SDLD04 - Réponse transitoire d'un système masses-ressorts soumis à une accélération imposée

Résumé

Ce test consiste à calculer la réponse transitoire non amortie d'un système masses-ressorts linéaire encastré-libre soumis à une accélération imposée.

On teste l'élément discret en traction-compression, le calcul des modes propres, des modes statiques et le calcul de la réponse transitoire d'un système soumis à une accélération imposée. On compare le calcul direct de la réponse à son calcul par recombinaison modale.

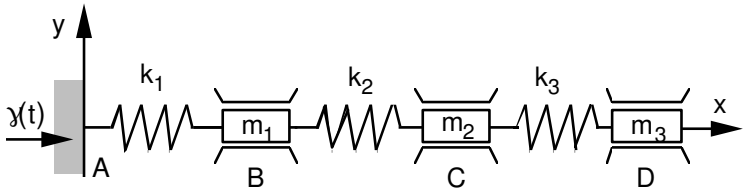
Ce cas test est issu du guide VPCS. La solution de référence est un calcul analytique. Les erreurs sur les résultats obtenus sont normales compte tenu du pas de temps choisi pour l'intégration numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Problème de référence

1.1 Géométrie

On calcule la réponse d'un système linéaire composé de trois masses et de trois ressorts à une accélération imposée au niveau de son point d'ancrage (A) :



1.2 Propriétés des matériaux

- raideurs de liaison : $k=k_1=k_2=k_3=1000\,N/m$;
- masses ponctuelles : $m=m_1=m_2=m_3=1\,kg$.

1.3 Conditions aux limites et chargements

Conditions aux limites

Les seuls déplacements autorisés sont les translations selon l'axe x .
Le point A est encastré : $dx=dy=dz=drx=dry=drz=0$.

Chargement

Le point d'ancrage A est soumis à une accélération, fonction croissante du temps, selon la direction x : $\gamma(t)=2.10^5.t^2$ (t varie de 0 à $0,1\,s$).

1.4 Conditions initiales

Le système est initialement au repos : à $t=0$, $dx(0)=0$ et $dx/dt(0)=0$ en tout point.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Solution de référence

2.1 Méthode de calcul utilisée pour la solution de référence

On calcule dans un premier temps les fréquences propres f_i et les vecteurs propres Φ_{Ni} associés normalisés par rapport à la matrice de masse. On calcule ensuite la réponse généralisée du système mono-excité en résolvant analytiquement l'intégrale de Duhamel [bib1]. Enfin, on restitue sur la base physique le déplacement relatif au point D.

Calcul des fréquences propres

Les matrices de masse et de raideur sont les suivantes :

$$M=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},\ K=k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fréquences propres ω sont solution de l'équation $det\left[K-\lambda^2 M\right]=0$, soit $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda-1=0$ où $\lambda=\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Calcul de la réponse généralisée du système mono-excité

$\gamma(t)=a.t^2$ avec $a=2.10^5$.

Dans le repère absolu, l'équation fondamentale de la dynamique du système masses-ressorts non amorti s'écrit : $M\ddot{X}_a+K X_a=0$.

Le déplacement absolu X_a se décompose en un déplacement d'entraînement uniforme en translation X_e et en un déplacement relatif X_r : $X_a=X_r+X_e$.
L'équation du mouvement dans le repère relatif s'écrit alors : $M\ddot{X}_r+K X_r=-M\Psi\ddot{X}_s=Q$
avec $\ddot{X}_s=\gamma(t)=a.t^2$ et $\Psi=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et donc $Q=a.t^2 m\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

L'équation du mouvement projetée sur la base des modes dynamiques normalisés par rapport à la matrice de masse s'écrit :

$$\ddot{\alpha}_i(t)+\omega_i^2\alpha_i(t)=\frac{\Phi_i^T.M.\Psi}{\Phi_i^T.M.\Phi_i}\gamma(t)=-p_i(t)\gamma(t).$$

La réponse de ce système linéaire, à un instant t est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$\ddot{\alpha}_i(t)=\frac{1}{\omega_i}\int_0^t -p_i(t)\gamma(t).\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau=-\frac{p_i(t)}{\omega_i}\int_0^t a.t^2\sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Or, d'après [bib1], $\int_0^t a.t^2 \sin\omega_i(t-\tau)\,d\tau = \frac{\alpha}{\omega_i}\left[t^2+\frac{2}{\omega_i}(\cos\omega_i t-1)\right]$.

Donc $X_r=\Phi_i\cdot\alpha_i=-\sum_i \frac{a.p_i(t).\Phi_i}{\omega_i^2}\left[t^2+\frac{2}{\omega_i}(\cos\omega_i t-1)\right]$.

2.2 Résultats de référence

On prend pour résultats de référence les trois fréquences propres du système et le déplacement relatif x_r au point D, pour différents instants compris entre 0 et $0{,}1\,s$.

2.3 Incertitude sur la solution

Aucune si l'on calcule l'intégrale de Duhamel analytiquement [bib1], [bib2].

