# Analyse de stabilité statique des pentes en remblai

**Résumé :**

La commande CALC_STAB_PENTE permet d'analyser la stabilité statique des pentes en remblai modélisés en 2D dans les ouvrages hydrauliques tels que les barrages, les talus et les digues autour des réservoirs, en prenant compte la pression interstitielle dans le milieux poreux et éventuellement d'autres types de chargement mécanique.

En générale, pour analyser la stabilité statique des pentes selon les diverses réglementations du métier dans le monde, on utilise la méthode de réduction progressive des propriétés matériaux (méthode SRM – *strengh reduction method*), ou bien la méthode basée sur la théorie d'équilibre limite (méthode LEM). Les deux sont disponibles dans CALC_STAB_PENTE, de sorte que la commande s'adapte à toutes les circonstances d'analyse en condition statique.

Dans ce document on présente en détails les algorithmes implémentés dans CALC_STAB_PENTE.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des matières

1Introduction....3
1.1Définition de la stabilité des pentes en remblai....3
1.2Rappel des fonctionnalités de CALC_STAB_PENTE....3
2Méthode SRM....3
2.1Généralité de la méthode SRM....3
2.2Traitement de la zone SRM....4
2.3Réduction des propriétés de résistance des matériaux....5
2.4Contrôle de la convergence du FS....6
3Méthode LEM....7
3.1Généralité de la méthode LEM....7
3.2Calcul des forces et de la géométrie des tranches....9
3.2.1Calcul du centre du cercle de glissement....9
3.2.2Création des tranches et calcul des poids propres....10
3.2.3Propriétés des matériaux et pression interstitielle....11
3.3Surface de rupture circulaire....11
3.3.1Calcul du FS par les méthodes Bishop ou Fellenius....11
13
3.3.2Localisation de la surface critique....13
3.4Surface de rupture non-circulaire....14
3.4.1Calcul du FS par les méthodes Spencer ou Morgenstern-Price....14
3.4.2Algorithme d'optimisation EFWA....17
3.4.2.1Procédure d'optimisation....17
3.4.2.2Contraintes dynamique des variables d'état....19
3.5Adaptation du maillage....20
4Validation et vérification des fonctionnalités....21
5Bibliographie....21



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

## 1.1 Définition de la stabilité des pentes en remblai

De manière générale, la réglementation sur la conception et la vérification des ouvrages en remblai exige que le facteur de sécurité (FS) associé à la stabilité statique de l'ouvrage ne dépasse pas un seuil imposé. Ce facteur de sécurité, dont la définition peut varier en fonction de la catégorie des méthodes de calcul utilisées, mesure dans tous les cas la marge de sécurité de la pente par rapport à l'état de rupture. Sa valeur dépend souvent de la géométrie de l'ouvrage, des sollicitations mécaniques appliquées et des propriétés du matériaux. En pratique le facteur de sécurité est vérifié une fois la prise en compte des chargements statiques auxquels l'ouvrage est soumis.

Par essence, la rupture de la pente se produit quand la zone de plastification du matériau forme une surface continue reliant deux extrémités sur le profil de la pente. On définit cette zone comme étant la surface de rupture. Le long de la surface de rupture, la résistance au cisaillement du sol devient insuffisante pour résister aux contraintes tangentielles [1] . Plusieurs processus peuvent conduire à la rupture des pentes[2] :

- Réduction de la force de résistance au cisaillement, par exemple :
  - Augmentation de la pression interstitielle à cause de l'infiltration d'eau dans l'ouvrage.
  - Apparition des fissures autour de la crête de l'ouvrage.
  - Perte de résistance de la recharge argileuse.
- Augmentation des contraintes de cisaillement, par exemple :
  - Chargement sur la crête de l'ouvrage.
  - Excavation en pied de la pente.
  - Baisse rapide de la cote amont.

La forme de la surface de rupture dépend de la nature de la pente. Pour les pentes constituées des matériaux homogènes et isotropes, la surface de rupture est probablement circulaire, ce qui conduit au glissement rotationnel. En revanche, si les matériaux constituant la pente sont hétérogènes ou anisotropes, la surface sera non-circulaire, ce qui conduit au glissement en escalier.

Vue la complexité du mécanisme de rupture et des facteurs d'influence, les la pratique en géotechnique est d'employer des outils mathématiques (analytiques ou numériques) pour le calcul du facteur de sécurité. De ce fait, une grande multitude de méthodes de calcul se sont développées pendant le siècle passé. Dans la commande CALC_STAB_PENTE sont implémenté deux catégories de méthodes les plus populaires, offrant un outil efficace pour calculer le facteur de sécurité des pentes et visualiser la surface de rupture.

## 1.2 Rappel des fonctionnalités de CALC_STAB_PENTE

La commande CALC_STAB_PENTE permet d'analyser la stabilité statique des pentes en remblai modélisée en 2D par deux catégories de méthode :

- **Méthode SRM** : la méthode de réduction progressive des paramètres liés à la résistance au cisaillement du matériau (nommé méthode SRM). Cette méthode a été proposé e par Griffiths et al. en 1999 [1].
- **Méthode LEM** : une série de méthodes basées sur la théorie d'équilibre limite (nommée méthode LEM), y compris les procédure de Bishop simplifiée, Fellenius, Spencer et Morgenstern-Price [2].

La première se base sur un calcul aux éléments finis non-linéaire, et propose d'approcher le facteur de sécurité en modélisant la rupture de la pente et demande donc plus de vigilance lors de la configuration du calcul. En divisant la pente en tranches rigides, la dernière méthode est souvent plus efficace numériquement et habituellement recommandée par la réglementation de conception des ouvrages hydrauliques, malgré les hypothèses requises sur l'interaction entre les différentes tranches. Les fonctionnalités de CALC_STAB_PENTE sont expliquées plus en détail dans le document [u4.84.47].

# 2 Méthode SRM

## 2.1 Généralité de la méthode SRM



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La méthode SRM met à profit la pertinence et la fidélité à la réalité de la méthode aux éléments finis pour analyser la stabilité des pentes sans avoir besoin de supposer par avance les cercles de glissement. En effet, en utilisant le critère de rupture de type Mohr-Coulomb ou Drucker-Prager, la méthode SRM définit le facteur de sécurité comme étant le rapport entre les paramètres matériaux initiaux et les paramètres réduits conduisant à la divergence du calcul non-linéaire sous les chargements statiques appliqués :

$$FS = \frac{c}{c_i} = \frac{\tan(\varphi)}{\tan(\varphi_i)} = \frac{\tan(\psi)}{\tan(\psi_i)} \quad (1)$$

où $\psi$ est l'angle de dilatance du matériau , $c$ et $\varphi$ représentent respectivement la cohésion et l'angle de frottement du matériau composant le remblai ; .

Griffiths et al. [1] montrent que l'expression ( 1 ) a le même sens physique que la définition traditionnelle par le rapport entre la force de résistance et la force tangentielle le long de la surface de rupture.

Comme l'illustre la Figure 1 , le traitement informatique dans la commande CALC_STAB_PENTE de la méthode SRM se fait en 3 étapes :

- Etape 1 : Traitement de la zone SRM. On identifie les matériaux existant dans la zone SRM indiquée, et on crée les groupes des mailles dans la zone SRM afin de réaffecter le champ des matériaux dégradés.
- Etape 2 : Création du champ des matériaux dégradé. On teste ensuite la convergence du calcul non-linéaire et on raffine l'incrément du facteur de sécurité jusqu'à ce que le calcul diverge et que la précision souhaitée soit atteinte.
- Etape 3 : Post-traitement. Si demandé, on obtient en sortie le champ de déformation plastique cumulée (V1 du champ VARI_NOEU) afin de visualiser la surface de rupture.

