Critères multi-axiaux d'amorçage en fatigue

Résumé :

Dans cette note nous proposons une formulation des critères de MATAKE, de DANG VAN et de FATEMI-SOCIE et des critères en formule adaptée au cadre du cumul de dommage sous chargement multiaxial **périodique** et **non périodique**. Ces critères sont utilisables dans la commande CALC_FATIGUE.

La première partie de ce document est consacrée aux critères de MATAKE et de DANG VAN adaptés aux chargements multiaxiaux périodiques. Dans cette partie après avoir abordé les notions d'endurance et de cumul de dommage et la forme générale des critères de fatigue, nous décrivons les deux modèles de DANG VAN et de MATAKE (Plan critique) prévus pour réaliser des calculs de cumul de dommage sous chargement multiaxial. On y détaille la définition des différents plans de cisaillement associés aux points de Gauss ou aux nœuds, ainsi que la définition d'une amplitude de chargement à travers le cercle circonscrit au trajet du chargement dans le plan de cisaillement. Enfin les critères disponibles dans *Code_Aster* sont présentés.

Dans la seconde partie nous proposons une formulation des critères de MATAKE, DANG VAN et FATEMI-SOCIE dans le cadre du cumul de dommage sous chargement multiaxial non périodique. Pour définir un cycle dans le cas amplitude variable, nous réduisons l'historique du chargement à une fonction unidimensionnelle du temps en projetant la pointe du vecteur cisaillement sur un axe, et nous utilisons une méthode de comptage de cycles. Ici nous choisissons la méthode RAINFLOW. Les critères de MATAKE, DANG VAN et FATEMI-SOCIE adaptés au cumul de dommage sous chargement non périodique sont implantés dans *Code_Aster*.

En plus des critères bien établis, on dispose dans le Code_Aster **des critères en formule** permettant l'utilisateur de construire de nouveaux critères en fonctions des grandeurs prédéfinis. Ce type de critère est détaillé dans troisième partie de ce document.

Enfin, l'option VMIS_TRESCA permet de calculer la variation maximale, au cours du temps, d'un tenseur de contrainte selon les critères de Von Mises et de Tresca.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....4
2 Préliminaires....5
2.1 Limite d'endurance et le cumul de dommage, cas uniaxial....5
2.2 Critère de fatigue, cas multiaxial....5
2.3 Définition d'une amplitude de chargement dans le cas multiaxial....5
2.4 Définition du plan de cisaillement....6
3 Critères de MATAKE (plan critique) et de DANG VAN....7
3.1 Critère de MATAKE....7
3.2 Critère de DANG VAN....7
3.3 MATAKE et DANG VAN modifiés pour le cumul de dommage....11
4 Calcul du plan de cisaillement maximal....12
4.1 Expression des contraintes de cisaillement dans le plan....12
4.2 Exploration des plans de cisaillement....13
5 Calcul de la demi-amplitude de cisaillement....16
5.1 Présentation générale du calcul du cercle circonscrit....16
5.2 Description de la méthode du cercle passant par trois points....20
5.2.1 Cas général....20
5.2.2 Cas particuliers....22
5.3 Critères avec plans critiques....23
5.4 Nombre de cycles à la rupture et endommagement....23
6 Critères à amplitude variable....24
6.1 Critère de MATAKE modifié....24
6.2 Critère de DANG VAN modifié....27
6.3 Critère de FATEMI-SOCIE modifié....27
6.3.1 Description....27
6.3.2 Identification du coefficient k....28
7 Choix des axes de projection....31
7.1 Projection sur un axe....31
7.2 Construction du second axe....32
8 Projection du cisaillement....32
8.1 Cas où l'axe 1 est l'axe initial....32
8.1.1 Détermination du second axe....32
8.1.2 Projection d'un point quelconque sur l'axe initial....33
8.2 Cas où l'axe 2 est l'axe initial....33
8.2.1 Détermination du second axe....34
8.2.2 Projection d'un point quelconque sur l'axe initial....34
8.3 Définition du module et orientation de l'axe de projection....35
9 Critères en formule....35

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9.1 Pour le chargement périodique....35
9.2 Pour le chargement non-périodique....37
10 Grandeur et composantes introduites dans Code_Aster....39
10.1 Calculé par CALC_FATIGUE....39
10.2 Calculé par POST_FATIGUE....40
11 Autres critères....41
11.1 Critère VMIS_TRESCA....41
11.2 Composantes de Code_Aster utilisées....41
12 Conclusion....42
13 Bibliographie....43
14 Description des versions du document....43

