SDLD24- Système de deux masses-ressorts indépendants sous sollicitation harmonique forcée

Résumé

Ce cas test consiste à calculer la réponse transitoire amortie d'un système encastré-libre de deux masses-ressorts linéaires, soumis à une accélération imposée mono-appui.

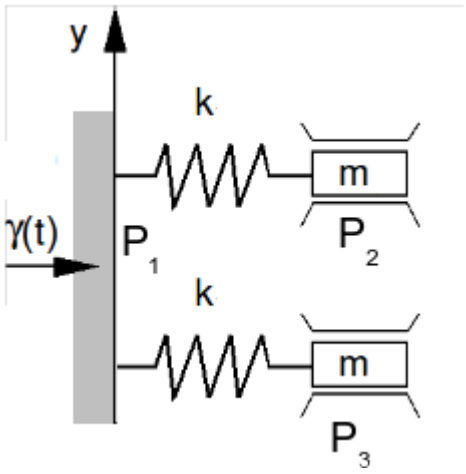
Son objectif est de valider la méthodologie consistant à calculer les modes en bloquant l'une puis l'autre des deux masses. Une base modale unique est créé à partir de ces deux modes. Un calcul dynamique est ensuite réalisé en utilisant un amortissement modal déduit de ces modes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On calcule la réponse d'un système linéaire composé de deux masses et deux ressorts indépendants à une accélération imposée au niveau de leur point d'ancrage P_1 :



On a une distance $P_1P_2 = P_1P_3 = 1\,m$.

1.2 Propriétés des matériaux

- raideurs de liaison : $k_1 = 100\,N/m$;
- masses ponctuelles : $m = m(P_2) = m(P_3) = 100\,kg$.
- amortissement modal de $5\,\%$ pour tous modes

1.3 Conditions aux limites et chargements

Les inconnues de déplacement u, vitesse $\dot{u}$ et accélérations $\ddot{u}$ dont il est question dans ce document sont définies dans le repère relatif au mouvement d'entraînement.

Conditions aux limites

Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .
Dans le repère relatif au déplacement imposé, le point P_1 est encastré : $u_x = u_y = u_z = 0$.

Chargement

Dans le repère global, le point d'ancrage P_1 est soumis à un déplacement imposé harmonique de fréquence f_{ex}. Le calcul est fait de 0 à $20\,s$ dans le repère relatif associé.

1.4 Conditions initiales

Le système est supposé initialement au repos dans le repère relatif : à $t = 0$, $u_x(0) = 0$ et $\dot{u}_x(0) = 0$ en tout point.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

La solution de référence est analytique, et obtenue comme suit.

On notera par la suite $u=u_x$. L'équation dans le repère relatif du mouvement de P_2 s'écrit :
(2-1) $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=-m\ddot{u}_e(t)$

Le chargement est appliqué à l'aide de la commande AFFE_CHAR_SEISME . La fonction multiplicatrice FONC_MULT associée définit l'accélération d'entraînement, comme :
(2-2) $\ddot{u}_e(t)=A_e\sin(\omega_e t)$

Le problème à résoudre s'écrit donc :
(2-3) $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=-mA_e\sin(\omega_e t)$

Soit, en définissant les quantités réduites $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ et $\xi=\frac{c}{2m\omega_0}$:

(2-4) $\ddot{u}+2\omega_0\xi\dot{u}+\omega_0^2u=-A_e\sin(\omega_e t)$
avec les conditions initiales :
(2-5) $u(0)=0$
(2-6) $\dot{u}(0)=0$

On cherche une solution particulière à (2-4) sous la forme :
(2-7) $\tilde{u}(t)=D\sin(\omega_e t+\varphi)$

On pose :
(2-8) $\tilde{U}(t)=De^{i(\omega_e t+\varphi)}$

On a alors $\tilde{u}(t)=\Im(\tilde{U}(t))$ (partie imaginaire).