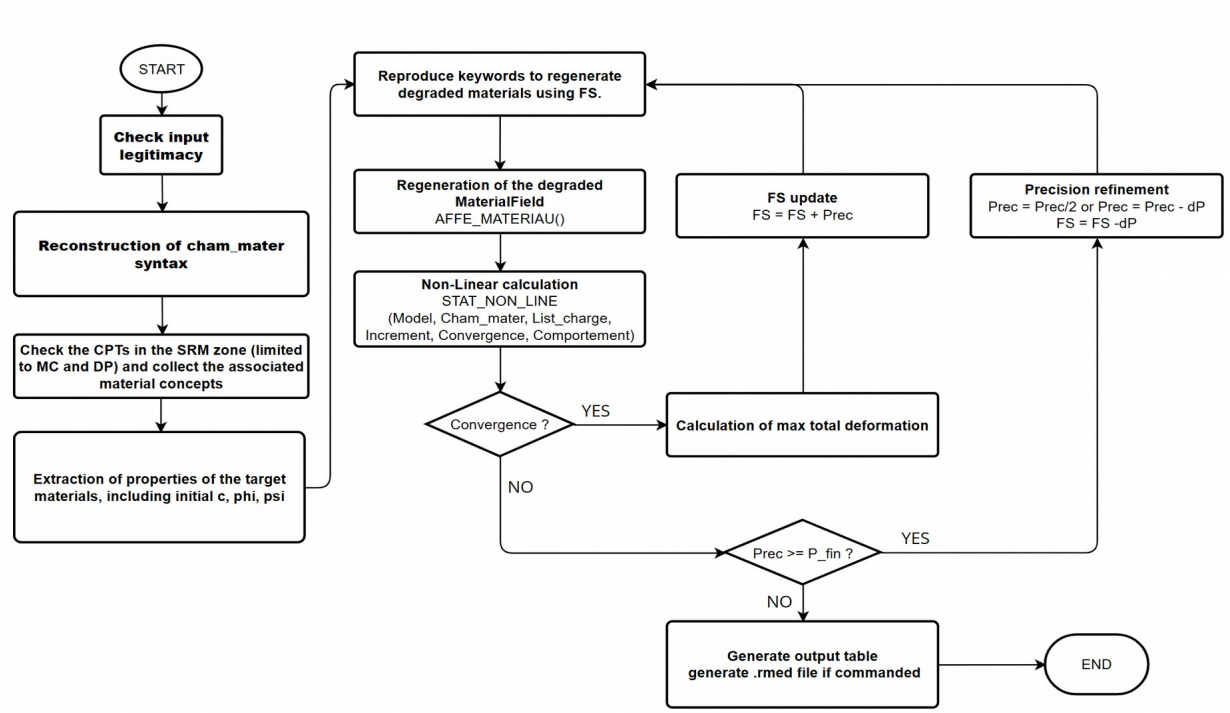



**Figure 1: Diagramme de la méthode SRM**

## 2.2 Traitement de la zone SRM

La commande CALC_STAB_PENTE permet de définir la zone où l'algorithme SRM s'applique. Cette fonctionnalité s'adapte particulièrement lorsque le modèle comprend plusieurs pentes et on souhaite vérifier la



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

stabilité d'une pente qui ne subit pas obligatoirement le risque de collapse le plus important. Il est à noté que la zone SRM peut être définie par les groupes des mailles distincts de ceux qui s'appliquent dans l'affectation du champ des matériaux en entrée. Dans ce cas-là on identifie les matériaux dans la zone SRM et on réaffecte les groupes des mailles par le principe de surcharge.

C omme l'illustre la Figure 2 , pour chaque groupe des mailles dans la zone SRM, on examine s'il possède des mailles en commun avec les groupes des mailles affectés par les matériaux présents dans l'objet aster `cham_mater`.

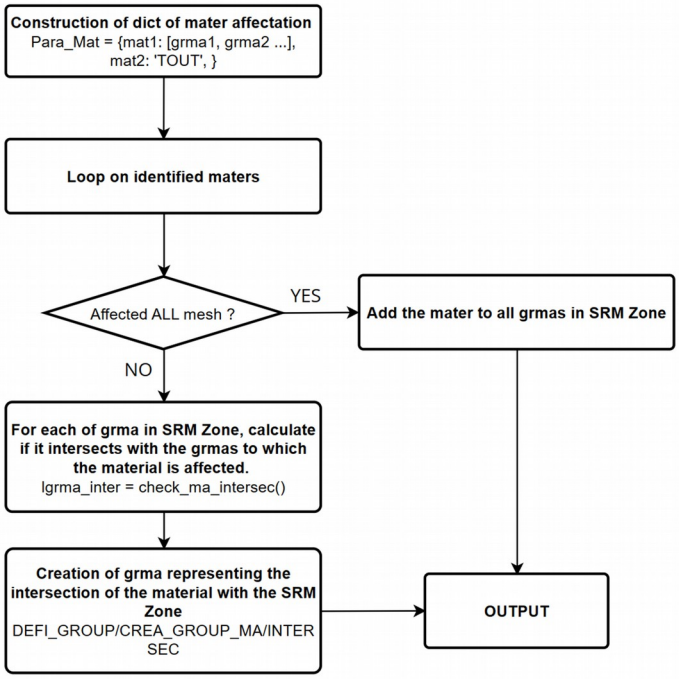



**Figure 2: Diagramme de la génération du cham_mater dégradé dans la zone SRM**

## 2.3 Réduction des propriétés de résistance des matériaux

Les critères de rupture Mohr - Coulomb et Drucker - Prager sont autorisées dans `CALC_STAB_PENTE` . En même temps de la génération du champ des matériaux dégradés, on vérifie qu'il existe exactement une loi de comportement parmi les deux affectée à la zone SRM par le mot-clé facteur `COMPORTEMENT`.

D'après l'expression ( 1 ), les propriétés dégradées sont calculées par :

$$\tan(\varphi') = \frac{\tan(\varphi)}{FS}, \quad c' = \frac{c}{FS} \tag{2}$$

On fait l'hypothèse de la loi d'écoulement plastique associée du comportement Mohr-Coulomb, soit $\varphi' = \psi'$ . Au cas contraire, l'angle de dilatance prendra automatiquement la valeur de l'angle de frottement lors de l'exécution de l'algorithme SRM.

A part du critère Mohr-Coulomb, il est également possible d'employer le critère Drucker-Prager qui améliore le problème de singularité causé par les sommets du cône de la surface de charge de Mohr-Coulomb dans le plan $\pi$. Au lieu de réduire directement les paramètres Drucker-Prager ($\alpha$ et $\sigma_y$), la commande privilégie la stratégie phi-c pour éviter le conservatisme du résultat [3] :

$$\tan(\varphi') = \frac{3\alpha}{2FS\sqrt{(2\alpha+1)(1-\alpha)}}, c' = \frac{\sigma_y}{2FS\sqrt{(2\alpha+1)(1-\alpha)}}, \tan\psi' = \frac{\tan\psi}{FS} \tag{3}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 2.4 Contrôle de la convergence du FS

Afin d'accélérer la recherche du facteur de sécurité, il est possible de contrôler la résolution itérative en configurant les paramètres liés au raffinement de l'incrément $dP$ (Figure 1) selon la méthode indiquée. L'incrément diminue à chaque fois que le calcul non-linéaire diverge jusqu'à ce que le résidu maximal soit atteint.

Deux lois de variation de l'incrément $dP$ sont disponibles :

1) **'EXPONENTIELLE' : Variation exponentielle**
L'incrément du facteur de sécurité approche le résidu maximal de manière exponentielle. Au n ème raffinement, l'incrément est calculé par :

$$p_n = p_0 2^{-n} \tag{4}$$

jusqu'à ce que $p_N < p_{fin}$ , où $p_n$ est l'incrément courant et $p_0$ est l'incrément initial du facteur de sécurité.

2) **'LINEAIRE' : Variation linéaire**
L'incrément du facteur de sécurité approche le résidu maximal de manière linéaire. Dans ce cas-là un opérande supplémentaire ITER_RAFF_LINE est nécessaire. Au n$^{ème}$ raffinement, l'incrément est calculé par :

$$p_n = p_0 - n\frac{p_0 - p_{fin}}{N} \tag{5}$$

j usqu'à ce que $p_N = p_{fin}$ .

L'avantage de la méthode exponentielle est que le calcul converge plus rapidement, alors que la méthode linéaire contrôle mieux la précision du résultat. La variation exponentielle de l'incrément s'adapte surtout au calcul avec grand INCR_INIT.

La méthode suivante simplifierait le choix entre les deux loi de variation de l'incrément. Soit $N$ le nombre de raffinements souhaité, on choisit la loi linéaire si :

$$\frac{p_0 - p_{fin}}{\log_2(p_0) - \log_2(p_{fin})} < N \tag{6}$$

et choisit la loi exponentielle sinon.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Méthode LEM

## 3.1 Généralité de la méthode LEM

Toutes les méthodes type LEM se basent sur la définition du facteur de sécurité comme étant la rapport entre la force de résistance au cisaillement et la force tangentielle le long de la surface de rupture. Par division de la pente en tranches qui sont considérées comme des solides indéformables, on résout le bilan des forces et des moments de chaque tranche pour en déduire le facteur de sécurité. En respectant ce principe de calcul en commun, les diverses méthodes LEM se distinguent par le nombre des bilans satisfaits et les hypothèses sur la force d'interaction entre les tranches.

Un panorama général des méthodes de résolution par équilibre limite est donné dans la Figure 4. 4 méthodes LEM sont disponibles dans CALC_STAB_PENTE, adaptées à l'analyse des pentes avec surface de rupture tant circulaire que non-circulaire :

- **Méthode Bishop simplifié et méthode Fellenius** : Ce sont les méthodes les plus classiques qui supposent que la surface de rupture est circulaire. Grâce au glissement rotationnel, on réduit le nombre d'équations d'équilibre en moment, qui est égale au nombre des tranches, en une équation décrivant l'équilibre en moment de la partie glissante entière. Ainsi, on calcule le facteur de sécurité de manière simple par une expression explicite (Fellenius) ou par une équation scalaire implicite (Bishop). Cependant, les hypothèses du modèle étant trop simplifié, surtout pour la méthode Fellenius, le résultat peut être éloigné des observations physiques.

