# Notice pour la construction de modèles réduits en dynamique

**Résumé :**

Les modèles utilisés pour les calculs de réponses en dynamique linéaire sont de plus en plus gros. Pour améliorer significativement les temps de calculs, il est possible de construire un sous-espace de dimension réduite qui permet de projeter le problème complet, et ainsi accélérer les différents calculs de réponse. Ces modèles de composants réduits peuvent également être utilisés dans des approches de sous-structuration, et certaines analyses non-linéaires (chocs, comportement non-linéaire). On propose également une méthodologie permettant de « condenser » les variables internes pour une analyse de dynamique linéaire. Ce manuel se propose d'aider les utilisateurs dans la construction de modèles réduits en dynamique et propose un cadre pour évaluer la qualité des modèles réduits construits.

**On insiste sur l'intérêt du processus d'orthogonalisation des bases de projection (opérateur DEFI_BASE_MODALE, mot clé ORTHO_BASE) permettant d'éliminer les vecteurs trop colinéaires, issues de la concaténation de plusieurs familles de vecteurs. Une famille contentant des vecteurs presque colinéaires conduira, dans le pire des cas, à des matrices projetées singulières et à un problème mal posé.**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des Matières

1 Introduction....3
2 Réduction de modèle : principe de la correction statique....3
2.1 Description et notations....4
2.2 Réduction de modèle et correction statique....4
2.3 Hypothèse de réduction de modèle....5
2.4 Définition de la correction statique....5
2.5 Cas tests illustrant l'utilisation des corrections statiques....7
2.6 Indications pour le contrôle a posteriori de la qualité du modèle réduit....8
2.6.1 Cas général pour un calcul sur un modèle réduit....8
2.6.2 Cas particulier du calcul des modes d'un modèle généralisé....8
3 Prise en compte d'efforts extérieurs, de chocs, de comportements non-linéaires....9
4 Réduction de modèle pour la sous structuration dynamique....10
4.1 Méthodes classiques : Craig&Bampton et MacNeal&Rubin....10
4.2 Utilisation de modes d'interfaces....11
4.3 Calcul des modes d'interface....12
5 Construction d'une base adaptée au problème dissipatif....12
5.1 Construction d'une base complète sur le modèle des corrections statiques pour l'amortissement hystérétique et/ou visqueux....12
5.2 Prise en compte de la particularité du problème....13
5.3 Filtrage de la base de réduction....13
5.4 Itérations sur les résidus....14
5.5 Réduction de modèles incluant des variables internes (ou intermédiaires)....15
5.5.1 Introduction rapide à la viscoélasticité linéaire....15
5.5.2 Principes de construction d'une base de réduction adaptée....17
5.5.3 Construction de la correction associée aux efforts statiques....18
5.5.4 Mise en œuvre informatique....20
5.5.4.1 Définition des matériaux....20
5.5.4.2 Calcul des modes « libres » et « encastrés »....21
5.5.4.3 Calcul de la correction associée aux degrés de libertés physiques....22
5.5.4.4 Construction des bases de projections complètes....22
5.5.4.5 Commentaires....25
6 Cas test pour Code_Aster....25
6.1 Note sur les études présentées....26
6.2 Exemple numérique avec amortissement hystérétique....26
6.3 Exemple numérique avec amortissement viscoélastique décrit par des variables internes....28
7 Conclusions sur l'utilisation des méthodes de réduction....28
8 Références....30



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

La taille des modèles utilisés pour les calculs de réponses en dynamique linéaire est de plus en plus importante, et les besoins sur la précision des résultats conduisent à mener des calculs plus fins et plus coûteux. Pour améliorer significativement les temps de calculs des réponses de ces systèmes aux diverses sollicitations, il est intéressant de construire un sous-espace de dimension réduite qui permet de projeter le problème complet, et ainsi accélérer les différents calculs de réponse. Ces modèles de composants réduits peuvent être utilisés soit seuls, soit dans des approches par sous-structuration, pour des analyses linéaires mais aussi pour certaines analyses non-linéaires, telles que la présence de chocs. Cette approche est également particulièrement intéressante lorsqu'on doit tenir compte des dispositifs internes de dissipations propres à chaque structure.

La méthode proposée pour enrichir un sous-espace initial, construite sur la base des modes propres du système, s'appuie sur les méthodes de résidus ([1,2]). Cette méthode permet, à partir d'une solution approchée de la solution, de construire des vecteurs permettant d'améliorer la prédiction pour un problème donné. Cette méthode, itérative, donne de très bons résultats avec un nombre limité d'itérations (en général, deux itérations suffisent).

La première itération est en général réalisée en calculant les termes appelés classiquement « corrections statiques », ou « modes statiques ». Ce point est développé dans la première section de ce document. Cette technique est particulièrement adaptée pour la réduction de modèles en présence d'efforts extérieurs peu nombreux, même s'ils présentent une distribution spatiale (pression fluctuante, gravité, etc.). Cette approche permet également de traiter efficacement les problèmes de chocs en adoptant une méthode de pénalisation (sous réserve qu'on s'intéresse aux phénomènes « loin » de la zone de chocs). **On donne également dans cette partie des indications importantes pour contrôler la qualité des modèles réduits construits avec cette approche.**

Dans la deuxième partie, on discutera des cas particuliers des modèles réduits de type Craig&Bampton ou McNeal, utilisés pour les approches en sous-structuration dynamique. Ces deux méthodes peuvent être vues comme la généralisation des enrichissements par corrections statiques. On présentera également des techniques permettant de limiter la taille de ces modèles, en particulier pour la représentation des comportements d'interfaces.

Dans la troisième partie, on étend les concepts présentés aux cas des structures présentant des efforts internes tels que dans les cas amortis. On discutera principalement des modèles d'amortissement visqueux, hystérétiques et viscoélastiques. Les deux premières approches sont en effet celles retenues usuellement pour les études en dynamique. Le cas de l'amortissement associé à une loi viscoélastique est intéressant puisque cette loi introduit des variables internes non présentes dans la loi de comportement initiale du matériau, mais qui peuvent être prises en compte par le biais de la réduction. Le cas particulier du modèle d'amortissement de Rayleigh, utilisé fréquemment pour les analyses sismiques, n'est pas présenté, puisque dans ces cas particuliers, les modes propres du système diagonalisent aussi les matrices associées à la dissipation, et la base ainsi construite ne nécessite pas d'enrichissement particulier, en-dehors de ceux associés aux efforts extérieurs.

Dans la quatrième partie, on présente, à l'aide d'une étude versée dans la base de *Code_Aster* (étude n°3185 : Calcul des modes complexes d'une plaque sandwich incluant un matériau visco-élastique), les différentes techniques présentées. Ces exemples permettent également de présenter l'implémentation des méthodes dans *Code_Aster*.

# 2 Réduction de modèle : principe de la correction statique

Dans cette partie, on présente les principes des méthodes de réduction de modèle adaptées aux cas des structures non dissipatives. Ces principes seront ensuite étendus aux cas des structures dissipatives. On commence par rappeler les relations de la dynamique associées à la modélisation aux éléments finis de la structure.

On introduit ensuite le problème aux valeurs propres que l'on souhaite résoudre. Les hypothèses associées à la réduction de modèle sont alors introduites, et une méthode de construction d'une base



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

engendrant un sous-espace adapté est alors proposée. On s'intéresse alors à la réduction optimale de cette base, et à son enrichissement ultérieur à partir d'une méthode d'itération sur les résidus.

## 2.1 Description et notations

Considérons le modèle aux éléments finis (E.F.) d'une structure linéaire, présentant des mécanismes de dissipations interne, soumise à des efforts extérieurs, pouvant aussi bien être connus a priori (chargements) que devant être évalués au fur et à mesure (efforts de chocs, contact, etc.). Dans le domaine temporel, la relation d'équilibre s'écrit

$$\left[K_e q(t) + D_v \dot{q}(t) + M \ddot{q}(t)\right] = B u(t) \quad (1)$$

où $K_e$ est la matrice de raideur de la structure, $D_v$ la matrice associée à la dissipation visqueuse, et $M$ la matrice de masse. On note par ailleurs $q$ le vecteur des degrés de liberté. Le terme d'efforts extérieur est défini par le produit d'une matrice de localisation des efforts $B$ et d'un vecteur $u$ précisant l'évolution temporelle de l'excitation. Cette écriture permet de séparer les composantes spatiales et temporelles d'un effort souvent noté $f(t)$. On aura donc, dans ce cas,

$$f(t) = Bu(t) \quad (2)$$

En présence de chocs, on pourra par exemple séparer les termes liés aux chargements et ceux liés aux chocs :

$$f(t) = B_{eff.ext.} u_{eff.ext.}(t) + B_{chocs} u_{chocs}(t) \quad (3)$$

$B_{chocs}$ est le terme qui localise les degrés de liberté de chocs, et $u_{choc}(t)$ détermine l'évolution de l'effort. Dans le cas simple d'un choc au niveau du degré de liberté $q_c$ traité par pénalisation, on écrira par exemple

- $u_{choc}(t) = 0$ s'il n'y a pas de contact
- $u_{choc}(t) = k\, q_c(t)$ s'il y a contact

Concernant l'amortissement, les deux modèles considérés classiquement dans ces problèmes sont l'amortissement visqueux et l'amortissement hystérétique. On introduit également l'amortissement viscoélastique, qu'il est intéressant de traiter dans le cadre des méthodes de réduction de modèle. Dans ces conditions, l'équation d'équilibre dans le domaine de Laplace peut se mettre sous la forme

$$\left[\left(K_e + j\, K_h + K_v(s)\right) + s\, D_v + s^2 M\right] q(s) = B\, u(s) \quad (4)$$

$K_h$ est la matrice représentant le comportement hystérétique, $K_v$ la matrice représentant le comportement viscoélastique. Pour ces deux modèles d'amortissement, la modélisation adoptée n'a de sens que dans le domaine de Laplace. L'amortissement hystérétique, tel qu'il est introduit, n'est pas causal. Néanmoins, en supprimant ce terme, on retrouve les équations standards associées au problème visqueux et viscoélastique, licites même pour $s = 0$.

## 2.2 Réduction de modèle et correction statique

La construction d'un modèle réduit peut s'envisager pour résoudre des problèmes de différentes natures, qu'il s'agisse du calcul de la réponse temporelle ou harmonique d'une structure à une sollicitation par l'utilisation d'un modèle réduit unique, ou du calcul de modes propres et de valeur propres par une approche par sous structuration (couplage de modèles réduits), ou par condensation dynamique (réduction de tout ou partie d'une structure). Les problèmes de calcul de réponse se mettent sous la forme (1) ou (4) selon qu'on considère un chargement temporel ou harmonique.

Le problème aux valeurs propres associé, en considérant les différents types d'amortissement, se met sous la forme

$$\left[\left(K_e + j\, K_h + K_v(\lambda_0)\right) + \lambda_0 D_v + \lambda_0^2 M\right] \psi = 0 \quad (5)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où les $\lambda_0$ sont les valeurs propres complexes, et $\psi$ les modes complexes. Dans le cas du modèle non dissipatif, les modes propres $\phi$ et les pulsations propres $\omega_0$ vérifient

$$\left[K_e - \omega_0^2 M\right]\phi = 0 \tag{6}$$

Les outils permettant de résoudre le problème complet, à l'exception du cas viscoélastique, sont disponibles dans *Code_Aster*, par le biais de la commande CALC_MODES. Cependant, la matrice complexe $jK_h$ est symétrique, et non hermitienne. De ce fait, les propriétés algébriques des matrices considérées dans le problème dissipatif ne permettent pas de mettre en œuvre les algorithmes les plus efficaces. Pour des détails complémentaires sur les algorithmes de recherche de valeurs propres, on pourra se reporter à [1,4,5].