Soit l'équation différentielle complexe :
(2-9) $\ddot{\tilde{U}}+2\omega_0\xi\dot{\tilde{U}}+\omega_0^2\tilde{U}=-A_e e^{i(\omega_e t)}$

Si $\tilde{U}$ est solution de (2-9), alors est solution de (2-7). En injectant l'expression (2-8) dans (2-9), on trouve :

(2-10) $\left(-\omega_{ex}^2+2i\omega_0\omega_e\xi+\omega_0^2\right)Be^{i\varphi}=-A_e$

d'où l'on peut déterminer les paramètres D et φ de l'expression (2-8) :

(2-11) $D=\left|\frac{A_e}{\omega_0^2-\omega_e^2+2i\omega_0\omega_e\xi}\right|=\frac{A_e}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+\left(2\omega_0\omega_e\xi\right)^2}}$

(2-12) $\varphi=arg\left(-\frac{A_e}{\omega_0^2-\omega_e^2+2i\omega_0\omega_e\xi}\right)=arg\left(\omega_e^2-\omega_0^2+2i\omega_0\omega_e\xi\right)=atan2\left(\frac{2\omega_0\omega_e\xi}{\omega_e^2-\omega_0^2}\right)$

La solution générale du problème s'écrit alors classiquement comme la somme de la solution particulière et de la solution homogène d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants (voir par exemple [1] :
(2-13) $u(t)=e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_\xi t)+B\sin(\omega_\xi t)\right)+D\sin(\omega_e t)$
avec :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

(2-14) $\omega_\xi = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$

Les conditions initiales (2-5) et (2-6) donnent respectivement :
$A + D\sin(\varphi) = 0$
$\omega_0 \left(-\xi A + B\sqrt{1-\xi^2} \right) + \omega_e D\cos(\varphi) = 0$

D'où l'on peut déduire :
(2-15) $A = -D\sin(\varphi)$
(2-16) $B = -\frac{\omega_e D\cos\varphi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi D\sin(\varphi)}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{D}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{\omega_e}{\omega_0}\cos(\varphi) + \xi\sin(\varphi)\right)$

La solution analytique s'écrit donc comme (2-13) où A , B , D , ω_ξ et φ sont donnés respectivement par (2-15), (2-16), (2-11), (2-14) et (2-12).

2.1 Résultats de référence

Pour ce cas test, on choisit une pulsation d'excitation du signal harmonique $\omega_e = 2\,s^{-1}$, $\xi = 0{,}05$ et $A_e = 1\,m.s^{-2}$. Compte-tenu des paramètres du problèmes, la fréquence propre est $\omega_0 = 1\,s^{-1}$.

On teste les valeurs du déplacement relatif u_x aux points P_2 et P_3 à $t = 10\,s$:

	Déplacement à $t = 10\,s$
Nœud	DX
$N2$ (point P_2)	0.538736
$N3$ (point P_3)	0.538736

2.2 Incertitude sur la solution

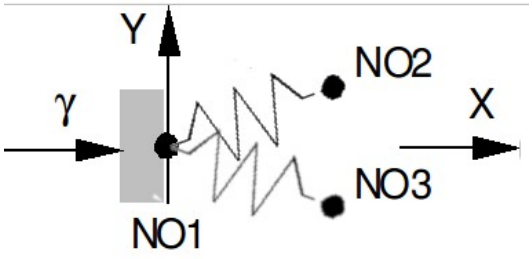
Précision sur l'intégration en temps dans DYNA_NON_LINE

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les ressorts et masses ponctuelles sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T. Les nœuds $N2$ et $N3$ sont légèrement décalés selon Y, respectivement $Y=0{,}01\,m$ et $Y=-0{,}01\,m$, ce qui ne modifie pas les résultats étant donné que seul le problème selon X est résolu.



Le nœud $N1$ est encastré et soumis à une accélération imposée $\gamma(t)$.

Le mode du premier système masse ressort est d'abord calculé en imposant $u_x(P_3)=0$. Puis le mode du second, en imposant $u_x(P_2)=0$. Une base modale unique est créé à partir de ces deux modes, à l'aide de la commande DEFI_BASE_MODALE avec l'option NUME_REF. Un calcul dynamique est ensuite réalisé avec la commande DYNA_NON_LINE en utilisant un amortissement modal déduit de ces modes.

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 3
Nombre de mailles et types : 2 DIS_T

3.3 Grandeurs testées et résultats

Les solutions testées sont le déplacement relatif en $t=10\,s$:

Nœud	Référence	Tolérance
$N2$ (point P_2)	0.538736	1 %
$N3$ (point P_3)	0.538736	1 %

Synthèse des résultats

Les résultats sont en accord avec la solution analytique, ce qui valide :
- l'implémentation du schéma en temps de NEWMARK dans DYNA_NON_LINE
- la méthodologie consistant à calculer les modes en bloquant l'un puis l'autre de deux sous-systèmes, puis à créer une base modale unique utilisée pour définir un amortissement modal.

Références

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_diff%C3%A9rentielle_lin%C3%A9aire_d'ordre_deux#Exemple

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)