- **Méthode Spencer et Morgenstern-Price** : Ce sont les méthodes les plus classiques supposant que la surface de rupture est non-circulaire. On résout la totalité des équations d'équilibre, dont la quantité est égale à 3 fois le nombre des tranches, afin d'obtenir le résultat de facteur de sécurité le plus précis possible. La procédure de résolution devient plus sophistiquée, ce qui permet d'obtenir un résultat plus juste si la surface de rupture est visuellement non-circulaire. Cependant, il est à noté que le résultat ne différera pas significativement de celui de Bishop simplifié si le champ des matériaux est homogène et isotrope.

En outre, les méthodes LEM ne s'appuyant pas sur un calcul aux éléments finis, les algorithmes d'optimisation implémentés dans CALC_STAB_PENTE sont indispensables pour repérer la surface de rupture qui minimise globalement le facteur de sécurité :

- **Méthode d'exhaustion pour la surface circulaire** : On parcourt toutes les combinaisons des points d'extrémité des potentielles surfaces de rupture. Il s'agit de la méthode implémentée dans la plupart des logiciels géotechniques commerciaux tels que SLOPE/W de GeoStudio [9].

- **Algorithme de feu d'artifice amélioré (EFWA) pour la surface non-circulaire [4]** : Il s'agit d'un algorithme d'essaims intelligent qui s'inspire du processus de la génération des étincelles lors des explosion des feux d'artifice. Il s'avère plus performant que d'autres algorithmes d'optimisation en matière d'efficacité numérique de résolution du problème de stabilité des pentes avec surface de rupture non-circulaire [5] .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

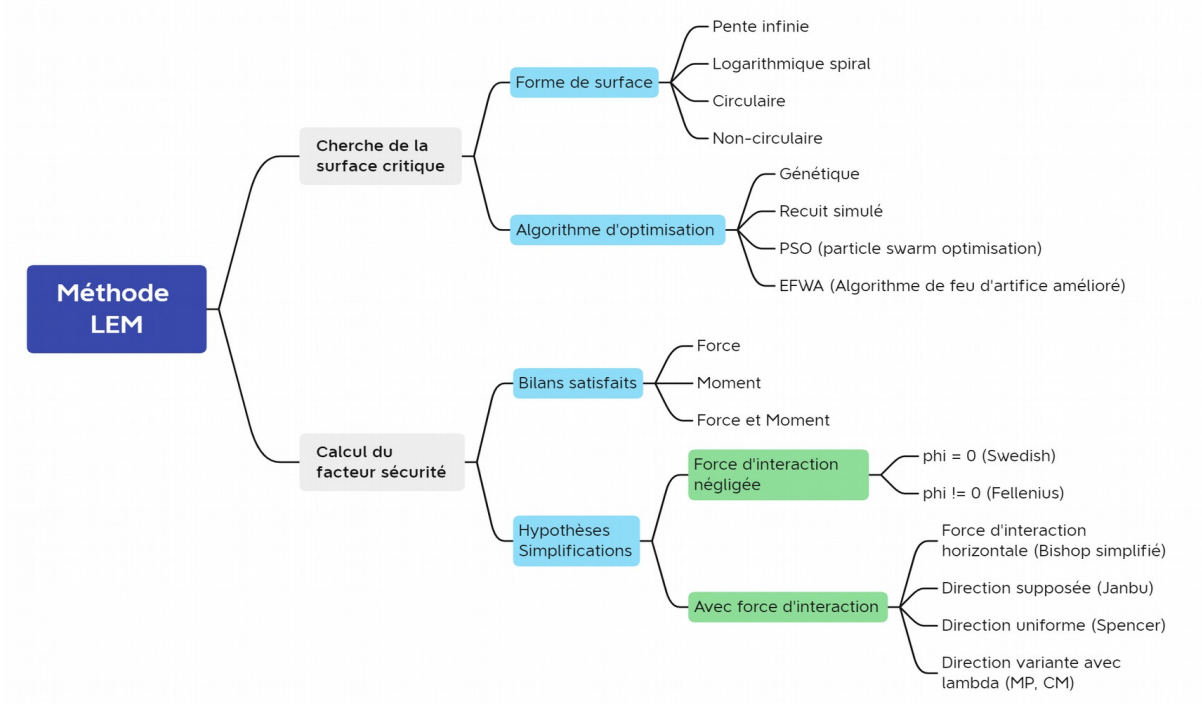



**Figure 3: Panorama des méthodes LEM**

Une des particularités de l'implémentation des méthodes LEM est qu'on calcule le poids des tranches à l'aide du même maillage utilisé pour le calcul aux éléments finis. Bien que cela impose des optimisations de maillage, développés dans la commande, de manière à éviter au mieux de ralentir la résolution du facteur de sécurité, l'avantage se traduit par le fait qu'on n'aura plus besoins de basculer entre les solveurs/modèles pour effectuer les diverses types d'analyse d'un ouvrage en remblai. Par exemple il est possible d'enchaîner directement le calcul du champ de pression interstitielle due à l'infiltration d'eau et l'analyse de stabilité des pentes.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

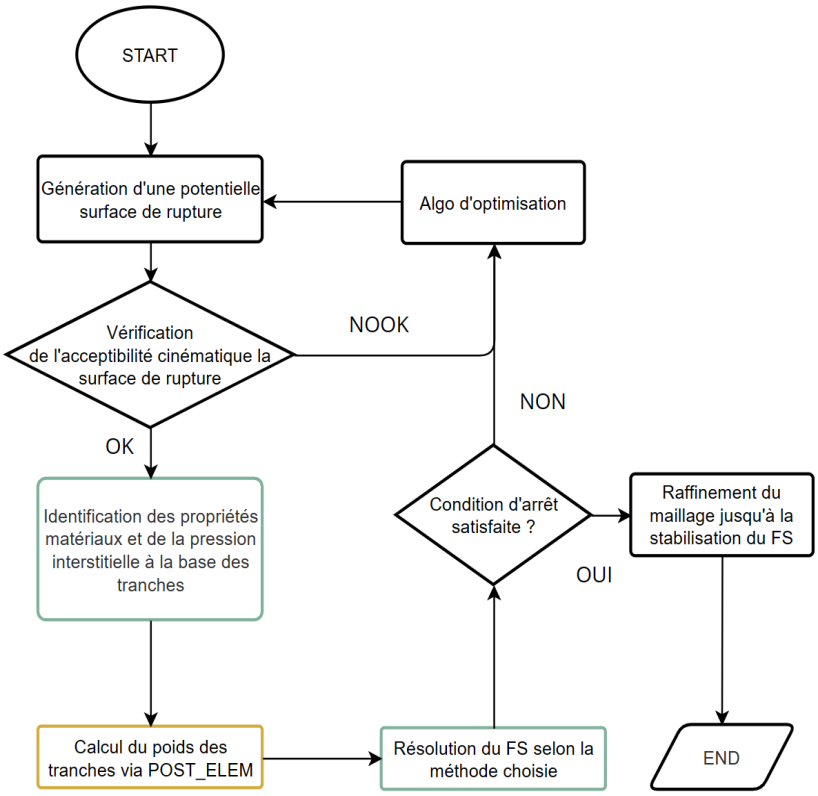



**Figure 4: Diagramme d'implémentation des méthodes LEM dans CALC_STAB_PENTE**

## 3.2 Calcul des forces et de la géométrie des tranches

A fin de résoudre le bilan des forces et des moments des tranches, il faut dans un premier temps calculer les paramètres géométriques définissant la partie glissante du sol, et ensuite calculer leur poids propre et éventuellement la pression interstitielle à la base des tranches. La Figure 5 montre le flux de travail global pour récupérer les informations des tranches nécessaires au calcul d u facteur de sécurité par la suite.