## 2.3 Hypothèse de réduction de modèle

La résolution du problème sur la base du modèle complet présenté dans la relation ( 5 ) n'est donc pas envisageable pour des modèles de taille industrielle. Pour contourner cette difficulté, on se propose de construire un modèle réduit possédant les mêmes propriétés spectrales que le problème complet. On postule donc l'existence d'une base de réduction $T_r$ qui permette la représentation raisonnable du comportement de la structure sur la bande de fréquence d'intérêt. Dans ces conditions, on a donc

$$q \approx T_r q_r \tag{7}$$

Les termes $q_r$ de la combinaison linéaire correspondent aux amplitudes généralisées du problème complet projeté sur la base $T_r$. Ces amplitudes vérifient donc, dans le cas général :

- pour les réponses temporelles :

$$\left[T_r^T K_e T_r\right] q_r(t) + \left[T_r^T D_v T_r\right] \dot{q}_r(t) + \left[T_r^T M T_r\right] \ddot{q}_r(t) = T_r^T B u(t) \tag{8}$$

- pour les réponses harmoniques :

$$T_r^T \left[\left(K_e + jK_h + K_v(s)\right) + sD_v + s^2 M\right] T_r q_r(s) = T_r^T B u(s) \tag{9}$$

Le problème ainsi réduit doit conserver les mêmes caractéristiques spectrales. Il est donc naturel de construire $T_r$ sur la base des modes propres $\phi_0$ du système conservatif associé. **Cependant, les modes propres ne sont suffisants pour représenter correctement la réponse du système que si l'on en considère un nombre très important.** En pratique, le calcul d'un grand nombre de modes est irréaliste pour des problèmes industriels de grande taille. Il faut donc enrichir la base de projection pour améliorer la représentativité de $T_r$.

## 2.4 Définition de la correction statique

Pour calculer efficacement la réponse d'une structure à une sollicitation extérieure, on choisit généralement de projeter le système sur une base constituée des modes dont les fréquences propres sont dans la bande de fréquence d'intérêt du problème. Cette bande comprend en général les modes de fréquences les plus basses, mais pas nécessairement. Or, pour assurer une bonne représentation de la réponse, il est souvent nécessaire de prendre en compte un nombre beaucoup plus important de modes que ceux présents dans la bande de fréquence.

Considérons le système conservatif associé à la relation (6). En décomposant la réponse de ce système sur la base modale, il vient, en utilisant abusivement la notation $\infty$ pour désigner la taille du problème,



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$q(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_k\Phi_k^T B u(s)}{s^2+\omega_{0k}^2} \tag{10}$$

Si on ne considère que les $N$ premiers modes de la structure, on obtient une solution tronquée approximative dont la validité décroît très rapidement avec le nombre de modes :

$$q(s)\approx\sum_{k=1}^{N<\infty}\frac{\Phi_k\Phi_k^T B u(s)}{s^2+\omega_{0k}^2} \tag{11}$$

Pour limiter les effets de troncature, on choisit un nombre de modes suffisant pour représenter le comportement dynamique, et on complète cette base de mode en incluant les effets quasi statiques des modes tronqués dans la bande de fréquence d'intérêt. En général, on considère des modes jusqu'à 1,5 fois la fréquence maximale d'intérêt du problème (règle semi-empirique dite « de Hurty » [7]). Dans ces conditions, les fréquences propres des modes en dehors de la bande sont plus importantes que la fréquence maximale d'intérêt, on suppose alors

$$s^2 \ll \omega_{0k}^2 \text{ pour } k>N, \tag{12}$$

et on peut donc écrire, en séparant les termes de (10) en fonction de leur appartenance à la bande de fréquences d'intérêt

$$q(s)\approx\sum_{k=1}^{N}\frac{\Phi_k\Phi_k^T B u(s)}{s^2+\omega_{0k}^2} \quad + \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\Phi_k\Phi_k^T B u(s)}{\omega_{0k}^2} \tag{13}$$

La base de réduction associée à ce modèle est donc composée des $N$ premiers modes propres, mais également des différentes contributions quasi statiques $T_s$

$$T_s=\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\Phi_k\Phi_k^T B}{\omega_{0k}^2} \tag{14}$$

Pour calculer efficacement $T_s$, on peut écrire la solution statique $q_s$ du problème pour l'ensemble des chargement $B$ en utilisant la décomposition spectrale de $K_e^{-1}$ [1]. Il vient alors

$$q_s=\left(K_e^{-1}\right)B=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_k\Phi_k^T}{\omega_{0k}^2}\right)B \tag{15}$$

Dans ces conditions, on peut récrire la relation ( 13 ) en utilisant cette réponse statique, et il vient

$$q(s)\approx\sum_{k=1}^{N}\frac{\Phi_k\Phi_k^T B u(s)}{s^2+\omega_{0k}^2}+K_e^{-1}Bu(s)-\sum_{k=1}^{N}\frac{\Phi_k\Phi_k^T B u(s)}{\omega_{0k}^2}$$

Soit

$$q(s)\approx\sum_{k=1}^{N}\left[\Phi_k\left(\frac{\Phi_k^T}{s^2+\omega_{0k}^2}-\frac{\Phi_k^T}{\omega_{0k}^2}\right)Bu(s)\right]+K_e^{-1}Bu(s) \tag{16}$$

1 On a $\Phi^T K_e\Phi=\Omega^2$. Si $\omega_{0k}\neq 0\ \forall k$, alors $(\Phi^T K_e\Phi)^{-1}=\Omega^{-2}$, d'où $K_e^{-1}=\Phi\Omega^{-2}\Phi^T=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_k\Phi_k^T}{\omega_{0k}^2}$.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

D'après la relation (16), on peut donc construire une base de projection efficace pour calculer la réponse du problème dynamique. Cette base $T_r$ est donc construite autour des $N$ premiers modes propres de la structure, et de la réponse statique de la structure à des efforts unitaires ou à des accélérations unitaires, appliqués de la même façon que les efforts pour lequel on cherche la réponse (cf. §3 pour les opérateurs correspondants). On a donc :

$$T_r = \left[ \Phi_1 ... \Phi_N \quad K_e^{-1} B \right] \tag{17}$$

La base de projection ainsi construite constitue un très bon sous-espace pour la recherche de la réponse dynamique de la structure. En revanche, pour son utilisation pratique, il est recommandé d'orthogonaliser la famille de vecteurs obtenue par la relation (17).

**NB : Correction inertielle**
D'un intérêt plus modeste, on peut définir, de façon analogue, une correction basses fréquences, si la bande d'analyse d'intérêt ne comporte pas les premiers modes de la structure. La relation (10) peut se décomposer de la manière suivante :

$$q(s) \approx \sum_{k=1}^{M} \frac{\Phi_k \Phi_k^T B u(s)}{s^2} + \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\Phi_k \Phi_k^T B u(s)}{s^2 + \omega_{0k}^2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Phi_k \Phi_k^T B u(s)}{\omega_{0k}^2} \tag{18}$$

Le premier terme correspond à la décomposition spectrale de $M^{-1}$, et on peut donc enrichir la base de projection selon le même principe, et construire

$$T_r = \left[ M^{-1} B \quad \Phi_1 ... \Phi_N \quad K_e^{-1} B \right] \tag{19}$$

## 2.5 Cas tests illustrant l'utilisation des corrections statiques

De nombreux cas tests de *Code_Aster* utilisent déjà les principes de la correction statique. On peut par ailleurs noter que cette correction peut être appliquée à différents instant dans l'étude :
- soit elle est intégrée directement dans la base de réduction, conformément à la présentation qui vient d'être faite (correction statique *a priori*),
- soit elle est superposée après calcul à la réponse dynamique de la structure sur la seule base des modes propres (correction statique *a posteriori*).

Ces deux approches sont équivalentes et fournissent bien évidemment les mêmes résultats. On choisira l'une ou l'autre pour des questions de simplicité. On choisit en général la première approche pour les calculs harmoniques (ou fréquentiels), alors que la seconde est privilégiée dans le cas des calculs de réponses transitoires (ou temporelles). On peut citer, parmi les cas tests présentant l'utilisation de la correction statique, les études suivantes, toutes relatives à une analyse sismique :

— Correction statique *a priori,* par adjonction de modes statiques à force imposée ou à accélération imposée à la base des modes propres (constitution d'une base de Ritz), ou correction statique *a posteriori* via le pseudo-mode (mode statique à accélération imposée) en analyse sismique transitoire sur base modale :
- [V2.01.103] SDLD103 – Réponse sismique transitoire d'un système 3 masses et 4 ressorts multi-supporté avec correction statique
- [V2.01.105] SDLD105 – Réponse transitoire d'un système masses-ressorts à un séisme mono-appui avec correction statique

— Correction statique *a posteriori* via le pseudo-mode (mode statique à accélération imposée) en analyse sismique spectrale :
- [V2.01.030] SDLD30 – Réponse sismique spectrale d'un système 2 masses et 3 ressorts multi-supporté
- [V2.01.301] SDLD301 – Réponse sismique spectrale d'un système 2 masses et 3 ressorts multi-supporté (excitations corrélées ou décorrélées)
- [V2.02.023] SDLL23 – Poutre encastrée-libre soumise à un séisme (réponse spectrale)
- [V2.02.112] SDLL112 – Analyse sismique d'une poutre multi-supportée (réponse spectrale)



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 2.6 Indications pour le contrôle a posteriori de la qualité du modèle réduit

Un des principes permettant de valider la qualité d'un modèle réduit consiste à estimer, a posteriori, l'écart à l'équilibre qui peut exister après calcul.

### 2.6.1 Cas général pour un calcul sur un modèle réduit

Pour caractériser cet écart à l'équilibre, on utilise le principe du résidu en effort. Ce résidu en effort $F_r$ est calculé

- pour les réponses temporelles :

$$\left[K_e T_r\right] q_r(t) + \left[D_v T_r\right] \dot{q}_r(t) + \left[M T_r\right] \ddot{q}_r(t) - B u(t) = F_r(t) \tag{20}$$

- pour les réponses harmoniques :

$$\left[\left(K_e + j K_h + K_v(s)\right) + s D_v + s^2 M\right] T_r q_r(s) - B u(s) = F_r(s) \tag{21}$$

On peut également adopter la même démarche pour le calcul des modes propres complexes, détaillée en section 5.4.

Si la solution obtenue est exacte, alors le résidu $F_r$ est nul, par définition. Dans le cas contraire, on peut construire une mesure de l'écart à l'équilibre à partir de la réponse statique de la structure à ce chargement. On note $R_r$ le résidu en déplacement associé à chaque mode complexe calculé. Par définition, on a

$$K_e R_r = F_r \tag{22}$$

Une mesure de l'écart à l'équilibre est donnée par l'énergie potentielle élastique de la structure, soit

$$E_r = \frac{1}{2} \left\| R_r^T K_e R_r \right\|^2 \tag{23}$$

### 2.6.2 Cas particulier du calcul des modes d'un modèle généralisé

Le même principe peut être mis en œuvre, mais de façon un peu plus précise, de sorte à faire apparaître des écarts particuliers aux différents équilibres. En effet, dans le cas d'un calcul par sous structuration avec utilisation de modes d'interfaces, il est important de pouvoir déterminer plus précisément l'origine d'un calcul imprécis. Les sources d'imprécisions sont :

- la mauvaise représentation des déplacements aux interfaces, pour chaque sous structure,
- le comportement dynamique des parties internes, pour chaque sous structure,
- les déplacements différentiels (décollement) pouvant apparaître aux interfaces entre les sous structures.