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Les modèles d'endurance en fatigue multiaxiale sous chargement périodique sont des modèles du type suivant :

$$VAR_{amplitude}+a\times VAR_{moyenne}<b \ ,$$

où b est le seuil d'endurance en cisaillement simple, et *a* une constante positive sans dimension. $VAR_{amplitude}$ est une certaine définition de l'amplitude (la moitié de la variation) du cycle de chargement et $VAR_{moyenne}$ est une variable en liaison avec la contrainte (ou parfois la déformation) ou les contraintes (ou parfois les déformations) moyennes. Les modèles se distinguent par des définitions différentes de $VAR_{amplitude}$ et $VAR_{moyenne}$.
Pour passer de l'endurance au cumul du dommage, on introduit une contrainte équivalente définie par :

$$\sigma_{eq}=VAR_{amplitude}+a\times VAR_{moyenne} \ .$$

Cette contrainte équivalente nous donne un dommage unitaire sur la courbe de fatigue. Comme le second membre de l'inéquation b correspond au seuil en cisaillement, il faut une courbe de fatigue en cisaillement. Mais les courbes de fatigue en cisaillement sont rares puisque difficiles à obtenir, on essaie donc d'utiliser les courbes de fatigue en traction compression alternée. Pour cela il faut multiplier la contrainte équivalente par un coefficient correctif de l'ordre de $\sqrt{3}$.

Les modèles macroscopiques de MATAKE (plan critique) et micro macro de DANG-VAN sont décrits. On montre que sous certaines hypothèses le modèle de DANG-VAN est similaire au modèle macroscopique de MATAKE. La seule différence réside dans la variable $VAR_{moyenne}$: DANG-VAN utilise la pression hydrostatique, tandis que MATAKE emploie la contrainte normale sur le plan d'amplitude de cisaillement maximale.

Après avoir défini le plan de cisaillement, nous exprimons la contrainte de cisaillement dans ce plan. Les plans de cisaillement sont ensuite explorés selon une méthode décrite dans la référence [bib4] qui consiste à découper la surface d'une sphère en morceaux de tailles égales.

Les vecteurs normaux étant connus nous déterminons alors pour chaque plan les points qui sont les plus éloignés les uns des autres. Parmi ceux-ci nous trouvons les deux points qui sont le plus éloignés l'un de l'autre. Cela étant fait nous utilisons, si nécessaire, la méthode du cercle passant par trois points afin d'obtenir le cercle circonscrit au trajet de chargement.

Dans la première partie de ce document nous présentons les modèles d'endurance en fatigue multiaxial sous chargement périodiques, ainsi que la notion de cumul de dommage. Le passage de l'endurance au cumul de dommage est également abordé.

Dans la seconde partie les critères de MATAKE et de DANG-VAN sont ensuite présentés sous les aspects limite d'endurance et cumul de dommage sous chargement périodique.

La troisième partie est consacrée à la définition du plan de cisaillement, de l'expression des contraintes de cisaillement dans ce plan et enfin, à la manière d'explorer les plans de cisaillement.

La quatrième partie est dédiée à la détermination du cercle circonscrit au trajet de cisaillement dans le plan du même nom. Enfin nous décrivons les critères et les grandeurs qui sont introduits dans *Code_Aster*.

Après avoir étendu les modèles de MATAKE et DANG-VAN au cumul de dommage sous chargement périodique, nous présentons l'adaptation de ces modèles au cumul de dommage sous chargement non périodique. Ainsi, la cinquième partie est consacrée à la définition de la contrainte équivalente élémentaire. Nous décrivons aussi le critère de FATEMI-SOCIE modifié.

La sixième partie est dévolue à la manière de sélectionner l'axe (ou les deux axes) sur lequel est projeté l'historique de la cission.

La septième partie est dédiée à la projection proprement dite de la pointe du vecteur cission sur cet axe ou ces deux axes. Enfin, concernant les critères de MATAKE et DANG-VAN formulés en cumul de dommage sous chargement non périodique, nous décrivons les grandeurs qui sont introduits dans *Code_Aster.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Préliminaires

Dans cette partie nous traitons les notions de limite d'endurance et de cumul de dommage. Nous présentons également la forme générale des critères de fatigue.