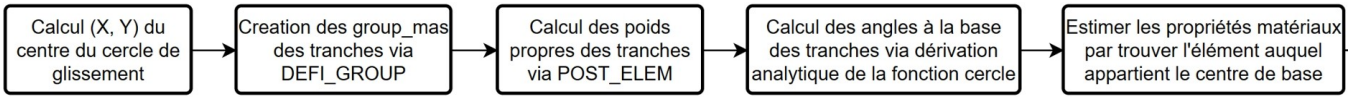



**Figure 5: Flux de travail de la récupération des informations des tranches pour calculer FS**

### 3.2.1 Calcul du centre du cercle de glissement

En cas de surface de rupture circulaire, afin de créer le groupe des mailles de la partie glissante, on retrouve les coordonnées du centre du cercle de glissement par deux façons :

1) **Avec comme entrées les points d'extrémités et le rayon :**

En injectant les coordonnées des points d'extrémités ( $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ ) dans l'équation du cercle, on obtient les équations exprimant la relation entre les coordonnées du centre $(x_0, y_0)$ et une équation d'ordre deux de $y_0$ :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} x_0 = c_1 - c_2 y_0 \\ (c_2^2+1) y_0^2 + (2 x_1 c_2 - 2 c_1 c_2 - 2 y_1) y_0 + (x_1 - c_1)^2 + y_1^2 - R^2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

où les constantes $c_1$ et $c_2$ s'écrivent :

$$c_1 = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2(x_2 - x_1)}$$
$$c_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (8)$$

Pour résoudre l'équation (7), on exprime les coefficients dans la deuxième équation comme :

$$A = c_2^2 + 1$$
$$B = 2(x_1 - c_1)c_2 - 2 y_1 \quad (9)$$
$$C = (x_1 - c_1^2 + y_1^2 - R^2)$$

Ainsi on obtient l'ordonnée du centre. La surface de rupture étant toujours convexe, on prend la solution la plus grande :

$$y_0 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (10)$$

2) **Avec comme entrées les points d'extrémités et une droite horizontale tangentielle :**

Dans le cas où on contrôle manuellement la recherche du rayon critique par les opérande `Y_MINI` et `Y_MAXI` de `CALC_STAB_PENTE`, on en déduit le centre du cercle à partir de l'ordonnée $y_b$ de la droite horizontale tangentielle. Il faut donc remplacer $R = y_0 - y_b$ dans l'équation (7) et reprendre la même procédure de résolution.

### 3.2.2 Création des tranches et calcul des poids propres

On crée le groupe des mailles des tranches à l'aide de l'opérateur `DEFI_GROUP` en suivant les étapes suivantes :

1) Étape 1 : Création du groupe des mailles de la partie glissante par l'option `'APPUI'` avec les nœuds strictement inclus dans la surface de glissement.
2) Étape 2 : Création du groupe des mailles de la tranche $n$ par l'option `'INTERSEC'` qui permet de récupérer les mailles en commun de la bande d'abscisse de la tranche et la partie glissante.
3) Étape 3 : Correction de la tranche $n$ par l'option `'DIFFE'` qui permet d'exclure les mailles appartenant à la tranche précédente. Cette étape assure que la masse totale des tranches est égale à la masse de la partie glissante.

Un exemple des groupes de mailles est montré dans la Figure 6. Les poids propres des tranches sont ensuite calculés via l'opérateur `POST_ELEM`.

On calcule en même temps l'angle d'inclinaison $\alpha$ de la base des tranches. Pour la surface de rupture circulaire, cet angle est lié à la dérivée de l'équation du cercle au centre de la base $(x_c, y_c)$ :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\tan(\alpha)=\frac{x_c-x_0}{\sqrt{R^2-(x_c-x_0)^2}} \quad (11)$$

Pour la surface non-circulaire, cet angle est lié à la pente de la base des tranches :

$$\tan(\alpha)=\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} \quad (12)$$

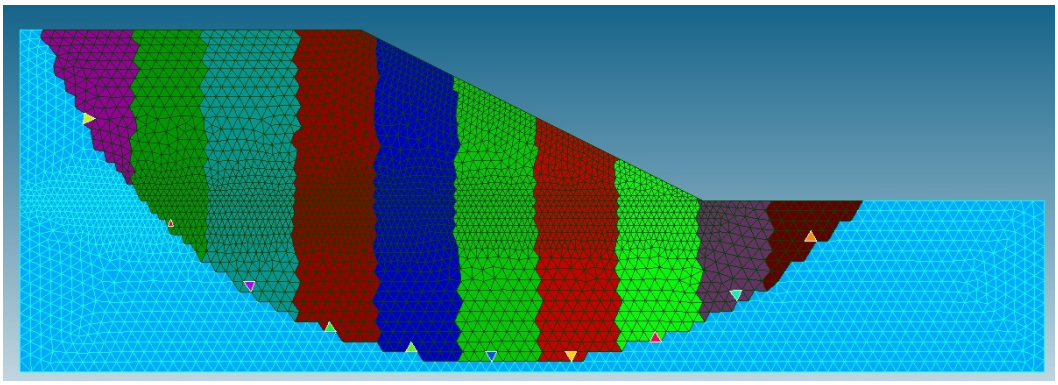


**Figure 6: Exemple de groupe des mailles des tranches et les centres à la base**

### 3.2.3 Propriétés des matériaux et pression interstitielle

Le champ des matériaux en entrée de la commande CALC_STAB_PENTE permet de retrouver la cohésion et l'angle de frottement le long de la surface de rupture. Les paramètres du comportement Drucker-Prager sont convertis par la même formule que (3) en considérant $FS=1$ .

On suppose que les propriétés sont homogènes sur la base de chaque tranche, et égales à ceux du matériau affectant la maille qui contient le centre de la base. Cette maille « centre » est définie par le critère de distance minimum entre le centre de la maille et le centre de la base des tranches.

Si besoin, on introduit la pression interstitielle par la variable de commande PTOT du champ des matériaux, qui est définie sur les nœuds des éléments. Donc on calcule la pression au centre de la base via l'interpolation à distance inversée (IDW) :

$$u=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{d_i}\right)^2 u_i}{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{d_i}\right)^2} \quad (13)$$

où $d_i$ désigne la distance entre les nœuds de la maille et le c entre de la base, et $u_i$ est la pression aux nœuds.

## 3.3 Surface de rupture circulaire

### 3.3.1 Calcul du FS par les méthodes Bishop ou Fellenius

#### 1) Méthode de Fellenius

La méthode de Fellenius est appelée aussi « méthode suédoise » ou « *ordinary method of slices* » [2] . Cette méthode néglige complètement la force d'interaction entre les tranches. Ainsi la formule du FS devient explicite. Le schéma des forces est montré dans la Figure 7 .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

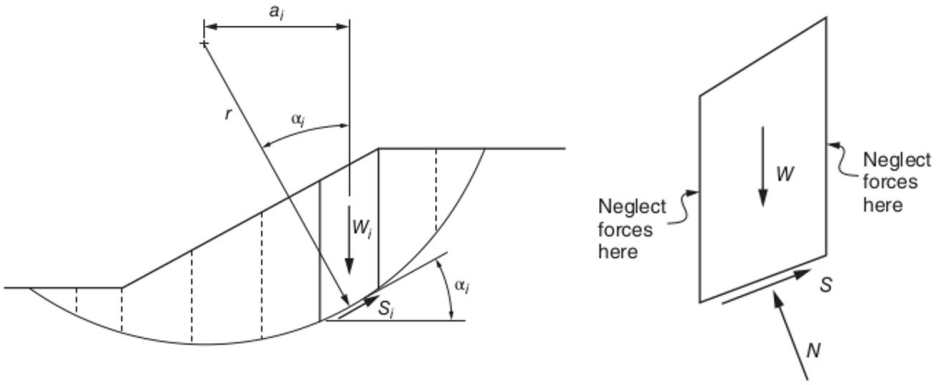



**Figure 7: Schéma des forces de la méthode Fellenius**

Avec la présence de la pression interstitielle, la force normale sur la base des tranches s'écrit :

$$N' = W\cos\alpha - u\Delta l\cos^2\alpha \tag{14}$$

où $W$ désigne le poids, $u$ désigne la pression interstitielle et $\Delta l$ est la longueur de la base.

Selon l'équilibre en moment de la partie glissante par rapport au centre du cercle de glissement, le facteur de sécurité s'exprime par :

$$FS = \frac{\sum c\,\Delta l + (W\cos\alpha - u\Delta l\cos^2\alpha)\tan\varphi}{\sum W\sin\alpha} \tag{15}$$

**2) Méthode de Bishop simplifiée**

La méthode de Bishop simplifiée suppose que la force d'interaction entre les tranches est horizontale, comme le montre la Figure 8 .

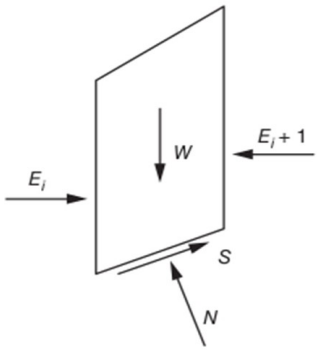



**Figure 8: Schéma des forces de la méthode Bishop**

Le bilan des forces suivant la direction verticale s'écrit :

$$N\cos\alpha + S\sin\alpha - W = 0 \tag{16}$$

En plus, selon le critère Mohr-Coulomb, la force tangentielle de résistance s'écrit :

$$S = \frac{1}{FS}[c\,\Delta l - (N - u\Delta l)\tan\varphi] \tag{17}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On en déduit donc l'expression implicite du facteur de sécurité:

$$FS=\frac{\sum \frac{c\,\Delta l\cos\alpha+\left(W-u\,\Delta l\cos\alpha\right)\tan\varphi}{\cos\alpha+\left(\sin\alpha\tan\varphi\right)/FS}}{\sum W\sin\alpha} \tag{18}$$

On résout l'équation (18) par la méthode de l'itération du point fixe.