La commande CALC_CORR_SSD [U4.52.16] permet, sur la base des calculs des travaux associés à ces différents efforts, de construire des termes de corrections permettant d'améliorer séparément les comportements d'interfaces, et les comportements dynamiques internes de chacune des sous structures.

Les détails de cette approche sont données dans la documentation de référence sur la sous structuration dynamique [R4.06.02]



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Prise en compte d'efforts extérieurs, de chocs, de comportements non-linéaires

La première application des méthodes de réduction concerne le calcul transitoire d'une structure en présence d'efforts extérieurs, de chocs ou de comportements non-linéaires. La base de réduction adaptée à un tel calcul est directement celle décrite à la relation (17). Cette base contient donc à la fois des modes propres et des déformées statiques (corrections). La famille issue de la concaténation des deux sous familles doit ensuite être orthogonalisée (ou orthonormée) afin de définir une base.

- Les modes propres d'intérêt sont calculés par l'opérateur CALC_MODES [U4.52.02].
- Les termes de corrections statiques peuvent être calculés :
  - avec MECA_STATIQUE [U4.51.01], ou avec MACRO_ELAS_MULT [U4.41.02], dans le cas de chargements multiples (plusieurs sollicitations différentes, nœuds / directions de chocs, etc.) ;
  - ou avec MODE_STATIQUE [U4.52.14], mots-clés PSEUDO_MODE (accélération imposée) ou FORCE_NODALE (force imposée).
- Ces différentes familles de vecteurs doivent alors être concaténées. Cette opération est réalisée au moyen de la commande DEFI_BASE_MODALE [U4.64.02], en utilisant le mot clé « RITZ ».

**Dans le cas de comportement viscoélastique non linéaire dis_visc ou non-linéaire dis_ecro_trac, il n'y a pas d'élément finis entre les nœuds concernés (juste une relation de comportement). Lors du calcul de la base modale réduite, il peut être judicieux de définir un élément avec une raideur élastique correspondant à la tangente au comportement du dispositif [R5.03.17].**

La famille ainsi construite peut alors être orthogonalisée, soit par l'utilisation du mot clé « ORTHO » dans la même commande DEFI_BASE_MODALE, soit par l'utilisation d'une nouvelle occurrence de la commande DEFI_BASE_MODALE, avec l'utilisation du mot clé « ORTHO_BASE ».

L'orthonormalisation peut être obtenue par normalisation de la famille orthogonale, par utilisation de la commande NORM_MODE [U4.52.11].

**Le processus d'orthogonalisation est surtout important pour éliminer les vecteurs trop colinéaires, issues de la concaténation de plusieurs familles de vecteurs. Une famille contentant des vecteurs presque colinéaires conduira, dans le pire des cas, à des matrices projetées singulières et à un problème mal posé.**

Un alternative à l'utilisation de DEFI_BASE_MODALE consiste à projeter les matrices de masse et de raideur du problème sur la famille complète de vecteurs, et à calculer les modes du problème ainsi réduit. L'utilisateur sélectionne ensuite les vecteurs d'intérêt pour construire la base finale de projection. Cette approche, plus complexe à mettre en œuvre, permet d'ajuster au mieux la base de projection au calcul, mais est à réserver aux utilisateurs avertis.

**NB : Note sur le nombre de modes propres à prendre en compte**
Dans le cas d'un problème avec un chargement extérieur connu, il est classiquement recommandé d'utiliser une famille de modes propres dont la fréquence propre la plus élevée est de l'ordre de 1,5 à 2 fois la fréquence d'intérêt du calcul. Si cette fréquence n'est pas connue a priori, elle peut être estimée sur la base des transformées de Fourier de l'excitation réalisées par exemple avec CALC_FONCTION [U4.32.04]. En revanche, dans le cas d'un problème faisant intervenir des chocs, il est difficile de réaliser a priori une estimation de la fréquence maximale d'intérêt. Une règle classique consiste à regarder, pour un même chargement initial, l'évolution des « temps de chocs » (durée pendant laquelle la structure est au contact de l'obstacle). La convergence des temps de choc indique en général une bonne représentativité de la base retenue pour le calcul.

L'utilisation de corrections statique pour le calcul de la réponse d'une structure en présence de chocs est illustrée dans le cas test SDNL301 [V5.02.301]



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Réduction de modèle pour la sous structuration dynamique.

Lorsqu'on souhaite résoudre un problème de grande taille en dynamique des structures, on procède en général en décomposant la structure principale en différentes sous structures. On construit alors un modèle réduit de chaque sous structure, sur la base de ses modes propres. Ces modèles réduits sont ensuite assemblés, pour construire un modèle réduit global de la structure complète. Quelques éléments sur la constructions de bases adaptées à la résolution du problème par sous structuration dynamiques sont rappelés dans cette section. Les présentations complètes de ces approches, incluant en particulier les aspects de mise en œuvre dans *Code_Aster,* sont disponibles dans les documentations [R4.06.02] (sous-structuration dynamique classique) et [R4.06.03] (sous-structuration dynamique cyclique). On pourra aussi se reporter aux références [6] à [9].

## 4.1 Méthodes classiques : Craig&Bampton et MacNeal&Rubin.

De la même façon que pour la réduction d'un modèle unique, la réduction pour la sous-structuration dynamique doit prendre en compte deux aspects :
- conserver les propriétés spectrales du problème dans la bande de fréquence d'intérêt ;
- prendre en compte correctement les effets quasi statiques des efforts extérieurs appliqués à chaque sous-structure.

La première contrainte est satisfaite en choisissant un nombre de modes suffisant pour la sous-structure considérée, de sorte que le critère de Hurty soit vérifié.

La seconde contrainte est vérifiée en considérant que les efforts extérieurs appliqués à une sous structure donnée sont :
- de réels efforts extérieurs, appliqués dans l'intérieur du domaine de la sous structure considérée,
- les efforts appliqués à la sous structure d'intérêt par les sous structures adjacentes.

Les deux bases de réductions classiquement retenues pour la construction d'un modèle réduit pour la sous structuration sont les bases dites « de Craig&Bampton », et « de MacNeal&Rubin » (voir [8] pour plus de détails sur les formulations).
La base de type « Craig&Bampton » est construite à partir :
- des modes propres de la sous-structure, encastrée au niveau des interfaces avec les sous-structures adjacentes,
- des relèvements statiques de la sous-structure à des déplacements unitaires imposés successivement aux degrés de liberté des interfaces avec les sous-structures adjacentes,
- des éventuels modes de déchargement inertiel, si la structure complète possède des modes de corps rigides, ou peut être soumise à des accélérations importantes d'interface (cas du séisme, par exemple),

La base de type « MacNeal&Rubin » est construite à partir :
- des modes propres de la sous-structure, libre au niveau des interfaces avec les sous-structures adjacentes,
- des modes de corps rigide, si la sous-structure est libre quand les interfaces avec les autres sous structures sont laissées libres.
- des déplacements statiques de la sous-structure à des efforts unitaires imposés successivement aux degrés de liberté des interfaces avec les sous-structures adjacentes. Dans le cas où la sous-structure présente des modes de corps rigide, il faut régulariser le calcul des déplacements statiques, par une technique de décalage du spectre par ajout de masse à la matrice de raideur, ou de calcul des charges auto-équilibrées (voir [6], par exemple)

Pour fixer les idées, en partitionnant les matrices de masse et de raideurs en fonctions des degrés de liberté d'interface (indicés $i$), et des degrés de libertés complémentaires (indicés c), la base de réduction complète pour « Craig&Bampton » est donnée par



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$T_{C\&B}=\begin{bmatrix}\Phi_{cF} & -K_{cc}^{-1}K_{ci} & K_{cc}^{-1}M_{cc}\Phi_{cR}\\ 0 & I_d & 0\end{bmatrix}, \quad (24)$$

et la base de « MacNeal&Rubin » par

$$T_{Mc\&R}=\begin{bmatrix}\Phi_{cR} & \Phi_{cL} & q_{cS}\\ \Phi_{iR} & \Phi_{iL} & q_{iS}\end{bmatrix}. \quad (25)$$

Les derniers vecteurs correspondent au calcul de la réponse du déplacement de la structure à des chargements unitaires imposés à l'interface (en l'absence de modes de corps rigide pour la sous structure)

$$\begin{bmatrix}K_{cc} & K_{ci}\\ K_{ic} & K_{ii}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{cS}\\ q_{iS}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ I_d\end{bmatrix}. \quad (26)$$

$\Phi_{cF}$ sont les modes de la structure à interfaces fixées, $\Phi_L$ les modes libres et $\Phi_R$ les modes de corps rigide de la sous structure libre aux interfaces.

Ces deux approches sont directement disponibles directement dans *Code_Aster* en combinant les résultats des opérateurs dédiés :

- DEFI_BASE_MODALE [U4.64.02]
- DEFI_INTERF_DYNA [U4.64.01]
- DEFI_BASE_MODALE [U4.64.02]
- MACR_ELEM_DYNA [U4.65.01]
- DEFI_MODELE_GENE [U4.65.02]

## 4.2 Utilisation de modes d'interfaces.

Néanmoins, dans le cas d'un composant présentant des interfaces étendues, les modèles ainsi réduits restent de taille importante. D'autre part, la projection des matrices de masse et de raideur sur ces base de projection fait perdre le caractère creux des matrices assemblées d'origine. Dans ces conditions, il n'est pas toujours intéressant de construire un modèle réduit, comme pour le calcul d'une réponse harmonique, par exemple. En revanche, lorsque le nombre de calculs réalisé autour du modèle augmente, la réduction devient intéressante, surtout lorsqu'on peut encore réduire la taille du problème.

En effet, si l'on reste dans le cadre de la dynamique basse fréquence, l'ensemble des modes de contrainte (ou d'attache) n'est pas nécessaire pour représenter la dynamique du problème. La longueur d'onde des phénomènes devant transiter à l'interface est limitée par celle des phénomène que l'on peut retrouver dans les domaines. On peut donc opérer une sélection judicieuse parmi les modes de contrainte (ou d'attache).

Des méthodes de constructions de ces modes, appelés ici « modes d'interfaces », ont été proposés notamment par Craig & Chang (voir [10]) pour l'approche par sous-structuration, puis par Bourquin et D'Hennezel (voir [11]) dans une optique de décomposition de domaine. La méthode proposée par Craig & Chang présente l'avantage de la simplicité, et a été retenue pour la construction des modèles réduits dans *Code_Aster* avec l'opérateur DEFI_MODELE_GENE [U4.65.02] (OPTION = 'REDUIT'). Cette méthode consiste simplement à projeter les matrices de masse et de raideur du modèle de la sous structure sur la base des modes de contrainte (ou d'attache) et à résoudre le problème aux valeurs propres associé :

$$T^T\left(K-\omega_r^2 M\right)T\,\Phi_r=0 \quad (27)$$

avec



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$T=\begin{bmatrix} -K_{cc}^{-1}K_{ci} \\ I_d \end{bmatrix} \text{ ou } T=\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ci} \\ K_{ic} & K_{ii} \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ I_d \end{pmatrix} \quad (28)$$

Les modes d'interfaces $\Phi_r$ sont classés par rapport à leurs pulsations propres, et une troncature est opérée pour ne sélectionner que les composantes les plus basses fréquences. Les modes de contraintes (ou d'attaches) sont alors avantageusement remplacés par les vecteurs $T\Phi_r$ dans la base de projection. Le gain est réalisé à la fois sur la taille de la matrice (qui peut être sensiblement réduite si l'interface est de grande taille), et sur sa topologie, puisque, par construction, la projection des matrices de masse et de raideur du système sur cette nouvelle base conduit à des matrices diagonales. Seuls les matrices rectangulaires associées au couplage par la masse restent des matrices pleines.

