SDLL06 - Réponse transitoire d'un poteau encastré-libre

Résumé

Dans ce cas test, on analyse la réponse transitoire d'une poutre encastrée-libre non amortie, modélisée par un système masse - ressort et soumise à un chargement dynamique quelconque.

On teste l'élément discret en flexion, le calcul des modes propres par la méthode de Lanczos et le calcul de la réponse transitoire par recombinaison modale de la structure soumise soit à un accélérogramme (modélisation A) soit à une force imposée équivalente (modélisation B).

Le schéma d'Euler est utilisé.

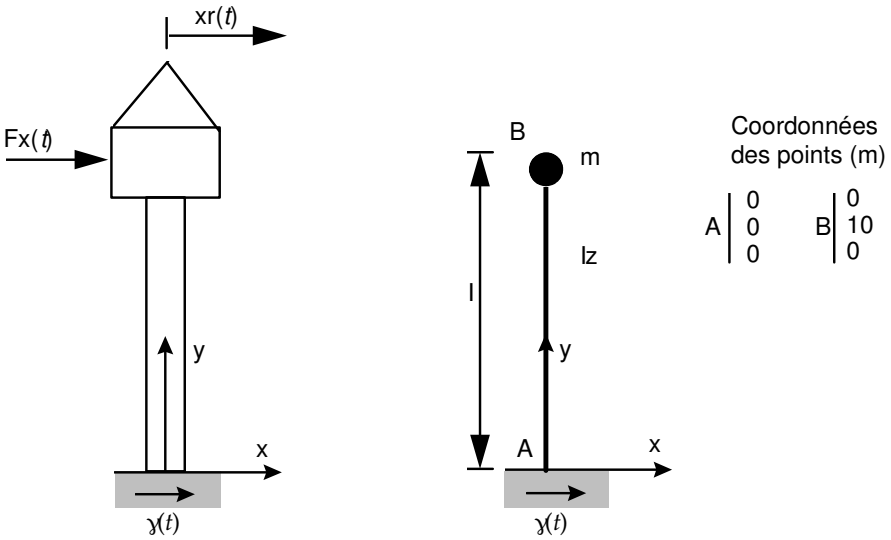
Les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats de référence (résultats analytiques).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

C'est un problème proposé initialement dans la référence [bib1] et repris dans [bib2].



- poutre AB : poutre élancée sans masse de longueur AB , $l=10\ m$ et de moment d'inertie $I_Z=0{,}3285\ m^4$.
- masse ponctuelle en B : $m=43{,}8\,10^3\ kg$

1.2 Propriétés des matériaux

Module d'Young : $E=4.\,10^{10}\ Pa$
Masse volumique : $\rho=0\ kg/m^3$

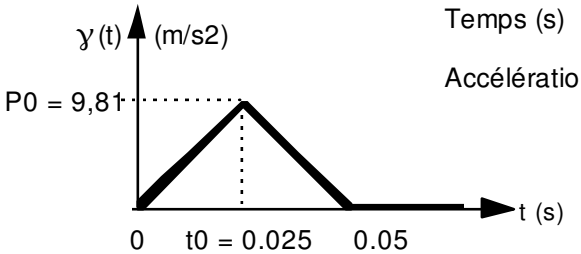
1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites :

Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .
Le point A est encastré : $dx=dy=dz=drx=dry=drz=0$.

Chargements :

- modélisation A : accélération transversale au point A : $\gamma(t)$



Temps (s)	0	0.025	0.05
Accélération suivant x (ms^{-2})	0	9.81	0

- modélisation B : force transversale au point B : $Fx(t)$ avec $Fx(t)=-m.\gamma(t)$

1.4 Conditions initiales

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le système est au repos : à $t=0$, $dx(0)=0$, $dx/dt(0)=0$ en tout point.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

Le problème est traité par un modèle à un degré de liberté. Le poteau est considéré comme une poutre non amortie et non pesante élancée de rigidité $k = 3EI_Z/l^3 = 3{,}942.10^7\ N/m$. La superstructure située au sommet du poteau est modélisée par une masse ponctuelle $m = 43{,}8\,10^3\ kg$.

Les deux cas de charge conduisent au calcul de la réponse d'un système à un degré de liberté soumis à une accélération $\gamma(t)$ de forme quelconque :

$\ddot{x}_r + \omega^2 x_r = -\gamma(t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EI_z}{ml^3}}$ la fréquence propre du système et x_r le déplacement relatif du point B par rapport au point A . La solution est obtenue par intégration de l'intégrale de Duhamel [bib3] :

$$x_r(t) = -\frac{m}{\omega}\int_0^t \gamma(t)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau$$

2.2 Résultats de référence

Déplacement relatif au point B .

Pour une accélération imposée triangulaire, on peut calculer l'intégrale de Duhamel analytiquement [bib3] :

$$t < t_0 \quad : \quad x_r = -\frac{P_0}{\omega^2 t_0}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$$t_0 < t < 2t_0 \quad : \quad x_r = -\frac{P_0}{\omega^2 t_0}\left(2t_0 - t - \frac{2\sin\omega(t-t_0)}{\omega} - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$$t_0 < t < 2t_0 \quad : \quad x_r = -\frac{P_0}{\omega^3 t_0}\left(2\sin\omega(t-t_0) - \sin\omega(t-2t_0) - \sin\omega t\right)$$

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune si l'on calcule l'intégrale de Duhamel analytiquement [bib3]. De l'ordre de la précision de la méthode d'intégration numérique employée pour calculer l'intégrale de Duhamel ([bib1], [bib2]) : méthode de Simpson avec 40 points par période.