### 3.3.2 Localisation de la surface critique

Afin de localiser la surface critique, on parcourt toutes les combinaisons possibles des points d'extrémités des surfaces potentielles de rupture. Pour chaque combinaison, on incrémente le rayon pour trouver la surface circulaire minimisant le FS. L'incrément du rayon prend la valeur de 10% de la hauteur de la pente. La Figure 9 illustre le flux de travail de la recherche de surface critique.

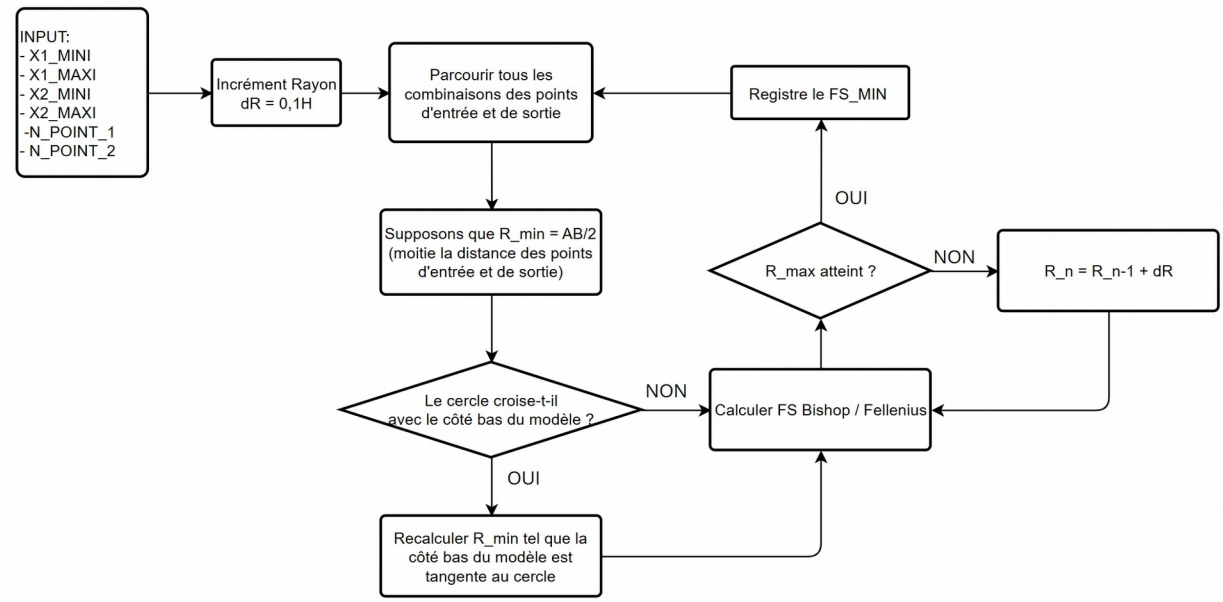



**Figure 9: Flux de travail de la recherche de surface critique**

Deux approches sont disponibles pour déterminer les bandes d'essai du rayon :

- **Option 1** : On parcours tous les rayons qui forment une surface de rupture cinématiquement admissible. La limite supérieure est définit par $R_{max}=1{,}5\,R_{pied}$ où $R_{pied}$ est le rayon du cercle tangentiel à la droite horizontale passant par l'extrémité plus basse. La limite inférieure est la valeur minimale parmi :
  - La moitié de la distance entre les points d'extrémité.
  - Le rayon du cercle tangentiel à la base du maillage.

- **Option 2** : On définit manuellement la bande d'essai en définissant les droites horizontales tangentielles aux surfaces de rupture. Cette option de recherche accélère le calcul si l'utilisateur expérimenté prévoit la zone réduite où se situe probablement la surface de rupture. On profite de cette option aussi pour examiner les surfaces dans l'entourage de celle donnée par le résultat. Si les limites des ordonnées `Y_MINI` et `Y_MAXI` sont proches, on adapte l'incrément du rayon de sorte qu'on ait au moins 3 rayons à tester (un rayon intermédiaire) .

L'incrément du rayon égal à 10% de la hauteur est parfois trop grand pour localiser la surface critique de manière précise. Face à ce problème, après le calcul du facteur de sécurité correspondant à tous les rayons testés pour une combinaison des points d'extrémités, si un nouveau minima apparaît, on l'enregistre en faisant



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

une vérification locale du rayon. Cette vérification se fait en raffinant itérativement l'incrément du rayon de manière exponentielle, et en testant les rayons autour du rayon qui minimise le facteur de sécurité. A l'itération $n$, l'incrément raffiné s'écrit :

$$dR_n = 2^{-n} dR_0 \tag{19}$$

On teste alors les rayons :

$$R_n = R_{minFS,n-1} \pm dR_n \tag{20}$$

Au cours des itérations, on enregistre toujours le rayon minimisant le facteur de sécurité et on continue à tester ses alentours avec l'incrément raffiné jusqu'à la stabilisation du rayon.

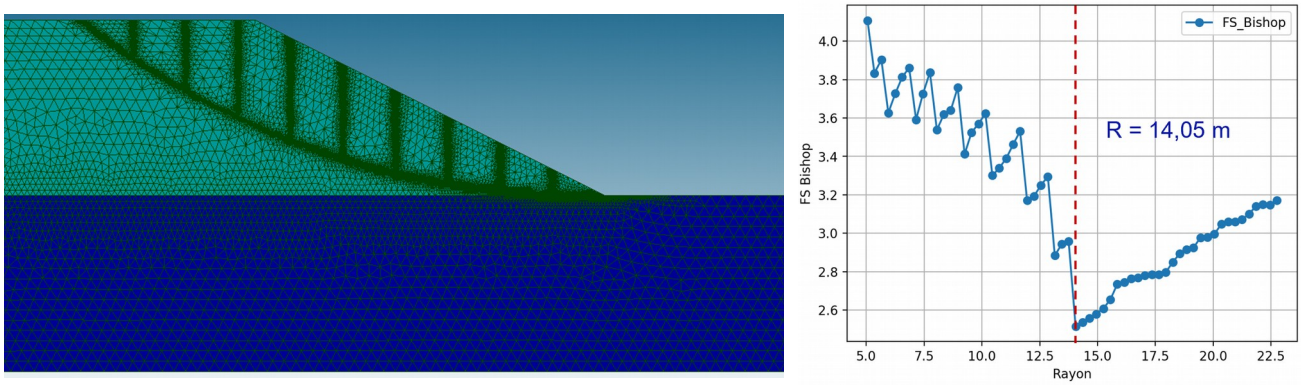



**Figure 10: Exemple du résultat de la recherche du rayon critique**

D'après les tests, cet algorithme d'optimisation conçu pour les surfaces circulaires s'avère efficace même pour les pentes inhomogènes. La Figure 10 montre que avec la pente modélisée dans le cas test ssnp507, l'algorithme localise avec succès le rayon minimisant globalement le FS.

## 3.4 Surface de rupture non-circulaire

### 3.4.1 Calcul du FS par les méthodes Spencer ou Morgenstern-Price

L es méthodes Spencer et Morgenstern-Price sont conçues pour analyser la stabilité des pentes dont la surface de rupture est de forme plus complexe en raison de l'inhomogénéité des matériaux, telle que la stratification de la fondation et la présence d'une couche faible (cas test ssnp006 ).