## 4.3 Calcul des modes d'interface

L'approche présentée n'est pas efficace, puisqu'il reste nécessaire de construire les modes de contraintes (ou d'attache), qui sont en nombre important lorsque les interfaces sont étendues, et qu'il faut ensuite projeter les matrices. Quelques solutions ont été proposées et testées avec *Code_Aster* (voir [11]).

La solution retenue consiste à construire un pré-conditionneur du problème pour limiter les calculs de relèvement statique. A partir de la topologie des interfaces, on construit un treillis de poutre topologiquement équivalent à l'interface, et on en calcul les premiers modes. Ces modes sont relevés statiquement sur l'ensemble du modèle, et ce sont ces modes étendus qui sont utilisés en lieu et place de $T$, et permettent d'accélérer considérablement le calcul. Ce point est détaillé dans la documentation de référence R4.06.02 (Sous-structuration dynamique classique).

# 5 Construction d'une base adaptée au problème dissipatif

Lorsque la structure (ou une sous structure) présente des mécanismes d'amortissement, la technique employée pour construire le modèle réduit reste la même, à ceci près que les corrections à prendre en compte sont associées à des efforts internes. On propose de construire $T_d$ en utilisant les premiers modes propres $\Phi$ calculés à partir du modèle de la structure n'incluant pas la dissipation, et un enrichissement associé aux résidus en déplacement induits par ces modes. La construction de ce résidu en déplacement s'inspire de la construction des corrections statiques pour le calcul de la réponse à une sollicitation extérieure, mais en tenant compte des particularités de la réponse recherchée. On ne présente ici que la partie associée à l'enrichissement pour prendre en compte l'amortissement. Dans le cas d'un calcul de réponse, il faut aussi prendre en compte les enrichissements associés aux chargements externes.

## 5.1 Construction d'une base complète sur le modèle des corrections statiques pour l'amortissement hystérétique et/ou visqueux.

On se concentre dans cette section sur les deux modèles d'amortissement utilisables directement dans *Code_Aster*. La construction d'un modèle réduit prenant en compte les variables internes (viscoélasticité générale) sera présentée dans la section suivante.

Les modes propres complexes de la structure vérifient la relation ( 5 ). En assimilant les efforts associés à la partie dissipative à des efforts extérieurs, on peut récrire la relation sous la forme

$$\left[K_e+\lambda_0^2 M\right]\psi=-\left[j\,K_h+\lambda_0 D_v\right]\psi \quad (29)$$

Les efforts extérieurs ont alors une forme particulière, et les modes complexes sont assimilés aux réponses de la structure conservative à ces efforts particuliers.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On cherche donc, de la même façon que celle présentée dans le paragraphe 2.4, à décomposer la réponse sur une base construite à partir des premiers modes propres de la structure, en respectant la règle de troncature de Hurty. En introduisant la matrice de commande des efforts visqueux $B_v$ ,

$$B_v = -\left( j K_h + \lambda_0 D_v \right) \tag{30}$$

on peut écrire directement

$$\left[ K_e + \lambda_0^2 M \right] \psi = B_v \psi \tag{31}$$

Indépendamment de la nature particulière du terme commandant l'excitation ( $\psi$ ), la base de projection pertinente pour résoudre ce problème est de la forme de celle utilisée pour résoudre un problème plus générique qu'on pourrait mettre sous la forme

$$\left[ K_e + s^2 M \right] q(s) = B_v u(s) \tag{32}$$

Pour ce problème particulier, la base, notée $T_v$ , prend alors la forme donnée au paragraphe 2.4, en séparant les composantes liées aux efforts visqueux et aux efforts hystérétiques, soit

$$T_v = \left[ \phi_1 \dots \phi_N \quad -K_e^{-1} K_h \quad -K_e^{-1} D_v \right] \tag{33}$$

Cette base permet de projeter le problème dissipatif complet pour estimer correctement les modes complexes. En revanche, si les zones dissipatives sont largement réparties sur la structure, les matrices $K_h$ et $D_v$ sont de grande taille. La taille de la base $T_v$ est alors en proportion, et son calcul et son utilisation deviennent coûteux.

## 5.2 Prise en compte de la particularité du problème

Pour limiter la taille de la base de réduction à conserver, on considère là encore qu'on ne s'intéresse qu'à une petite partie du spectre de la structure, et qu'en l'occurrence, les longueurs d'ondes des phénomènes transitant à travers les matériaux dissipatifs sont de l'ordre de celles décrites par les premiers modes propres de la structure. On peut donc, de façon analogue à la troncature modale, tronquer l'enrichissement aux excitations qui se décomposent sur les premiers modes propres. Les termes correctifs associés aux modes d'ordres supérieurs peuvent être négligés. On construit donc la base de réduction pour le problème dissipatif à partir des modes propres calculés pour le problème conservatif, et des corrections statiques associés aux efforts d'amortissement calculés pour chaque mode normal. La base de réduction $T_d$ retenue s'écrit donc

$$T_d = \left[ I_d \quad -K_e^{-1} K_h \quad -K_e^{-1} D_v \right] \left[ \phi_1 \dots \phi_N \right] \tag{34}$$

Ces termes d'enrichissement sont aussi appelés résidus statiques. La base ainsi construite permet de décomposer les oscillations libres de la structure en l'absence d'amortissement avec les modes propres $\phi$ , mais aussi de représenter les comportements liés à la présence d'amortissement grâce à la construction du résidu en déplacement autour de la réponse statique des efforts liés à la dissipation.

## 5.3 Filtrage de la base de réduction

La base $T_d$ construite au paragraphe 5.2 peut être utilisée directement pour réaliser la projection du problème complet. Cependant, certains vecteurs peuvent être très colinéaires, entraînant ainsi des problèmes de conditionnement du problème réduit. On peut donc choisir d'orthogonaliser les vecteurs de $T_d$ en calculant les modes du problème homogène non dissipatif réduit sur cette base. Soient $\left( \phi_r, \omega_r \right)$ les modes propres du système réduit

$$T_d^T \left[ K_e - \omega_r^2 M \right] T_d \phi_r = 0 \tag{35}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les pulsations propres de ce problème réduit permettent d'opérer une sélection parmi les vecteurs de $T_d$ pour ne conserver que les vecteurs ayant une influence pour la représentation du comportement basse fréquence. La valeur de troncature indicative est définie par le « critère de Hurty », qui consiste à ne retenir que les vecteurs associés à une fréquence propre inférieure à 1,5 fois la fréquence maximale d'intérêt du problème. En considérant que seules les $N$ premières fréquences propres répondent à ce critère, la base de projection retenue pour le calcul des modes complexes devient

$$T_{dr} = T_d \Phi_r \tag{36}$$

On calcule alors les modes complexes réduits issus de la projection du problème complet sur cette base

$$T_{dr}^T \left[ K_e + j K_h + \lambda_r D_v + \lambda_r^2 M \right] T_{dr} \psi_r = 0 \tag{37}$$

Les modes complexes $\psi$ sont alors approximés par restitution sur les degrés de libertés initiaux

$$\Psi \approx T_{dr} \Psi_r \tag{38}$$

Cette étape, cependant, n'est pas obligatoire. Pour les modèles de petites tailles, ou lorsque le nombre de modes retenu pour l'analyse est faible (<50, pour fixer les idées), elle peut être omise sans dégradation des résultats. Cette étape devient nécessaire quand le modal complexe converge difficilement.

## 5.4 Itérations sur les résidus

La base de réduction $T_{dr}$ définie par les relations ci-dessus constitue un bon point de départ pour le calcul du spectre du modèle complet dissipatif. Cependant, il peut s'avérer que la qualité des résultats obtenus ne soit pas satisfaisante. Les modes calculés sur la base $T_{dr}$ sont en effet une approximation des modes complexes exacts, et les pôles associés peuvent aussi être différents des vrais pôles du système. Pour caractériser cet écart à l'équilibre, on utilise le principe du résidu en effort. Ce résidu en effort $F_r$ est calculé pour chaque mode complexe par

$$\left[ K_e + j K_h + \lambda_r D_v + \lambda_r^2 M \right] T_{dr} \psi_r = F_r \tag{39}$$

Si dans le couple $\left( T_{dr} \psi_r, \lambda_r \right)$ on a un mode propre et une valeur propre, alors le résidu $F_r$ est nul par définition. Dans le cas contraire, on peut construire une mesure de l'écart à l'équilibre à partir de la réponse statique de la structure à ce chargement. On note $R_r$ le résidu en déplacement associé à chaque mode complexe calculé. Par définition, on a

$$K_e R_r = F_r \tag{40}$$

Une mesure de l'écart à l'équilibre est donnée par l'énergie potentielle élastique de la structure, soit

$$E_r = \frac{1}{2} \left\| R_r^T K_e R_r \right\|^2 \tag{41}$$

Si cet écart dépasse un critère préalablement défini (comme un pourcentage de la première pulsation propre, par exemple), alors on enrichit à nouveau la base de réduction en utilisant les parties réelle et imaginaire des résidus en déplacements associés aux modes présentant un écart à l'équilibre important. On définit ainsi un processus itératif tel que

$$T_{dr(N+1)} = \left[ T_{dr(N)} \quad \Re(R_r) \quad \Im(R_r) \right] \tag{42}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 5.5 Réduction de modèles incluant des variables internes (ou intermédiaires)

Les méthodes de réductions permettent également, moyennant quelques développements, de prendre en compte des modélisations de comportement non disponible en l'état dans *Code_Aster.* On peut ainsi envisager de réaliser des calculs couplant la mécanique avec d'autres physiques, dans la mesure où les phénomènes complémentaires peuvent être décrites à l'aide des degrés de liberté représentant les phénomènes mécaniques.

Ce cas d'application des méthodes de réduction permet essentiellement de présenter la démarche dans un cas plus complet, lorsque les propriétés du matériau dépendent du temps, ou de la fréquence des sollicitations. Ce type d'approche permet également de généraliser le modèle d'amortissement hystérétique. Dans la section précédente, on considère un module d'Young et un taux de perte constant. On peut enrichir cette relation en postulant que le module d'Young et le taux de perte sont des grandeurs qui dépendent de la fréquence. C'est par exemple le cas pour les modèles de comportement de matériaux viscoélastique. Ces modèles donnent accès à un modèle dynamique causal, qui est donc utilisable pour traiter les réponses harmoniques et transitoires de structures avec des matériaux viscoélastiques.