2.4 Références bibliographiques

1) J.S. PRZEMIENIECKI : Theorie of matrix structural analysis. New York, Mac Graw-Hill, 1968, p. 351-357

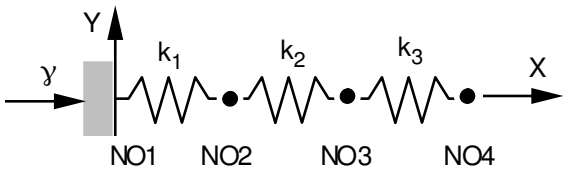
2) S.P. TIMOSHENKO, D.H. YOUNG et W. WEAVER : Vibrations problems in engineering 4ème édition, New York, Wiley & Sons, 1974, p. 284-321

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Modélisation A

3.1 Caractéristiques de la modélisation

Les ressorts et masses ponctuelles sont modélisés par des éléments discrets à 3 degrés de liberté DIS_T :



Le nœud $NO1$ est encastré et soumis à une accélération imposée $\gamma(t)$. On calcule le déplacement relatif du nœud $NO4$.

Calculs par synthèse modale
On considère la base complète des modes propres. L'intégration temporelle est réalisée avec les algorithmes de Newmark, d'Euler et de Devogelaere avec un pas de temps de $0{,}001\,s$. Les calculs sont archivés tous les pas de temps.
On considère un amortissement réduit ξ_i nul pour l'ensemble des modes calculés.

Le chargement est pris en compte sous forme de vecteur projeté sur la base modale EXCIT : (VECT_GENE) ou sous forme de composante modale EXCIT : (NUME_MODE) ou les deux à la fois.

Calculs directs
L'intégration temporelle est réalisée soit avec l'algorithme de Newmark soit avec l'algorithme explicite des différences centrées avec un pas de temps de $0{,}001\,s$. Les calculs sont archivés tous les dix pas de temps.

Remarque :

Comme le schéma des différences centrées ne peut être utilisé qu'avec une matrice de masse diagonale, on calcule les matrices élémentaires avec l'option MASS_MECA_DIAG dans l'opérateur CALC_MATR_ELEM.

Prise en compte d'un état initial
Dans les deux types de calcul, on vérifie que le déplacement relatif obtenu d'un calcul réalisé en une fois est identique à celui obtenu en plusieurs fois, c'est-à-dire en considérant comme état initial, le résultat du dernier pas de temps calculé :

```
ETAT_INIT =_F (RESULTAT  ...)  pour un calcul par synthèse modale ;
ETAT_INIT =_F (DEPL  ...
              VITE  ..)  pour un calcul direct.
```

Prise en compte des modes négligés par correction statique :
On considère une base modale constituée des deux premiers modes propres et on l'a complète par un mode correspondant à la réponse statique du système étudié à un chargement unitaire de type force imposée dans la direction $-x$ (mots clés MODE_CORR et CORR_STAT dans l'opérateur DYNA_VIBRA).

3.2 Caractéristiques du maillage

Nombre de nœuds : 4
Nombre de mailles et types : 3 DIS_T

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Fonctionnalités testées

On teste notamment la prise en compte d'un état initial et des corrections statiques.

3.4 Grandeurs testées et résultats

Fréquences propres (en Hz) du système :

Numéro du mode	Analytique
1	2,239
2	6,275
3	9,069

Valeurs du déplacement relatif du nœud $NO4$ pour différents instants :

Calcul transitoire par synthèse modale
On teste la prise en compte d'un chargement sous forme de vecteur projeté sur la base modale, sous forme de composante modale, sous forme de vecteur projeté et de composante modale simultanément ainsi que la prise en compte des modes négligés.