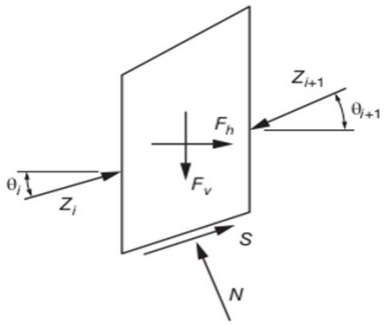



**Figure 11: Schéma des forces des méthodes Spencer et Morgenstern-Price**

La Figure 11 montre le schéma des forces subies par les tranches quand on choisit les méthode Spencer ou Morgentern-Price. $F_v$ désigne le poids propre de la tranche qui est égale à $W$ dans l'équation (18). Ces méthodes satisfont toutes les équations d'équilibre, soit $n$ équations d'équilibres des forces dans la direction verticale, $n$ dans la direction horizontale et $n$ équations d'équilibre du moment, où $n$ est le nombre des tranches. Les deux méthodes se distinguent par l'hypothèse sur la direction des forces d'interaction entre les tranches $Z_i$ . On représente cette direction par l'angle $\theta_i$ par rapport à la direction horizontale :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\tan(\theta_i)=f_0(x_i)+\lambda f_1(x_i) \tag{21}$$

où $f_0$ et $f_1$ sont les fonctions définissant la variation de l'angle d'inclinaison des forces d'interaction entre les tranches, et $\lambda$ est un coefficient multiplicateur qui est un des inconnus des équations d'équilibre. Les fonctions $f_0$ et $f_1$ dépendent de la méthode choisie :

- Méthode Spencer : $f_0=0, f_1=1$ .
- Méthode Morgenstern-Price (proposée par Chen et Morgenstern en 1983):
  - $f_0(x)=\tan\beta_0+\frac{\tan\beta_1-\tan\beta_0}{L}x$ , où $\beta_0$ et $\beta_1$ sont les angles d'inclinaison du profil de la pente aux deux extrémités de la surface de rupture.
  - $f_1(x)=\sin(\frac{\pi}{L}x)$

On adopte la procédure de résolution du facteur de sécurité proposée par Zhu et al. [6]. L'avantage de cette procédure comparée avec les procédures traditionnelles est qu'elle en déduit le schéma d'itération du point fixe pour calculer le facteur de sécurité et propose une démarche faiblement couplée pour résoudre FS et $\lambda$ . Selon les auteurs, cette procédure de résolution est en même temps plus performante et efficace que les procédures traditionnelles.

Le bilan d'équilibre en force dans la direction verticale de la tranche $i+1$ s'écrit :

$$-W_{i+1}\cos\alpha_{i+1}+N_{i+1}+U_{i+1}+Z_i\sin(\theta_i-\alpha_{i+1})=Z_{i+1}\sin(\theta_{i+1}-\alpha_{i+1}) \tag{22}$$

où $U_i=u_i\Delta l_i$ représente la pression interstitielle totale appliquée à la base de la tranche.

Le bilan d'équilibre en force dans la direction horizontale de la tranche $i+1$ s'écrit :

$$Z_i\cos(\theta_i-\alpha_{i+1})+[c_{i+1}\Delta l_{i+1}+N_{i+1}\tan\varphi_{i+1}]/F_S=Z_{i+1}\cos(\theta_{i+1}-\alpha_{i+1})+W_{i+1}\sin\alpha_{i+1} \tag{23}$$

En éliminant la force normale dans les équations (22) et (23), on a le bilan des forces simplifié :

$$Z_{i+1}\Phi_{i+1}=\Psi_i Z_i\Phi_i+R_{i+1}-F_s T_{i+1} \tag{24}$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi_i&=F_s\cos(\alpha_i-\theta_i)+\sin(\alpha_i-\theta_i)\tan(\varphi_i)\\
\Psi_i&=[F_s\cos(\alpha_{i+1}-\theta_i)+\sin(\alpha_{i+1}-\theta_i)\tan\varphi_{i+1}]/\Phi_i\\
R_i&=(W_i\cos\alpha_i-U_i)\tan\varphi_i+c_i\Delta l\\
T_i&=W_i\sin\alpha_i
\end{aligned} \tag{25}$$

En fait, $R_i$ représente la force de résistance au cisaillement générée par toutes les forces appliquées sur la tranche sauf les forces d'interaction entre les tranches. $T_i$ représente la force d'entraînement conduisant à la déstabilisation de la tranche.

Ainsi, avec les conditions $Z_0=Z_N=0$ (les forces d'interaction aux deux côtés de la partie glissante sont nulles), on en déduit le schéma d'itération du point fixe pour calculer FS :

$$F_s=\frac{\sum_{i=1}^{N-1}R_i\prod_{j=1}^{N-1}\Psi_j+R_N}{\sum_{i=1}^{N-1}T_i\prod_{j=1}^{N-1}\Psi_j+T_N} \tag{26}$$

Enfin, le bilan d'équilibre en moment par rapport au centre de la base de la tranche $i+1$ s'écrit :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$E_{i+1}\left(z_{i+1}+\frac{b}{2}\tan\alpha_{i+1}\right)=E_i\left(z_i-\frac{b}{2}\tan\alpha_{i+1}\right)+\frac{b}{2}\left(\tan\theta_i E_i+\tan\theta_{i+1}E_{i+1}\right) \quad (27)$$

où $E_i$ est la composante horizontale de la force d'interaction qu'on peut calculer à l'aide de l'équation (24), $b$ est la largeur horizontale de la tranche, et $z_i$ désigne la distance verticale entre le point où s'applique la force d'interaction et le centre de la base des tranches.

Soit le moment de la composante horizontale par rapport au centre de la base $M_i=E_i z_i$ , on réécrit l'équation (27) comme :

$$M_{i+1}=M_i-\frac{b}{2}\tan\alpha_{i+1}\left(E_i+E_{i+1}\right)+\frac{b}{2}\left[\tan\theta_i E_i+\tan\theta_{i+1}E_{i+1}\right] \quad (28)$$

Compte tenue la condition $M_0=M_N=0$ , on en déduit l'expression de $\lambda$ :

$$\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\tan\alpha_i\left(E_i+E_{i+1}\right)-\left(f_{0,i}E_i+f_{0,i-1}E_{i-1}\right)\right]}{\sum_{i=1}^{N}\left(f_{1,i}E_i+f_{1,i-1}E_{i-1}\right)} \quad (29)$$

On résout FS et $\lambda$ par l'évaluation alternative de ses valeurs à l'aide des équations (26) et (29) jusqu'à la convergence des deux inconnus, comme l'illustre la Figure 12.

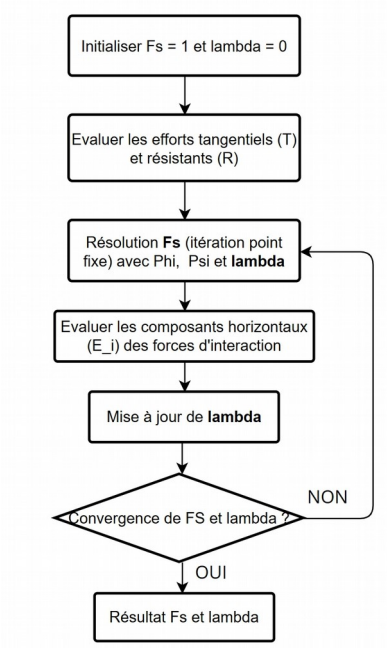



**Figure 12: Diagramme de la résolution du facteur de sécurité des méthodes Spencer et Mogenstern-Price**

D'après le résultat des tests, cette procédure de résolution de FS converge en deux itérations, comme le montre la Figure 13.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

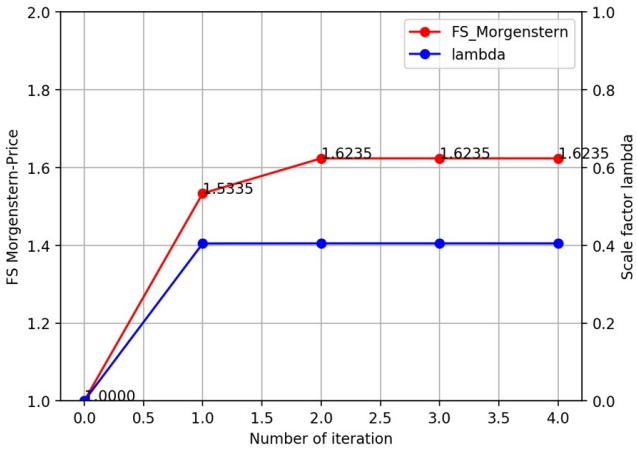



**Figure 13: Convergence du FS et de lambda**

## 3.4.2 Algorithme d'optimisation EFWA

### 3.4.2.1 Procédure d'optimisation

Due à la grande quantité des variables d'état, le problème de localisation de la surface critique non-circulaire s'avère trop difficile pour être résolu par la méthode essai-erreur. R écemment, grâce à l'émergence des algorithmes d'essaims intelligents, de nombreux chercheurs les utilisent pour résoudre le problème de localisation de la surface de rupture non-circulaire. Par exemple, l'algorithme d'essaim particulaire (PSO), l'algorithme génétique et l'algorithme de colonie de fourmis ont montré leur capacité de trouver l'optimum avec un coût temporelle acceptable.

Zheng et al. (2013) ont proposé l'algorithme de feu d'artifice amélioré (EFWA) [4] . Xiao et al. (2019) a pour la première fois appliqué l'EFWA à l'analyse de stabilité des pentes, et d'après ses résultats l'EFWA aboutit à l'optimum avec moins d'itérations que d'autres algorithmes d'essaim [7] . Dans CALC_STAB_PENTE on adopte donc l'EFWA comme l'algorithme d'optimisation.