### 5.5.1 Introduction rapide à la viscoélasticité linéaire

Ce modèle repose sur l'existence d'une loi de comportement permettant de déterminer l'état de contrainte en fonction de l'historique des déformations :

$$\sigma = E_\infty \epsilon(t) - \int_0^t E_v(t-\tau) \frac{\partial \epsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \ , \tag{43}$$

où $E_\infty$ représente le module d'Young haute fréquence, et $E_v$ le module de relaxation. Ce module peut être représenté dans le domaine temporel par une série de Prony :

$$E_v(t) = E_r + \sum_{k=1}^{N} E_k \exp(-t/\tau_k) \ , \tag{44}$$

Le module d'Young peut se mettre sous diverses formes [12]. Dans notre cas, on choisira la représentation issue de la modélisation à partir du champs de déplacement anélastique [14]. On peut dès lors introduire des variables internes $\epsilon_{vk}$ pour représenter les termes de relaxation, la loi de comportement s'écrit alors

$$\sigma = E_\infty \epsilon(t) - \sum_{k=1}^{n} E_k \epsilon_{vk}(t) \ , \tag{45}$$

où chaque $\epsilon_{vk}(t)$ suit une loi de relaxation par rapport à $\epsilon(t)$

$$\tau_k \dot{\epsilon}_{vk} + \epsilon_{vk} - \frac{E_\infty}{E_k} \epsilon = 0 \tag{46}$$

Dans le domaine fréquentiel, la loi de comportement s'écrit simplement

$$\sigma(s) = E(s) \epsilon(s) \ , \tag{47}$$

Avec

$$E(s) = E_\infty - \sum_{k=1}^{n} E_k \frac{\omega_k}{s + \omega_k} \tag{48}$$

Les paramètres caractéristiques du matériaux sont accessibles à partir d'essais dynamique en traction et en cisaillement, ou par identification des nomogrammes fournis par les fabricants.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette forme de loi permet de construire un modèle d'ordre deux compatible avec *Code_Aster*. En revanche, la mise en forme n'est pas directe. Pour construire ce modèle, il faut introduire des variables internes, qui font le lien entre les degrés de libertés physiques, impactés par la présence d'un matériau viscoélastique, et les grandeurs définissant le comportement. Pour chaque paramètre interne, on introduit une variable $q_{vk}$ , qui décrit l'état de relaxation du matériau.

En repartant des relations ( 47 ) et ( 48 ), on écrit

$$\sigma(s)=E_\infty\epsilon(q,s)-\sum_{k=1}^{n}E_k\frac{\omega_k}{s+\omega_k}\epsilon(q,s)=E_\infty\epsilon(q,s)-\sum_{k=1}^{n}E_k\epsilon(q_{vk},s) \quad (49$$

L'opérateur $\epsilon(q,s)$ est linéaire par rapport aux déplacements. Pour une loi de comportement modélisée par l'équation ( 48 ), le lien entre chaque degré de liberté interne et le degré de liberté physique qui lui correspond et linéaire, piloté par l'équation suivante :

$$q_{vk}(s)=q(s)\frac{\omega_k}{s+\omega_k} \quad (50)$$

Les grandeurs $E_\infty$ , $E_k$ et $\omega_k$ sont des paramètres intrinsèques du matériau, associés aux évolutions de raideurs et aux durées de relaxation. Les degrés de libertés $q_{vk}$ constituent un sous ensemble de degrés de libertés associé au $k^{ième}$ couple de paramètres $(E_k,\omega_k)$ .

En introduisant ces degrés de libertés internes, et en distinguant les parties purement élastiques et les parties viscoélastiques, le système dynamique s'écrit

$$s^2\begin{bmatrix}M&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\q_{vk}\end{Bmatrix}+s\begin{bmatrix}0&0\\0&\frac{\alpha_k}{\omega_k}K_v\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\q_{vk}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}K_e+K_v&-\alpha_kK_v\\-\alpha_kK_v&\alpha_kK_v\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q\\q_{vk}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F\\0\end{Bmatrix} \quad (51)$$

avec $\alpha_k=E_k/E_\infty$

$K_v$ correspond à la matrice de raideur associée aux degrés de libertés des matériaux viscoélastiques assemblée avec le module de Young $E_\infty$ .

On peut illustrer les relations décrivant ce comportement en considérant un système masse-ressort pour lequel le ressort possède un comportement qui peut être représenté par $n$ variables internes :

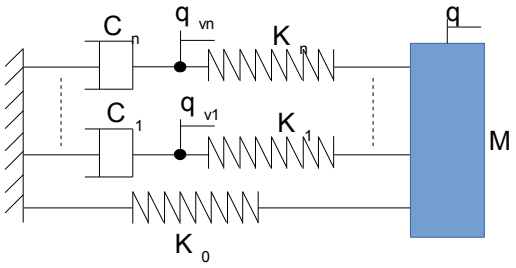



**Figure 1: Représentation du modèle viscoélastique à variables internes pour un système à un degré de liberté de déplacement et n variables internes**

Pour cette représentation simplifiée, on a les relations suivantes

$$K_\infty=K_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_kK_v,\ K_k=\alpha_kK_v \text{ et } C_k=\frac{\alpha_k}{\omega_k}K_v \quad (52)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 5.5.2 Principes de construction d'une base de réduction adaptée

En l'état, *Code_Aster* ne permet pas de prendre en compte de telles lois de comportement pour les analyses dynamiques linéaires. La solution adoptée pour résoudre ce problème consiste à construire une base de réduction adaptée.

Cette base de réduction est construite autour de modes propres et des réponses statiques de la structure aux efforts viscoélastiques engendrés par les modes, de la même façon que pour la prise en compte de l'amortissement visqueux ou hystérétique. Les différents comportements retenus pour construire la base de réduction correspondent à des états limites du système.

Pour représenter le comportement quasi statique, on suppose que les amortisseurs associés aux degrés de libertés internes ne travaillent pas. Les degrés de libertés internes suivent quasi statiquement les modes du système en l'absence des amortisseurs, en supposant que les degrés de liberté internes sont libres. Les premiers vecteurs pris en compte sont donc les modes libres du système que l'on peut représenter de la façon suivante :

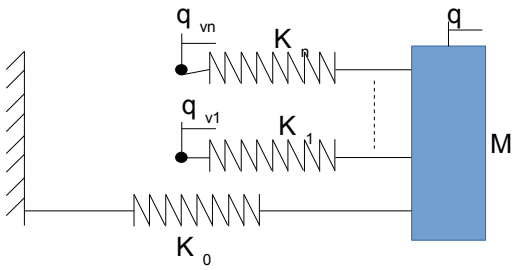



**Figure 2: Calcul des modes « libres ».Représentation du système à un seul degré de liberté équivalent.**

Pour représenter le comportement à l'infini, on suppose que les amortisseurs associés aux degrés de libertés internes sont bloqués. Les degrés de libertés internes sont donc supposés encastrés. Les vecteurs pris en compte sont donc les modes libres du système que l'on peut représenter de la façon suivante :

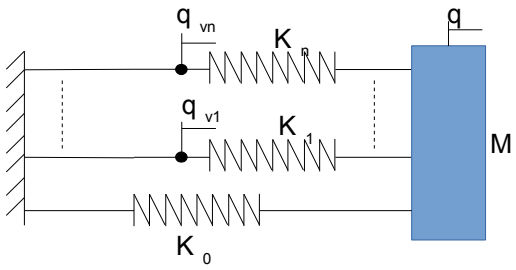



**Figure 3: Calcul des modes « encastrés ».Représentation du système à un seul degré de liberté équivalent.**

Enfin, pour prendre en compte le comportement des amortisseurs associés aux états internes, on calcule la correction statique associée aux mouvements des états internes définis pour les premiers modes de la structure.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

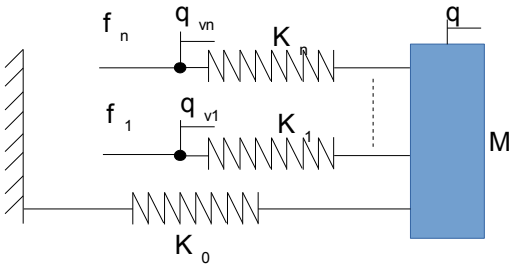



**Figure 4: Calcul des corrections statiques « viscoélastiques ».Représentation du système à un seul degré de liberté équivalent.**

De la même façon qu'on a défini un enrichissement associé aux degrés de libertés appartenant au matériau possédant un amortissement hystérétique, on peut associer un terme de correction statique, à l'image de ceux donnés par la relation ( 33 ), pour chaque couple $(E_k, \omega_k)$ de paramètres internes. La base de réduction $T_{ve}$ pour le modèle viscoélastique prend alors la forme

$$[T_{ve}]=\begin{bmatrix}\Phi_l & \Phi_e & T_{pk}\\ \Phi_{lv} & 0 & T_{vk}\end{bmatrix},\ \forall\, k\in[1,n]\,. \tag{53}$$

Les sous matrices $T_{pk}, T_{vk}$ sont construites à partir des problèmes statiques

$$\begin{bmatrix}K_e+K_v & -\alpha_1 K_v & -\alpha_k K_v & -\alpha_n K_v\\ -\alpha_1 K_v & \alpha_1 K_v & 0 & 0\\ -\alpha_k K_v & 0 & \alpha_k K_v & 0\\ -\alpha_n K_v & 0 & 0 & \alpha_n K_v\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_{pk}\\ T_{v1k}\\ T_{vkk}\\ T_{vnk}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ F_{vk}\\ 0\end{Bmatrix} \tag{54}$$

avec le chargement défini par

$$\{F_{vk}\}=\frac{\alpha_k}{\omega_k}[K_v]\{\Phi_{lv}\} \tag{55}$$

On peut alors résoudre le problème projeté sur la base $T_{ve}$, problème qui prend en compte le comportement viscoélastique global défini pour les matériaux.

### 5.5.3 Construction de la correction associée aux efforts statiques

Grâce à la topologie de la matrice de raideur complète, on peut trouver simplement une expression de la matrice inverse. C'est une matrice ou chaque bloc vaut

$$\left(K_e+K_v\left(1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\right)^{-1}, \tag{56}$$

que l'on notera $K_0^{-1}$, à l'exception des blocs sur la diagonale pour les degrés de libertés internes, où le bloc vaut $1/\alpha_k K_v^{-1}+K_0^{-1}$. On notera d'ailleurs que $K_0$ correspond à la raideur statique du modèle.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour chaque couple de paramètres $(E_k, \omega_k)$, la solution du système (54) peut se mettre sous la forme

$$\begin{Bmatrix} T_p \\ T_{v1k} \\ T_{vkk} \\ T_{vnk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0^{-1} & K_0^{-1} & K_0^{-1} & K_0^{-1} \\ K_0^{-1} & 1/\alpha_1 K_v^{-1} + K_0^{-1} & K_0^{-1} & K_0^{-1} \\ K_0^{-1} & K_0^{-1} & 1/\alpha_k K_k^{-1} + K_0^{-1} & K_0^{-1} \\ K_0^{-1} & K_0^{-1} & K_0^{-1} & 1/\alpha_n K_n^{-1} + K_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_k/\omega_k [K_v] \Phi_{lv} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{57}$$

On a ainsi pour chaque groupe de degrés de liberté des expressions simples à calculer. Pour les degrés de libertés physiques, il vient :

$$T_{pk} = \frac{\alpha_k}{\omega_k} K_0^{-1} K_v \Phi_{lv} \tag{58}$$

Et pour les sous ensembles d'états internes, on a :

$$T_{vlk} = T_{pk} \quad \forall l \neq k \tag{59}$$

Et

$$T_{vkk} = T_{pk} + \frac{1}{\omega_k} \Phi_{lv} \tag{60}$$

pour le sous ensemble $q_{vk}$, quand on s'intéresse au couple $(E_k, \omega_k)$

Chaque vecteur est ainsi construit grâce au calcul de la réponse du système initial libre, tel que présenté sur la figure 2, à une sollicitation elle même construite à partir des modes libres du même système.

$$[T_{ve}] = \begin{bmatrix} \Phi_l & \Phi_e & T_{p1} & T_{pk} & T_{pn} \\ \Phi_l & 0 & T_{v1} & T_{pk} & T_{pn} \\ \Phi_l & 0 & T_{p1} & T_{vk} & T_{pn} \\ \Phi_l & 0 & T_{p1} & T_{pk} & T_{vn} \end{bmatrix} \tag{61}$$

**Note : Calcul des matrices projetées**

Après avoir construit les blocs de la base de projection $T_{ve}$, il ne reste qu'a construire les matrices réduites, en détaillant le calcul de la projection.

