualité du maillage avec des triangles.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Synthèse des résultats

En comparant les simulations entre COQUE_3D et DKT, on constate que DKT donne des résultats plus précis que COQUE_3D.

Que ce soit avec COQUE_3D ou DKT, on observe dans ce cas test que les résultats sont très sensibles à la qualité du maillage en triangle (TRIA3/7)

Remarque :
On ne trouve toujours pas le premier mode (n =1 et m =1) quelles que soient les conditions aux limites.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)