L'EFWA simule le processus d'explosion des feux d'artifices. Dans l'espace des variables d'état figuré comme le ciel nocturne, on fait exploser les feux d'artifice à différents endroits. Chaque explosion génère localement des étincelles pour chercher l'optimum dans l'espace voisin. Parmi ces étincelles, certaines qui présente la valeur sélective importante (inversement proportionnelle au FS) sont gardées pour la prochaine explosion.

L'EFWA se déroule en 3 étapes :

**1) Génération aléatoire des N feux d'artifices initiaux**

Le vecteur des variables d'état comportent $N+1$ composants, soit les abscisses des points d'extrémité de la surface de rupture, et $N-1$ ordonnées des points intermédiaires , où $N$ est le nombre des tranches :

$$X=\{x_0, y_1, ..., y_{N-1}, x_N\} \tag{30}$$

S i on ne précise pas l'état initial via l'opérande ETAT_INIT de CALC_STAB_PENTE, on génère aléatoirement $N_{FA}$ positions initiales des feux d'artifices (loi de distribution uniforme) :

$$X_i = rand\left(x_{min,i}, x_{max,i}\right) \tag{31}$$

où les limites des degrés de libertés sont déterminées par l'algorithme décrit dans la section 3.4.2.2.

Si on fournit l'opérande ETAT_INIT qui est la table en sortie de CALC_STAB_PENTE, on l'ajoute dans la génération initiale des feux d'artifice.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**2) Génération des étincelles ordinaires et gaussiennes**

Lors de la génération des étincelles ordinaires à partir de la position d'explosion $i$ , l'amplitude de l'explosion est calculée par :

$$A_i = A\frac{FS(X_i) - FS_{min} + \epsilon}{\sum_{i=1}^{N}(FS(X_i) - FS_{min}) + \epsilon} \tag{32}$$

où $A$ est la valeur de l'opérande A de CALC_STAB_PENTE désignant l'amplitude totale des étincelles ordinaires, et $\epsilon = 1e\text{-}8$ est un constant proche de zéro pour éviter la division par zéro. Par l'équation (32) on cherche dans une amplitude plus large si la position centrale est de qualité insuffisante, et on concentre sur l'espace proche des positions de proche de la valeur minimale de FS.

Le nombre des étincelles ordinaires d'une explosion est calculé par :

$$S_i = M\frac{FS_{max} - FS(X_i) + \epsilon}{\sum_{i=1}^{N}(FS_{max} - FS(X_i)) + \epsilon} \tag{33}$$

où $M$ est la valeur de l'opérande M de CALC_STAB_PENTE désignant le nombre total des étincelles ordinaires. Par l'équation (33) on génère plus d'étincelles si la position centrale est de bonne qualité. Afin d'éviter l'émergence des nombres absurdes, on corrige :

$$\hat{S}_i = \begin{cases} round(aM) & si\ \ S_i < aM \\ round(bM) & si\ \ S_i > bM \\ round(S_i) & sinon \end{cases} \tag{34}$$

On génère les étincelles ordinaires en modifiant arbitrairement les degrés de liberté des positions de la génération courante :

$$\hat{X_i^k} = X_i^k + \Delta X^k, \ \text{avec}\ \ \Delta X^k = A_i\, rand(-1,1) \tag{35}$$

Afin de garder toujours la diversité de la recherche de l'optimum, on génère également les étincelles gaussiennes de quantité $M_g$ . On sélectionne de manière arbitraire les positions de feu d'artifice, et modifie arbitrairement les degrés de liberté :

$$\hat{X_i^k} = X_i^k + (X_B^k - X_i^k)e \ \ \text{avec}\ \ e = N(0,1) \tag{36}$$

où $X_B^k$ est la position correspondante au FS minimum de la génération courante.

Si certains degrés de liberté sont en dehors des limites déterminés par l'algorithme décrit dans la section 3.4.2.2, on les projette dans la bande admissible :

$$\hat{X_i^k} = X_{min,i}^k + rand(0,1)(X_{max,i}^k - X_{min,i}^k) \tag{37}$$

Du fait que la modification d'un degré de liberté influence la bande admissible des points intermédiaires à droite d'elle, on les ajuste aussi afin que la surface de rupture générée soit cinématiquement admissible.

Enfin, au cas où la surface de rupture générée est tellement proche du profil de la pente qu'il est impossible de créer le groupe des mailles des tranches, on corrigera la surface rupture de sorte qu'elle s'éloigne du profil de la pente :

$$X_i^k = X_i^k - X_{bc} \tag{38}$$

où $X_{bc}$ est la valeur de l'opérande MARGE_PENTE de CALC_STAB_PENTE.

**3) Sélection des étincelles pour la prochaine génération**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La nouvelle génération des feux d'artifice se produit au travers de l'algorithme de jeu de roulette. La probabilité qu'une étincelle ordinaire ou gaussiennes soit gardée dans la prochaine génération est :

$$p_i = \frac{FS_{max} - FS_i}{FS_{max} - FS_{min}} \tag{39}$$

La diagramme de l'algorithme EFWA est montré par la Figure 14.

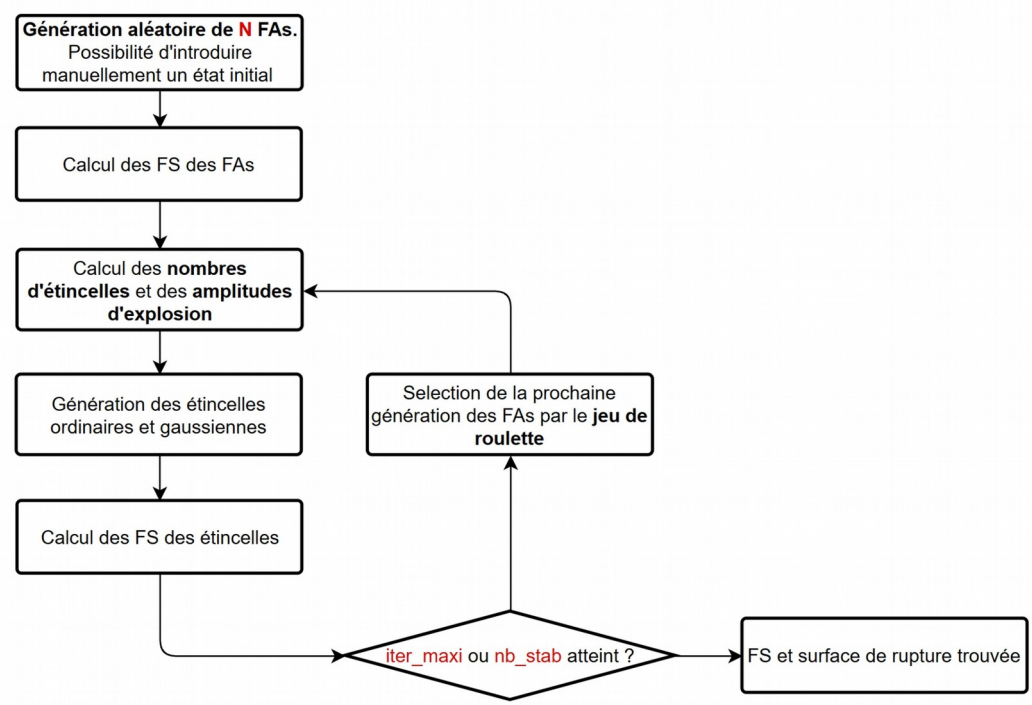



**Figure 14: Diagramme de l'algorithme EFWA**

#### 3.4.2.2 Contraintes dynamique des variables d'état

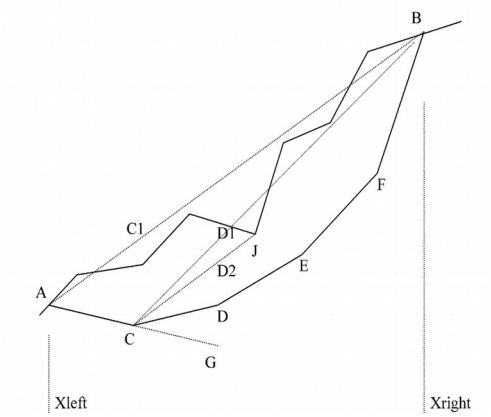



**Figure 15: Illustration des contraintes des variables d'état**

Afin d'assurer que la surface de rupture est toujours convexe et cinématiquement admissible, on adopte la procédure proposée par Cheng et al. pour déterminer les contraintes dynamiques des variables d'état [8].



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans cette procédure, les limites des ordonnées des points intermédiaires dépendent d'un ou deux points précédentes (à gauche). Prenons l'exemple dans la Figure 15 :

- Borne inférieure :
  - La surface de rupture faisant un angle inférieur de 45 degrés avec le profil de la pente au point d'extrémité A, ce qui détermine la borne inférieure du point C.
  - On prolonge la droite AC jusqu'à l'abscisse du point D pour déterminer la borne inférieure du point D.