Pour la matrice de masse réduite $\tilde{M}$, on a rapidement

$$\tilde{M} = T_{ve}^T \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_{ve} = \begin{bmatrix} \Phi_l^T \\ \Phi_e^T \\ T_{p1}^T \\ T_{pk}^T \\ T_{pn}^T \end{bmatrix} [M] \begin{bmatrix} \Phi_l & \Phi_e & T_{p1} & T_{pk} & T_{pn} \end{bmatrix} \tag{62}$$

Le calcul de $\tilde{M}$ est donc réalisé par simple projection de la matrice de masse du problème sur la base contenant les modes libres, les modes encastrés, et les corrections $T_{pk}$.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

De la même façon, la construction de la matrice d'amortissement réduite $\tilde{C}$ est assez simple, du fait de sa topologie. On a donc directement

$$\tilde{C}=T_{ve}^{T}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{\omega_k}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&K_v&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)T_{ve}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{\omega_k}\left[\tilde{C}_k\right]\right) \quad (63)$$

Où $\tilde{C}_k$ est donné simplement par

$$\left[\tilde{C}_k\right]=\frac{\alpha_k}{\omega_k}\begin{bmatrix}\Phi_{lv}^{T}\\0\\T_{p1}^{T}\\T_{vk}^{T}\\T_{pn}^{T}\end{bmatrix}\left[K_v\right]\left[\Phi_{lv}\quad 0\quad T_{p1}\quad T_{vk}\quad T_{pn}\right] \quad (64)$$

Pour la matrice $\tilde{K}$, après simplifications, il vient

$$\left[\tilde{K}\right]=\begin{bmatrix}\Phi_{l}^{T}\\\Phi_{e}^{T}\\T_{p1}^{T}\\T_{pk}^{T}\\T_{pn}^{T}\end{bmatrix}\left[K_0\right]\left[\Phi_l\quad\Phi_e\quad T_{p1}\quad T_{pk}\quad T_{pn}\right]+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\begin{bmatrix}0\\\Phi_e^{T}\\0\\\frac{-1}{\omega_k}\Phi_l^{T}\\0\end{bmatrix}\left[K_v\right]\left[0\quad\Phi_e\quad 0\quad\frac{-1}{\omega_k}\Phi_l\quad 0\right]\right) \quad (65)$$

## 5.5.4 Mise en œuvre informatique

Les détails pour la mise en œuvre de ces techniques dans *Code_Aster* sont présentés dans cette section. En effet, *Code_Aster* permet de résoudre le problème dissipatif réduit, mais sa construction n'est pas directe. En effet, l'ajout des états internes complique la construction du modèle réduit, puisqu'on ne peut pas assembler directement les matrices pour le problème complet, pas plus qu'on ne peut assembler directement les vecteurs associés à la base de réduction, en particulier les corrections associées aux efforts viscoélastiques définies par les relations (54) et (55). Il faut donc d'abord construire les vecteurs de la base de projection, puis construire ensuite les matrices projetées.

La solution adoptée consiste à assembler différents modèles, afin de pouvoir résoudre plusieurs systèmes successifs, et construire les matrices réduites pour chaque sous système par simple sommation. Un exemple détaillé pour la mise en œuvre de ces méthodes est présenté avec l'étude n°3185 présente dans la base des études.

### 5.5.4.1 Définition des matériaux

Pour réaliser l'ensemble de ces calculs avec *Code_Aster*, il faut assembler la matrice de masse $M$, ainsi que les différentes matrices de raideurs $K_v$ et $K_0$, indispensables aux calculs des modes dans les différentes configurations, ainsi qu'au calculs des termes correctifs.

Par conséquent, il est nécessaire de définir plusieurs « sous-matériaux », tous rattachés au matériau viscoélastique de départ, pour assembler ces matrices. Pour chaque matériaux, on pourra utiliser



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

deux définitions. La première, qui correspond au comportement quasi statique, utilisée pour le calcul de $K_0$, et une seconde, utilisée pour le calcul de $K_v$. Dans l'exemple de l'étude 3185 présente dans la base, on utilise l'ISD 112. Les deux matériaux sont donc défini par :

```
ISD112_0=DEFI_MATERIAU(…) #-- Pour l'assemblage de K0
ISD112_v=DEFI_MATERIAU(…) #-- Pour l'assemblage de Kv
```

On aura préalablement déclaré les différents modules d'Young $E_k$ et les fréquences $\omega_k$ définissant le comportement du matériau :

```
Ek=[E_0,E_1,E_2,E_3,E_4,E_5]
E_I=sum(Ek)
omk=[om1,om2,om3,om4,om5]
for i1 in range(len(omk)) :
    ak[i1]=Ek[i1+1]/E_I
```

Cependant, par construction pour notre problème, les composantes de $K_v$ associés à des degrés de libertés n'appartenant pas au matériau viscoélastique doivent être nulles. Pour satisfaire cette condition, on va définir les autres matériaux en double. Une première définition du matériau complète sera utilisée pour l'assemblage de $K_0$, et une seconde, où le terme de raideur sera choisi très faible, bien inférieur à la valeur de $E_\infty$ retenue pour assembler $K_v$. Dans l'exemple, le matériau choisi est l'acier. On aura donc deux définitions pour le matériaux :

```
ACIER_0=DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(E=2.1E11,NU=0.3,RHO=7800.,AMOR_HYST=0.0,),)
```

Puis on définira un second matériau pour lequel les propriétés de raideurs sont nulles :

```
ACIER_v=DEFI_MATERIAU(ELAS=_F(E=0.,NU=0.3,RHO=7800.,AMOR_HYST=0.0,),)
```

Les différentes matrices élémentaires du problèmes sont alors construites sur la base de ces différents matériaux. On défini un premier champ matériau prenant en compte l'ensemble des propriétés pour le problème statique

```
CHMAT_0=AFFE_MATERIAU(…,AFFE=(_F(GROUP_MA=…,MATER=ACIER_0,),
       _F(GROUP_MA=…,MATER=ISD112_0,),),)
```

et un second pour l'assemblage de $K_v$ :

```
CHMAT_v=AFFE_MATERIAU(…,AFFE=(_F(GROUP_MA=…,MATER=ACIER_v,),
       _F(GROUP_MA=…,MATER=ISD112_v,),),)
```

#### 5.5.4.2 Calcul des modes « libres » et « encastrés »

Une fois les matériaux définis, il suffit d'assembler les différentes matrices de rigidité, de masse.

```
KELEM_0=CALC_MATR_ELEM(OPTION='RIGI_MECA',…,CHAM_MATER=CHMAT_0,…,)
KELEM_v=CALC_MATR_ELEM(OPTION='RIGI_MECA',…,CHAM_MATER=CHMAT_v,…,)
MELEM=CALC_MATR_ELEM(OPTION='MASS_MECA',…,CHAM_MATER=CHMAT_0,…,)

K_0=ASSE_MATRICE(MATR_ELEM=KELEM_0,NUME_DDL=…,)
K_v=ASSE_MATRICE(MATR_ELEM=KELEM_v,NUME_DDL=…,)
M=ASSE_MATRICE(MATR_ELEM=MELEM,NUME_DDL=…,)
```

La matrice $K_e + K_v$ est obtenue par combinaison linéaire :

```
#-- pour avoir Ke+Kv = Ko + Kv * (somme alpha_k entre 1 et n)
K_Ev=COMB_MATR_ASSE(COMB_R=(_F(MATR_ASSE=K_0,COEF_R=1.,),
                        _F(MATR_ASSE=K_v,COEF_R=sum(ak),),),)
```

On peut donc maintenant calculer les modes « libres » et les modes « encastrés ».



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

#### 5.5.4.3 Calcul de la correction $T_p$ associée aux degrés de libertés physiques

L'ensemble des termes $T_{pk}$ et $T_{vk}$, $\forall k$, est construit par combinaison linéaire des modes propres « libres », et du terme correctif $K_0^{-1} K_v \Phi_l$. Ce dernier terme est obtenu par bouclage sur les vecteurs de $\Phi_l$ :

```
for n in range(Nb):
   #-- Extraction des modes --#
   Phi_l[n]=CREA_CHAMP(TYPE_CHAM='nœu_DEPL_R',
      NUME_DDL=Num,
      OPERATION='EXTR',
      RESULTAT=Mo_lib,
      NOM_CHAM='DEPL',
      NUME_MODE=n+1,)

   #-- calcul de Kv*Phi --#
   KvPhi[n]=PROD_MATR_CHAM(MATR_ASSE=K_v, CHAM_NO=Phi_l[n],)

   #-- transformation en chargement --#
   Fv[n]=AFFE_CHAR_MECA(MODELE=MODELE, VECT_ASSE=KvPhi[n],)
   nom_cas_p='Tp_'+str(n+1); #-- DDL physiques

   #-- Calcul des Ko\(Kv*Phi) --#
   if n==0:
      Tp=MACRO_ELAS_MULT(MODELE=MODELE,
         CHAM_MATER=CHMAT_0,
          NUME_DDL=Num,
         CHAR_MECA_GLOBAL=COND_LIM,
         CAS_CHARGE=(_F(NOM_CAS=nom_cas_p, CHAR_MECA=Fv[n],),),
      )
   else:
      Tp=MACRO_ELAS_MULT(reuse=Tp,
         MODELE=MODELE,
         CHAM_MATER=CHMAT_0,
          NUME_DDL=Num,
         CHAR_MECA_GLOBAL=COND_LIM,
         CAS_CHARGE=(_F(NOM_CAS=nom_cas_p, CHAR_MECA=Fv[n],),),
      )
```

#### 5.5.4.4 Construction des bases de projections complètes

Les « briques » élémentaires pour le calcul des matrices réduites sont maintenant construites, il ne reste qu'a construire les différentes bases modales. On résume ici les principales étapes de cette construction.

```
#-------------------------------------------------------------#
#-- construction des bases
#
# base 1 Tc1 = [Phi_l Phi_e Tp1… Tpn] - calcul de Mg et Kg
# base 2 Tc2(k)= [Phi_l 0 Tp1 Tvk Tpn] - calcul de Ck
# base 3 Tc3(k)= [0 Phi_e 0 -Phi_l/omk 0] - calcul de Kk
#-------------------------------------------------------------#

Zero=CREA_CHAMP(…,ASSE = (_F(CHAM_GD = Phi_l[0],
      TOUT ='OUI',
      CUMUL='OUI',
      COEF_R = 0.0),),)

#-- Debut de construction de Tc1
#-- Extraction des modes "encastres" : Phi_e
```