2.1 Limite d'endurance et le cumul de dommage, cas uniaxial

Dans le cas uniaxial, la définition rigoureuse du seuil d'endurance est la demi-amplitude (la moitié de la variation) de chargement défini en contrainte en dessous de laquelle la durée de vie est infinie. Toutefois, comme en pratique la durée de vie ne peut jamais être infinie, on définit des limites d'endurance à 10^7, 10^8, etc. cycles de chargement. Il existe une autre façon de voir les choses : puisqu'en pratique la durée de vie infinie n'existe pas, on utilise la notion de cumul de dommage. L'approche par le cumul de dommage consiste à définir une limite en nombre de cycles au delà de laquelle le dommage cumulé est égal à un. Ainsi la limite à 10^7 veut dire qu'après 10^7 cycles le dommage cumulé est égal à 1.

2.2 Critère de fatigue, cas multiaxial

Dans la littérature un certain nombre de critères ont été proposés pour définir le **seuil d'endurance** sous chargement cyclique multiaxial. La forme générale de ces critères est :

$$VAR_{amplitude}+a\times VAR_{moyenne}<b \qquad \text{éq 2.2-1}$$

où b est le seuil d'endurance en cisaillement simple, a est une constante positive sans dimension. $VAR_{amplitude}$ est une certaine définition de la demi-amplitude (la moitié de la variation) du cycle et $VAR_{moyenne}$ est une variable en liaison avec la contrainte (ou parfois la déformation) ou les contraintes (ou parfois les déformations) moyennes. Différents modèles se distinguent par des définitions différentes de $VAR_{amplitude}$ et $VAR_{moyenne}$.
Pour passer de l'endurance au **cumul du dommage**, on peut définir une contrainte (ou une déformation) équivalente :

$$\sigma_{eq}=VAR_{amplitude}+a\times VAR_{moyenne} \qquad \text{éq 2.2-2}$$

Cette contrainte équivalente nous donne un dommage unitaire sur la courbe de fatigue. Comme le second membre de l'inéquation [éq 2.2-1] correspond au seuil en cisaillement, il faut une courbe de fatigue en cisaillement. Mais les courbes de fatigue en cisaillement sont rares puisque difficiles à obtenir, on essaie donc d'utiliser les courbes de fatigue en traction compression alternée. Pour cela il faut être cohérent au moins au niveau du seuil d'endurance c'est à dire multiplier σ_{eq} par une constante de l'ordre de $\sqrt{3}$ pour pouvoir utiliser la courbe de fatigue en traction. La valeur $\sqrt{3}$ est la valeur exacte pour un critère du type Mises, expérimentalement ce coefficient est plus petit que $\sqrt{3}$.

2.3 Définition d'une amplitude de chargement dans le cas multiaxial

Dans *Code_Aster*, il existe deux définitions d'amplitude de chargement dans le cas multiaxial :

A : rayon (demi diamètre) de la sphère circonscrite au trajet du chargement ;
B : la moitié du maximum de la distance entre deux points quelconques du trajet.

Il est clair que dans le cas d'un chargement se définissant sur une sphère, A et B donnent la même amplitude. En revanche, si on prend un trajet (bi-dimensionnel) sous forme d'un triangle équilatéral de coté l, la définition A nous donne $l/\sqrt{3}$, tandis que la définition B nous donne $l/2$. Pour travailler dans un cadre conservatif nous prenons comme définition de l'amplitude (demi-variation) d'un trajet de chargement le rayon de la sphère (ou cercle pour le cas 2D) circonscrite.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.4 Définition du plan de cisaillement

En un point M d'un milieu continu nous exprimons le tenseur des contraintes σ dans un repère orthonormé $(O, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. A la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ de composantes (n_x, n_y, n_z) dans le repère orthonormé, nous associons le vecteur contrainte $\boldsymbol{F}=\sigma.\boldsymbol{n}$ de composantes (F_x, F_y, F_z). Ce vecteur $\boldsymbol{F}$ peut se décomposer en un vecteur normal à $\boldsymbol{n}$ et un scalaire porté par $\boldsymbol{n}$, soit :

$$\boldsymbol{F}=N\,\boldsymbol{n}+\tau \qquad \text{éq 2.4-1}$$

où N représente la contrainte normale et le vecteur τ la contrainte de cisaillement. Dans le repère $(O, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, les composantes du vecteur τ sont notées : (τ_x, τ_y, τ_z). Le vecteur τ se déduit directement de [éq 2.4-1] et de la contrainte normale :

$$N=\boldsymbol{F}\,.\,\boldsymbol{n} \quad \text{d'où} \quad \tau=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}\,.\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}. \qquad \text{éq 2.4-2}$$