- Borne supérieure :
  - On relie CB et vérifie si CB se croise avec le profil de la pente. S'ils se croisent, on trouve le point d'intersection d'ordonnée minimum J et relie CJ pour déterminer la borne supérieure D2 du point D. Sinon, D1 sera la borne supérieure du point D.

Afin d'assurer que la surface de rupture reste dans le modèle, on ajuste la borne inférieure au fond du modèle si elle se situe en dessous de ce dernier.

## 3.5 Adaptation du maillage

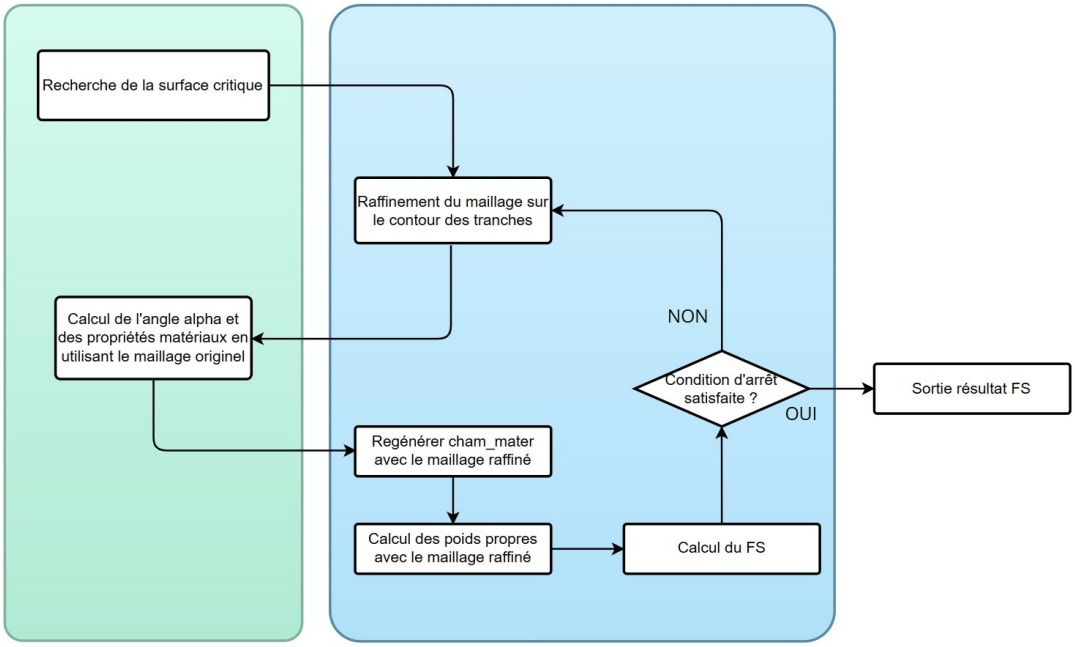



**Figure 16: Diagramme de l'analyse de stabilité avec raffinement du maillage**

L'analyse de stabilité via CALC_STAB_PENTE se basant sur le maillage, la finesse du maillage influence significativement le résultat du facteur de sécurité. De ce fait, CALC_STAB_PENTE automatise le raffinement du maillage. Cependant, le temps de calcul augmente d'autant plus que le maillage est fin. De ce fait, comme le montre la Figure 16, on isole le raffinement du maillage de la recherche de la surface critique, étant donné que la finesse du maillage a une influence négligeable sur la localisation de la surface de rupture.

Afin d'accélérer la création des groupes des tranches, à l'aide de la commande MACR_ADAP_MAIL, on raffine le maillage uniquement sur le contour des tranches jusqu'à l'attente du nombre maximum de raffinement ou à la stabilisation de FS. Ce processus est piloté par un champ d'indicateur de proximité exprimé sous la forme d'une fonction gaussienne de moyenne nulle et d'écart type $\sigma$ :

$$val = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-d_{min}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (40)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où $d_{min}$ est la distance minimale entre un nœud du maillage et le contour des tranches. On raffine les mailles selon le critère de $\sigma$, soit 68 % des mailles les plus proches du contour, et on déraffine les mailles selon le critère de $2\sigma$, soit 5% des mailles les plus lointaines du contour.

On diminue de manière exponentielle l'écart type pour contrôler dynamiquement la zone de raffinement.

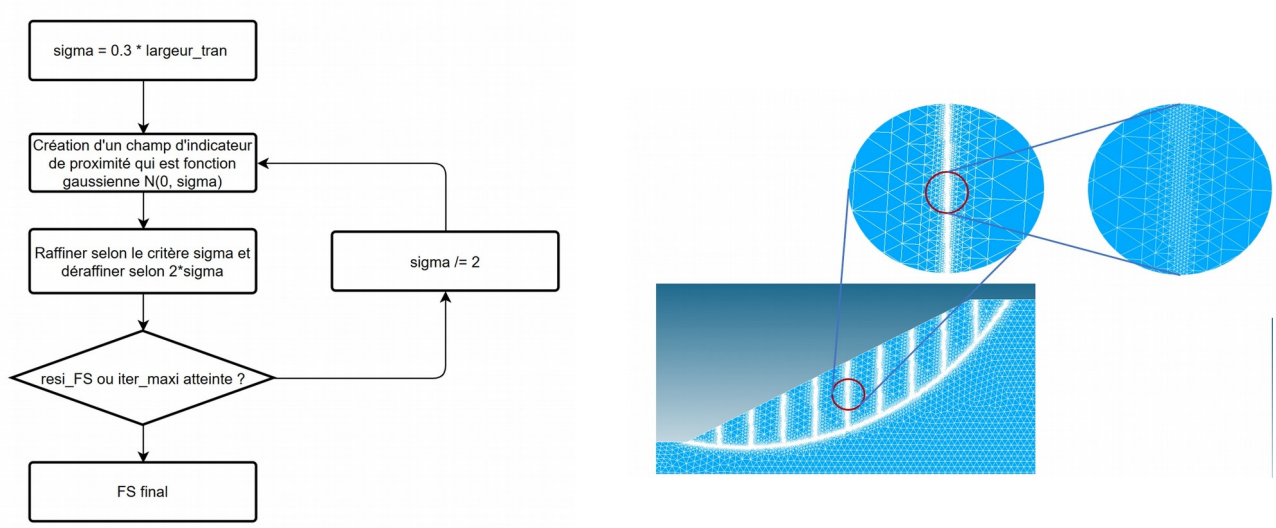



**Figure 17: Algorithme d'adaptation du maillage**

La Figure 17 illustre l'algorithme d'adaptation du maillage et le résultat du maillage adapté.

# 4 Validation et vérification des fonctionnalités

| | | |
|---|---|---|
| ZZZZ135 | [V1.01.135] | Validation informatique des méthodes SRM dans la commande CALC_STAB_PENTE |
| ZZZZ146 | [V1.01.147] | Validation informatique des méthodes LEM dans la commande CALC_STAB_PENTE |
| SSNP507 | [V6.03.507] | Analyse de stabilité d'une pente argileuse non-drainée sur la fondation faible |
| SSNP006 | [V6.03.006] | Analyse de stabilité d'une pente homogène par la méthode Bishop |
| SSNP007 | [V6.03.007] | Analyse de stabilité d'une pente non-drainée avec couche faible par la méthode Morgenstern-Price |

# 5 Bibliographie

1. D. V. GRIFFITHS , and P. A. LANE . Slope Stability Analysis By Finite Elements ., Geotechnique, 49 (1999): 387-403.
2. Duncan J. M., Wright S. G., Brandon T. L. Soil Strength and Slope Stability 2n Edition, 2014
3. D. Wang, X. CHEN, J. QI et al. Assessment on strength reduction schemes for geotechnical stability analysis involving the Drucker-Prager criterion. J. Cent. South Univ. 28, 3238–3245 (2021).
4. Zheng S., Janecek A., Tan Y. Enhanced Fireworks Algorithm[C].2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Cancun, Mexico: IEEE, 2013: 2069-2077
5. Xiao Z., Tian B., Lu X. Locating the critical slip surface in a slope stability analysis by enhanced fireworks algorithm[J]. Cluster Computing, 2019, 22(1): 719-729



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6. Zhu D. Y., Lee C. F., Qian Q. H., et al. A concise algorithm for computing the factor of safety using the MorgensternPrice method[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, 42(1): 272-278
7. Xiao Z., Tian B., Lu X. Locating the critical slip surface in a slope stability analysis by enhanced fireworks algorithm[J]. Cluster Computing, 2019, 22(1): 719-729
8. Cheng Y. M. Location of critical failure surface and some further studies on slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(3): 255-267
9. Stability Modeling with GeoStudio, GeoSlope.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)