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

```
    #-- Extraction des vecteurs de Tp : Tp_n
#-- Construction de modes identiquement nuls : Mo_zero
for n in range(Nb):
    Phi_e[n]=CREA_CHAMP(…,OPERATION='EXTR',
        RESULTAT=Mo_enc,
        NUME_MODE=n+1,)

    nom_cas_p='Tp_'+str(n+1);

    Tp_n[n]=CREA_CHAMP(…,OPERATION='EXTR',
        RESULTAT=Tp,
        NOM_CAS=nom_cas_p,)

    Mo_zero=CREA_RESU(…,
        OPERATION='AFFE',
        TYPE_RESU='MODE_MECA',
        NOM_CHAM='DEPL',
        AFFE=_F(CHAM_GD=Zero),)

    Tc1=CREA_RESU(…,
        OPERATION='AFFE',
        TYPE_RESU='MULT_ELAS',
        NOM_CHAM='DEPL',
        AFFE=_F(CHAM_GD=Phi_e[n]),)


#-- Debut de construction de Tc2(k) et Tc3(k)
for k in range(len(ak)): #-- boucle sur les etats internes
    for n in range(Nb):
        Tc2[k]=CREA_RESU(…,OPERATION='AFFE',
               TYPE_RESU='MULT_ELAS',
               NOM_CHAM='DEPL',
               AFFE=_F(CHAM_GD=Zero),)

        Tc3[k]=CREA_RESU(…,OPERATION='AFFE',
               TYPE_RESU='MULT_ELAS',
               NOM_CHAM='DEPL',
               AFFE=_F(CHAM_GD=Phi_e[n]),)

#-- Complement de Tc1 --#
for k in range(len(ak)):
    for n in range(Nb):
        Temp= CREA_CHAMP(…,OPERATION= 'ASSE',
               ASSE = (_F(CHAM_GD = Tp_n[n],
               TOUT ='OUI',
               CUMUL='OUI',
               COEF_R = ak[k]/omk[k]),),)

        Tc1=CREA_RESU(…,OPERATION='AFFE',
               TYPE_RESU='MULT_ELAS',
               NOM_CHAM='DEPL',
               AFFE=_F(CHAM_GD=Temp),
        )

        DETRUIRE(CONCEPT=_F(NOM=('Temp',),),)
```



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

```
#-- Complement de Tc2(k) et Tc3(k) --#
for k in range(len(ak)):
   for l in range(len(ak)):
      if k==l :
         coef_mo = 1/omk(k)
      else :
         coef_mo=0.

      for n in range(Nb):
         #-- Tc2[k]
         Temp= CREA_CHAMP(…,OPERATION= 'ASSE',
                ASSE = (
                    _F(…,CHAM_GD = Phi_l[n], COEF_R = coef_mo,),
                    _F(…,CHAM_GD = Tp_n[n], COEF_R = ak[k]/omk[k]),),),)

         Tc2[k]=CREA_RESU(…,OPERATION='AFFE',
                TYPE_RESU='MULT_ELAS',
                AFFE=_F(CHAM_GD=Temp),)

         DETRUIRE(CONCEPT=_F(NOM=('Temp',),),)

         #-- Tc3[k]
         Temp= CREA_CHAMP(…,OPERATION= 'ASSE',
                ASSE = (…,_F(CHAM_GD = Phi_l[n], COEF_R = -coef_mo),),)

         Tc3[k]=CREA_RESU(…,OPERATION='AFFE',
                TYPE_RESU='MULT_ELAS', NOM_AFFE=_F(CHAM_GD=Temp),)

         DETRUIRE(CONCEPT=_F(NOM=('Temp',),),)


   #-- Definition des bases de projections
   BM_Tc1=DEFI_BASE_MODALE(RITZ=(_F(MODE_MECA=Mo_lib,),
          _F(MULT_ELAS=Tc1,),), NUME_REF=Num,)

   BM_Tc2[k]=DEFI_BASE_MODALE(RITZ=(_F(MODE_MECA=Mo_lib,),
          _F(MULT_ELAS=Tc2[k],),), NUME_REF=Num,)

   BM_Tc3[k]=DEFI_BASE_MODALE(RITZ=(_F(MODE_MECA=Mo_zero,),
          _F(MULT_ELAS=Tc3[k],),), NUME_REF=Num,)


   #-- Construction de Ck par projection de Kv sur Tc2(k)
   nom_C='Ck_' + str(k)
   PROJ_BASE(BASE=BM_Tc2[k], NB_VECT=3*Nb, PROFIL='PLEIN',
          MATR_ASSE_GENE=(_F(MATRICE=CO(nom_C), MATR_ASSE=K_v,),),
   )
   #-- Construction de Kk par projection de Kv sur Tc2(k)
   nom_K='Kk_' + str(k)
   PROJ_BASE(BASE=BM_Tc3[k], NB_VECT=3*Nb, PROFIL='PLEIN',
          MATR_ASSE_GENE=(_F(MATRICE=CO(nom_K), MATR_ASSE=K_v,),),)
```

Il ne reste qu'à sommer l'ensemble des matrices élémentaires $Ck$, et ajouter toutes les $Ck$ à la matrice $Kg$, et a résoudre le problème réduit. Cependant, pour que la numérotation de toutes ces matrices soient cohérentes, il convient de procéder à partir de matrices toutes projetées sur la même base. On projette donc trois matrices sur $\mathrm{BM_Tc1}$, afin de construire ensuite les matrices de masse, d'amortissement et de raideur réduites :

```
PROJ_BASE(BASE=BM_Tc1,
```



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

```
        NB_VECT=3*Nb,
        PROFIL='PLEIN',
        MATR_ASSE_GENE=(
            _F(MATRICE=CO('M_g'), MATR_ASSE=M,),
            _F(MATRICE=CO('K_g'), MATR_ASSE=K_0,),
            _F(MATRICE=CO('C_g'), MATR_ASSE=K_v,),),)

Num_gene=NUME_DDL_GENE(BASE=BM_Tc1, NB_VECT=(2+len(ak))*Nb,)
```

La somme de ces matrices est réalisée après extraction des différentes matrices projetées des concepts associés :

```
Kt=K_g.EXTR_MATR_GENE()
Ct=0*C_g.EXTR_MATR_GENE()

for k in range(len(ak)) :
   exec('Ct=Ct+ak[k]/omk[k]*Ck_' + str(k) + '.EXTR_MATR_GENE()')
   exec('Kt=Kt+ak[k]*Kk_' + str(k) + '.EXTR_MATR_GENE()')
```

Puis réintroduction des matrices dans les concepts :

```
C_g.RECU_MATR_GENE(Ct)
K_g.RECU_MATR_GENE(Kt)

Mo_c_g=CALC_MODES(MATR_RIGI=K_g,
   MATR_MASS=M_g,
   MATR_AMOR=C_g,
   TYPE_RESU='DYNAMIQUE',
   OPTION='TOUT',
   SOLVEUR_MODAL=_F(METHODE='QZ'),
   CALC_FREQ=_F(SEUIL_FREQ=1e-6),
   VERI_MODE=_F(STOP_ERREUR='NON'),
)
```

#### 5.5.4.5 Commentaires

Cette approche est pour l'instant réservée aux utilisateurs expérimentés, puisque la réduction de modèle en présence d'états internes peut conduire à des comportements singuliers. Cette présentation permet néanmoins de montrer les possibilités offertes par *Code_Aster* en terme de modularité.
La recherche de valeurs propres ne peut se faire qu'avec certains paramétrages de l'opérateur de recherche de valeurs propres : **CALC_MODES** [U4.52.02].
La documentation de référence [R5.01.02] précise les types de problèmes qu'on peut traiter et les paramétrages possibles.
Cependant, pour le calcul des modes propres du modèle réduit, il est recommandé d'utiliser le solveur plein (`METHODE= 'QZ'`) en recherchant toutes les valeurs propres (`OPTION='TOUT'`).On notera par ailleurs que les choix de conceptions de `CALC_MODES` font que les pôles réels sont filtrés, et ne sont pas affichés dans les résultats.

# 6 Cas test pour *Code_Aster*

Pour mettre en œuvre le calcul de modes complexes sur un modèle réduit, on introduit un exemple simple. Le calcul des modes sur cette structure sera réalisé avec *Code_Aster.* On comparera les résultats obtenus en utilisant d'abord le modèle complet, puis différents modèles réduits. On détaillera ensuite le fichier de commande type permettant de réaliser ce calcul, en insistant sur les points non abordés dans la documentation officielle.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 6.1 Note sur les études présentées

Les fichiers de commande utilisés pour les calculs des modes complexes des modèles réduits sont disponibles dans la base des études, sous le numéro d'étude 3185. Ils ne présentent pas une manière optimisée de réaliser les calculs, en particulier dans le calcul des résidus et la construction des bases de projection. Sur ce point, on rappelle que des développements ont été étudiés pour optimiser cette procédure.

Cependant, il s'agit d'illustrer la démarche pour permettre à l'utilisateur de reproduire et d'adapter la méthodologie.
Les principaux points d'intérêt sont mis en lumière. Il s'agit principalement de :

- La définition des matériaux : On doit en effet définir « doublement » les matériaux pour réaliser le calcul des résidus
- Il faut assigner un amortissement hystérétique à chaque matériau, sous peine que celui ci ne soit pas correctement pris en compte. Pour les matériaux non dissipatifs, il faut donc fixer un amortissement hystérétique nul.
- Les options pour le solveur de modes propres : Ce dernier doit être utilisé avec l'option « CENTRE » uniquement, même si les modes recherchés sont les premiers de la structure Les autres options ne sont pas supportées par le solveur.