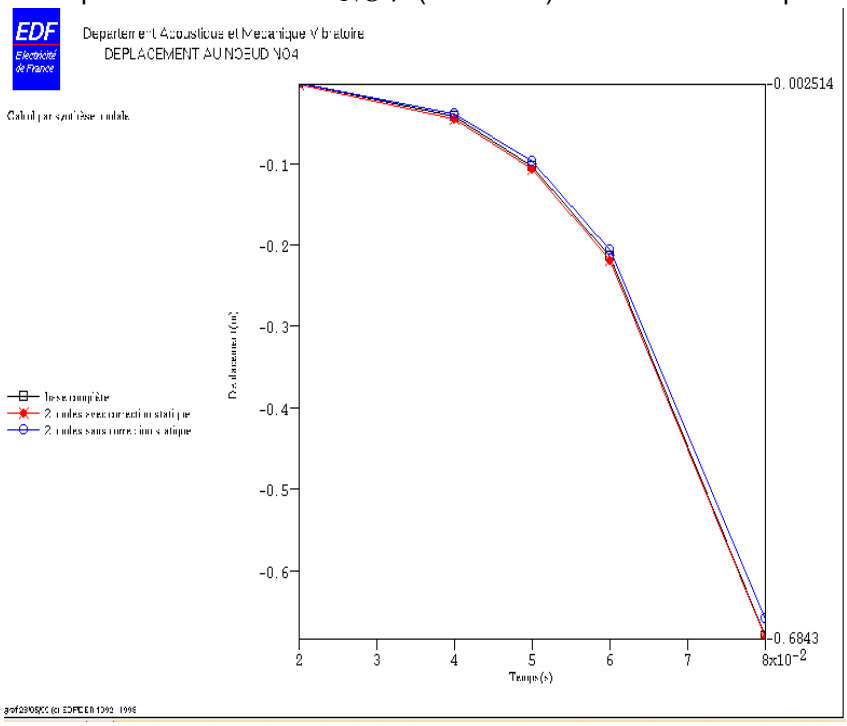
Temps (s)	Référence	*Code_Aster* *Chargement de type vecteur généralisé* *Algorithme de Newmark*	Erreur relative %	*Code_Aster* *Chargement de type composante modale* *Algorithme d'Euler*	Erreur relative %
0,02	–2,700E–03	–2,680E–03	–0,741	–2,660E–03	–1,481
0,04	–4,260E–02	–4,272E–02	0,279	–4,264E–02	0,091
0,05	–1,041E–01	–1,042E–01	0,134	–1,041E–01	0,015
0,06	–2,158E–01	–2,161E–01	0,121	–2,159E–01	0,038
0,08	–6,813E–01	–6,819E–01	0,094	–6,816E–01	0,049
0,10	–1,658E+00	–1,659E+00	0,082	–1,659E+00	0,055

Type de chargement	Temps (s)	Référence	*Code_Aster*	erreur relative %
Vecteur généralisé et composante modale simultanément (Euler)	0,02	–5,400E–03	–5,320E–03	–1,482
	0,04	–8,520E–02	–8,528E–02	0,091
	0,05	–2,082E–01	–2,082E–01	0,015
	0,06	–4,316E–01	–4,318E–01	0,038
	0,08	–1,363E+00	–1,363E+00	0,049
	0,10	–3,316E+00	–3,318E+00	0,055
Vecteur généralisé Devogelaere (plus correction statique)	0,02	–4,000E–03	–3,985E–03	–0,373
	0,04	–4,640E–02	–4,640E–02	0,01
	0,05	–1,085E–01	–1,086E–01	0,084
	0,06	–2,203E–01	–2,204E–01	0,039
	0,08	–6,842E–01	–6,843E–01	0,021
	0,10	–1,659E+00	–1,659E+00	0,026

Les résultats avec base modale incomplète sans correction statique ne sont pas testés. On illustre ci-dessous l'intérêt de la correction statique :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Déplacement du noeud $NO4$ (en mètres) en fonction du temps



Base complète — Base incomplète sans correction statique — Base incomplète avec correction statique

Un test de non-régression est fait afin s'assurer du bon fonctionnement de la commande POST_GENE_PHYS suite à la correction d'un bug.

Temps (s)	Identification	Type de référence	Valeur de référence	Précision
0,1	Champ DEPL, Composante DX, Nœud N02	'NON_REGRESSION'	-	1E-6

Calcul transitoire direct

On compare les déplacements calculés au noeud $N04$ en fonction de différents schémas d'intégration :

Temps (s)	Référence	*Code_Aster* *Schéma de Newmark*	Erreur relative %	*Code_Aster* *Schéma des différences centrées*	Erreur relative %
0,02	–2,700E–03	–2,680E–03	–0,741	–2,660E–03	–1,482
0,04	–4,260E–02	–4,272E–02	0,279	–4,264E–02	0,091
0,05	–1,041E–01	–1,042E–01	0,134	–1,041E–01	0,015
0,06	–2,158E–01	–2,161E–01	0,121	–2,159E–01	0,038
0,08	–6,813E–01	–6,819E–01	0,094	–6,745E–01	–1,004
0,10	–1,658E+00	–1,659E+00	0,082	–1,645E+00	–0,803

Prise en compte d'un état initial :
Comme attendu, les déplacements relatifs calculés en une fois sont strictement identiques à ceux obtenus en considérant comme état initial le résultat du dernier pas de temps calculé.

On effectue également des tests de non régression sur le bilan des énergies.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Énergie	Instant (s)	Code_Aster Schéma de Newmark	Code_Aster Schéma des différences centrées
TRAV_EXT	0,06	2,9 7989 E+02	2,9 7 838 E+02
ENER_TOT	0,06	1,8 8902 E+01	1,8 8 688 E+01
ENER_CIN	0,06	2,79099E+02	2,79 132 E+02
TRAV_EXT	0,1 1	1,03435E+04	9,98152 E+0 3
ENER_TOT	0,1 1	1,71815E+03	1,67741 E+03
ENER_CIN	0,1 1	8,62533E+03	8, 30528 E+03

4 Synthèse des résultats

La solution de référence est un calcul analytique. Les erreurs sur les résultats obtenus sont normales compte tenu du pas de temps choisi pour l'intégration numérique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)