2.4 Références bibliographiques

1) R.W. Clough et J. Penzien : Dynamics of structures New York, Mac Graw-Hill, 1975, p. 102-105

2) Guide VPCS AFNOR Technique - 1990

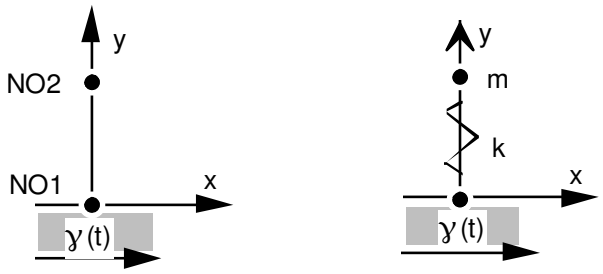
3) J.S. Przemieniecki : Theorie of matrix structural analysis New York, Mac Graw-Hill, 1968, p. 351-357

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 6 degrés de liberté DIS_TR.



Le noeud $NO1$ est soumis à une accélération imposée $\gamma(t)$. On calcule le déplacement relatif du nœud $NO2$ par rapport au déplacement du nœud $NO1$ et on le compare au déplacement calculé analytiquement.
L'intégration temporelle est réalisée avec l'algorithme d'Euler (pas de temps : $5.10^{-4} s$).

3.2 Caractéristiques du maillage

Le maillage est constitué de 2 nœuds et d'un élément discret (DIS_TR).

3.3 Grandeurs testées et résultats

Déplacement relatif du nœud NO1 (en mètres).

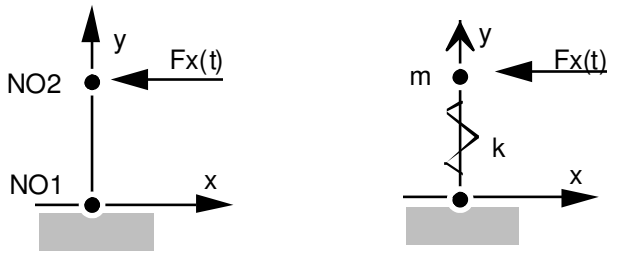
Temps (s)	Calcul analytique	*Code_Aster*	Erreur (%)
0,010	–6,511E–05	–6,495E–05	0
0,015	–2,185E–04	–2,183E–04	0
0,020	–5,139E–04	–5,136E–04	–0,058
0,024	–8,809E–04	–8,806E–04	–0,039
0,026	–1,115E–03	–1,115E–03	–0,041
0,030	–1,679E–03	–1,679E–03	–0,014
0,035	–2,523E–03	–2,523E–03	–0,004
0,040	–3,457E–03	–3,457E–03	0
0,045	–4,412E–03	–4,412E–03	0,004
0,049	–5,143E–03	–5,143E–03	0,005
0,051	–5,485E–03	–5,485E–03	0,005
0,055	–6,109E–03	–6,109E–03	0,005
0,060	–6,765E–03	–6,765E–03	0,005
0,065	–7,269E–03	–7,269E–03	0,005
0,070	–7,610E–03	–7,610E–03	0,005
0,075	–7,779E–03	–7,780E–03	0,005
0,080	–7,774E–03	–7,775E–03	0,004
0,085	–7,595E–03	–7,595E–03	0,004

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Modélisation B

4.1 Caractéristiques de la modélisation

Les éléments sont modélisés par des éléments discrets à 6 degrés de liberté DIS_TR.



Le noeud $NO2$ est soumis à une force imposée $Fx(t)$. On calcule le déplacement relatif du nœud $NO2$ par rapport au déplacement du nœud $NO1$ et on le compare au déplacement calculé dans les références [bib1] et [bib2].
L'intégration temporelle est réalisée avec l'algorithme d'Euler (pas de temps : $10^{-3}s$).

4.2 Caractéristiques du maillage

C'est le même maillage que pour la modélisation A.

4.3 Grandeurs testées et résultats

Déplacement relatif du nœud $NO1$ (en mètres).

Temps (s)	Références [bib1], [bib2]	*Code_Aster*	Erreur (%)
0,01	–6,500E–05	–6,447E–05	–0,82
0,02	–5,130E–04	–5,127E–04	–0,064
0,03	–1,679E–03	–1,678E–03	–0,037
0,04	–3,457E–03	–3,457E–03	0,013
0,05	–5,316E–03	–5,317E–03	0,022
0,06	–6,764E–03	–6,766E–03	0,035
0,07	–7,609E–03	–7,611E–03	0,027
0,08	–7,774E–03	–7,776E–03	0,024
0,09	–7,244E–03	–7,246E–03	0,028
0,1	–6,068E–03	–6,069E–03	0,014
0,12	–2,242E–03	–2,242E–03	–0,017
0,14	2,367E–03	2,369E–03	0,071
0,16	6,149E–03	6,152E–03	0,041
0,18	7,783E–03	7,785E–03	0,029
0,2	6,698E–03	6,699E–03	0,018

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Synthèse des résultats et remarques générales

Le modèle simplifié présenté dans ce cas test permet de valider la méthode de résolution numérique. Pour traiter le problème physique réel, il faudrait prendre en compte les effets d'inertie (masse du poteau, effet d'inertie de rotation autour de B de la superstructure) et de compression du poteau (poids propre).

Pour la modélisation A, l'erreur commise avec un pas de temps de $5.10^{-4}s$ est de l'ordre de $0,01\%$; pour la modélisation B (pas de temps de $10^{-3}s$) elle est de l'ordre de $0,6\%$.

On pourra compléter ce cas test en vérifiant la convergence des résultats pour d'autres valeurs du pas de temps et en comparant les résultats obtenus avec d'autres schémas d'intégration.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)