## 6.2 Exemple numérique avec amortissement hystérétique

L'exemple retenu pour cette étude est une plaque carrée de 1 mètre de coté et de 6 centimètres d'épaisseur, composée d'un matériau sandwich acier / matériau viscoélastique / acier. Les couches sont linéaires, élastiques et isotropes, parfaitement collées et d'épaisseur 2 centimètres. Le modèle éléments finis est présenté sur la Figure 6.2-a. Cette plaque est encastrée sur un bord, et on s'intéresse aux 10 premiers modes de cette structure. Le module d'Young du matériau viscoélastique n'est pas réaliste. Il a été ajusté pour obtenir des amortissements raisonnables, malgré l'épaisseur de la couche. Ces propriétés sont rappelées dans le Tableau 6.2-1.

| Matériau | Module de Young ( $Pa$ ) | Coefficient de Poisson | Masse volumique ( $kg.m^{-3}$ ) | Taux de perte |
|---|---|---|---|---|
| Acier | $2{,}1.10^{11}$ | 0,3 | 7800 | 0,0 |
| Visco | $1{,}5.10^{10}$ | 0,49 | 1400 | 1,0 |

**Tableau 6.2-1 : Propriétés des matériaux utilisés pour le calcul.**

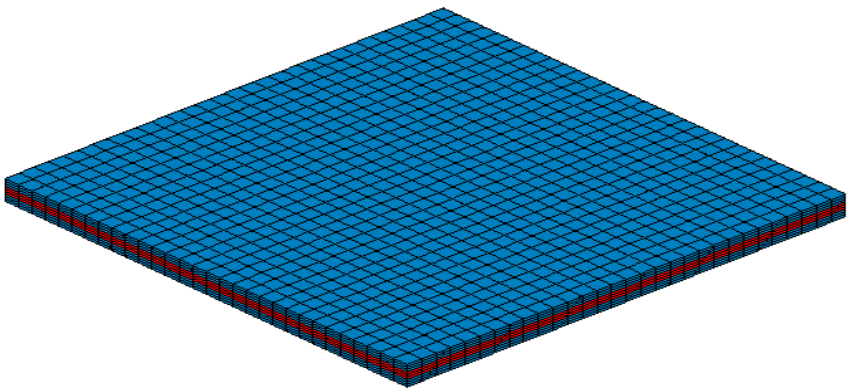


**Figure 6.2-a : Modèle E.F. de la structure de référence.**

Le modèle est construit en utilisant des éléments volumiques linéaires, avec un total de 9610 nœuds, soient 27900 degrés de liberté.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les 10 premiers modes de la structure amortie sont calculés en utilisant *Code_Aster*. Dans chaque cas, on réalise le calcul sur un modèle réduit construit à partir des 20 premiers modes normaux uniquement (base $T_{20}$ ), et un modèle réduit construit à partir des 10 premiers modes normaux enrichi avec les résidus associés à ces 10 modes normaux (base $T_{10+10}$ ). Un calcul de référence réalisé avec le modèle complet non réduit est également réalisé. Les bases de réductions utilisées sont donc

$$T_{20}=[\Phi_1 \cdots \Phi_{20}] \tag{66}$$

et

$$T_{10+10}=\left[[\Phi_1 \cdots \Phi_{10}] \quad K_e^{-1} K_h [\Phi_1 \cdots \Phi_{10}]\right] \tag{67}$$

Les résultats obtenus avec les différents modèles sont présentés dans le Tableau 6.2-2 et le Tableau 6.2-3 .

| Complet | Base $T_{20}$ | Base $T_{10+10}$ | Erreur relative complet/modes (%) | Erreur relative complet/résidus (%) |
|---|---|---|---|---|
| 61,84 | 61,39 | 61,84 | -0,73 | 0 |
| 138,71 | 135,24 | 138,7 | -2,5 | -0,01 |
| 357,37 | 345,84 | 357,36 | -3,23 | 0 |
| 449,34 | 436,52 | 449,29 | -2,85 | -0,01 |
| 485,45 | 465,42 | 485,41 | -4,13 | -0,01 |
| 533,39 | 533,27 | 533,4 | -0,02 | 0 |
| 803,6 | 764,05 | 803,49 | -4,92 | -0,01 |
| 935,99 | 886,65 | 935,76 | -5,27 | -0,02 |
| 998,4 | 949,07 | 998,24 | -4,94 | -0,02 |
| 1053,3 | 995,94 | 1053,2 | -5,45 | -0,01 |

**Tableau 6.2-2 : Fréquences propres (en Hz) du modèle sandwich.**

Les fréquences calculées à partir du modèle réduit sur 10 modes et 10 résidus sont quasiment identiques à celles calculées à partir du modèle complet. Les fréquences obtenues à partir du modèle réduit sur la base des 20 premiers modes normaux sont raisonnables, mais présentent néanmoins une erreur significative.

| Complet | Base $T_{20}$ | Base $T_{10+10}$ | Complet/modes | Complet/résidus |
|---|---|---|---|---|
| 1,4 | 2,16 | 1,4 | 54,29 | 0 |
| 3,78 | 6,07 | 3,74 | 60,58 | -1,06 |
| 4,95 | 8,07 | 4,93 | 63,03 | -0,4 |
| 4,3 | 6,9 | 4,27 | 60,47 | -0,7 |
| 6,55 | 10,28 | 6,51 | 56,95 | -0,61 |
| 1,91 | 1,91 | 1,9 | 0 | -0,52 |
| 8,33 | 12,71 | 8,27 | 52,58 | -0,72 |
| 9,3 | 13,9 | 9,29 | 49,46 | -0,11 |
| 8,08 | 12,55 | 8,06 | 55,32 | -0,25 |
| 9,35 | 14,12 | 9,21 | 51,02 | -1,5 |

**Tableau 6.2-3 : Amortissements (en %) du modèle sandwich.**

Le calcul des amortissements réduits est, en revanche, beaucoup plus tranché. Les résultats obtenus avec le modèle réduit sur les modes normaux uniquement, à l'exception du mode 6, conduit à une surestimation très nette de l'amortissement. L'intégration des résidus dans la base de réduction du modèle améliore très nettement les résultats. L'erreur maximale sur le calcul, par rapport au modèle de référence, est en effet juste supérieure au pour-cent, pour une base de projection de taille équivalente dans les deux cas.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 6.3 Exemple numérique avec amortissement viscoélastique décrit par des variables internes

La même géométrie a été reprise pour construire cette étude. Cependant, il n'est pas possible de construire de cas test de référence, utilisant le modèle non réduit, avec *Code_Aster*. Les résultats de référence, calculés sur le modèle complet, ont donc été obtenus avec *Matlab* et la *Structural Dynamic Toolbox*. Les caractéristiques des matériaux utilisés sont présentés dans le tableau 6.3-1.

| Matériau | Module de Young ( $Pa$ ) | Coefficient de Poisson | Masse volumique ( $kg.m^{-3}$ ) | Temps de relaxation ( $s$ ) |
|---|---|---|---|---|
| Acier | $2{,}1.10^{11}$ | 0,3 | 7800 | $\infty$ |
| Visco | $4{,}53.10^{6}$ | 0,49 | 1400 | $\infty$ |
| | $3{,}51.10^{6}$ | 0,49 | | $5{,}58.10^{-2}$ |
| | $1{,}395.10^{7}$ | 0,49 | | $3{,}20.10^{-3}$ |
| | $4{,}04.10^{7}$ | 0,49 | | $3{,}01.10^{-4}$ |
| | $1{,}20.10^{8}$ | 0,49 | | $4{,}58.10^{-5}$ |
| | $7{,}57.10^{8}$ | 0,49 | | $5{,}93.10^{-6}$ |

**Tableau 6.3-1 : Propriétés des matériaux utilisés.**

Les résultats obtenus avec le modèle complet et le modèle réduit sont présentés dans le tableau 6.3-2. Le modèle réduit a été construit sur la base des dix premiers modes propres de la structure non dissipative.

| Complet | | Réduit | |
|---|---|---|---|
| Fréq. ( $Hz$ ) | Amor. (%) | Fréq. ( $Hz$ ) | Amor. (%) |
| 25,26 | 7,00 | 25,26 | 7,00 |
| 48,41 | 10,60 | 47,96 | 10,85 |
| 150,61 | 8,55 | 150,59 | 8,55 |
| 174,11 | 11,39 | 174,07 | 11,40 |
| 186,38 | 8,69 | 186,17 | 8,88 |
| 309,68 | 10,10 | 309,64 | 10,11 |
| 426,46 | 8,04 | 426,36 | 8,08 |
| 438,48 | 9,80 | 439,97 | 10,31 |
| 463,72 | 8,93 | 463,77 | 8,98 |
| 523,22 | 0,04 | 523,22 | 0,04 |

**Tableau 6.3-2 : Comparaison des résultats – Fréquences et amortissements.**

Les résultats obtenus sont très bons, et l'erreur pour les dix premiers modes est très faible, qu'il s'agisse des fréquences ou des amortissements.

# 7 Conclusions sur l'utilisation des méthodes de réduction

On a brièvement présenté les principes de la réduction de modèle basée sur la construction initiale d'un sous espace, puis de son enrichissement à partir de calculs de résidus. Toutes ces techniques reposent sur le principe de la correction statique, et donc sur l'introduction, dans la base de réduction, d'une estimation de la réponse de la structure à divers efforts. Ces efforts peuvent être des sollicitations extérieures, comme dans le cas de la correction statique classique, mais aussi des efforts appliqués par des sous-structures adjacentes, comme dans le cas des méthodes de sous structuration, ou encore des efforts internes, comme dans le cas des structures dissipatives.

Ces techniques ont été illustrées dans le cadre particulier du calcul de modes complexes pour une structure fortement dissipative présentant du matériau amortissant. L'amortissement a d'abord été représenté en utilisant un comportement hystérétique, puis un comportement viscoélastique décrit par des variables internes. Un cas test simple de structure sandwich fortement dissipative a été introduit. Les résultats obtenus pour les calculs de modes complexes sont très bons, et démontrent la



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

pertinence de ces techniques. L'intérêt de ces techniques dans le cas des approches par sous-structuration (classique [R4.06.02], cyclique [R4.06.03], ou décomposition de domaine [11]) a d'ailleurs été largement démontré par ailleurs.

Les méthodes présentées sont conçues pour faciliter le calcul sur des modèles importants, ou les calculs répétés (réponse harmonique, par exemple) sur des modèles de moyenne / grande taille (plusieurs dizaine de millier de degrés de liberté). Lorsque la taille du modèle est faible, et sous les hypothèses d'amortissement hystérétique (Nota bene : puisque ce n'est pas possible dans le cas le plus général avec Aster), on pourra donc privilégier le calcul complet. En revanche, pour des moyens / gros modèles incluant un matériau dissipatif, même si la zone où l'amortissement est important est de petite taille, l'ensemble du problème devra être traité comme un problème complexe. Il devient donc extrêmement intéressant de construire un modèle réduit sur la base des modes propres du problème réel, enrichie par les résidus, ou d'adopter une approche par sous structuration.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 8 Références

1 A. Bobillot, *Méthodes itératives pour le recalage. Applications au cas d'Ariane 5*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, 2002.

2 G.Kergourlay, *Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques. Application à une enceinte acoustique,* Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, 2004.

3 B. Groult, *Extension d'une méthode de modification structurale pour la conception de dispositifs dissipatifs intégrant des matériaux viscoélastiques*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris, 2008.

4 F. Tisseur et J. Meerbergen, *The Quadratic Eigenvalue Problem*, SIAM REVIEW, Vol. 43, No. 2, pp. 235–286, 2001.

5 W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C – second edition*, Cambridge University Press, 1992.

6 M. Géradin et D. Rixen, *Théorie des vibrations – application à la dynamique des structures*, Elsevier – Masson, 1997.

7 W. Hurty, *Dynamic analysis of structural systems using component modes*, AIAA journal, 1965

8 R.R. Craig, *A review of time-domain and frequency-domain component mode synthesis methods*, Journal of Modal Analysis,1987,59-72.

9 R.R. Craig et C.J. Chang, *Substructure Coupling for Dynamic Analysis and Testing*, NASA CR-2781,1977.

10 F. Bourquin et F. D'Hennezel, *Numerical study of an intrinsic component mode synthesis method, Mathematical Modelling and Numerical Analysis*,1992.

11 G. Rousseau et J.M. Cros, *Amelioration des méthodes de synthèse modale vis a vis d'une implantation dans le logiciel Code_Aster* , Note H-P50-1999-04449-FR.

12 E. Balmes et J.M. Leclère, *Viscœlastic Vibration Toolbox User's guide V 1.0*, 2007

13 E. M. Austin, *Influences of Higher Order Modeling Techniques on the Analysis of Layered Viscœlastic Damping Treatments*, Ph.D Thesis, Virginia Polytechnic institute and State University, 1998.

14 L. A. Da Silva, *Internal Variable and Temperature Modeling Behavior of Viscœlastic Structures – A Control Analysis,* Ph.D Thesis, Virginia Polytechnic institute and State University, 2003.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)