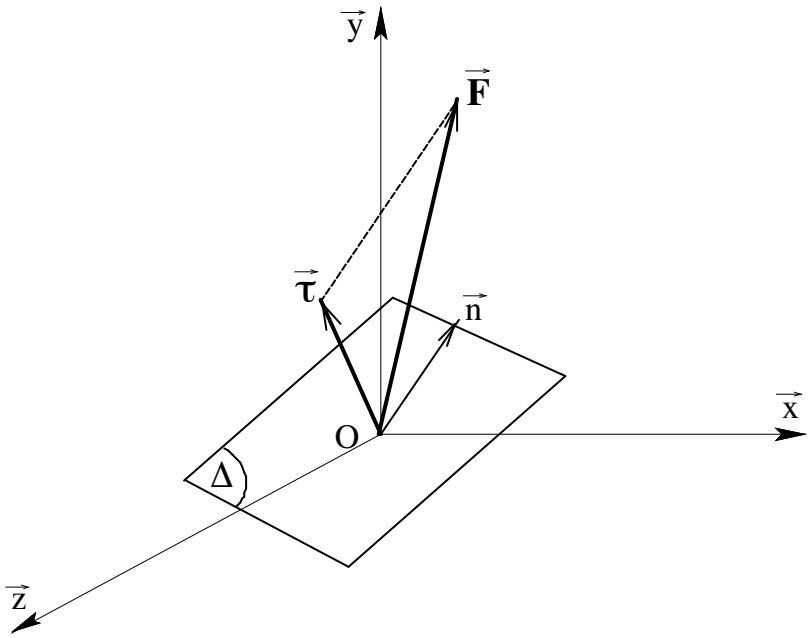


Figure 2.4-a : Représentation des vecteurs de contrainte $\boldsymbol{F}$ et de contrainte de cisaillement τ

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Critères de MATAKE (plan critique) et de DANG VAN

Ici nous explicitons les critère de MATAKE et de DANG VAN à la fois du point de vue limite d'endurance et du point de vue du cumul de dommage.

3.1 Critère de MATAKE

Dans ce type de critère le calcul des champs de contrainte et de déformation est fait sous l'hypothèse d'élasticité, confer référence [bib1]. Comme il a été dit dans le chapitre 2, dans le cas multiaxial le critère d'endurance s'écrit généralement sous la forme :

$$VAR_{amplitude}+a\times VAR_{moyenne}<b \qquad \text{éq 3.1-1}$$

Amplitude de chargement : Dans le cas du critère de MATAKE à chaque point de la structure (ou point de Gauss pour un calcul aux éléments finis) pour calculer $VAR_{amplitude}$ on procède de la façon suivante :

[1] pour chaque plan de normale $\boldsymbol{n}$ on calcule l'amplitude de cisaillement en déterminant le cercle circonscrit au trajet de cisaillement dans ce plan ;
[2] on cherche la normale $\boldsymbol{n}*$ pour laquelle l'amplitude est maximale. Cette amplitude est désignée par $\Delta\tau(\boldsymbol{n}*)$.

Contrainte moyenne : Pour le calcul de $VAR_{moyenne}$ on procède de la façon suivante :

[1] sur le plan de normale $\boldsymbol{n}*$ on calcule sur un cycle la contrainte normale maximale désignée par $N_{\max}(\boldsymbol{n}*)$.

Le critère d'endurance s'écrit :

$$\frac{\Delta\tau(\boldsymbol{n}*)}{2}+a\,N_{\max}(\boldsymbol{n}*)\leq b \ ,$$

où a et b sont deux constantes positives et b représente la limite d'endurance en cisaillement simple.

Identification des constantes : pour déterminer les constantes a et b il faut utiliser deux essais simples. Deux possibilités existent :

Un essai de cisaillement pur plus un essai de traction compression alterné. Dans ce cas les constantes sont données par : $b=\tau_0 \qquad a=\left(\tau_0-\frac{d_0}{2}\right)/\frac{d_0}{2}$, où τ_0 représente la limite d'endurance en cisaillement pur alterné et d_0 la limite d'endurance en traction-compression pure alternée.

Deux essais de traction compression, un alterné et l'autre non. Les constantes sont données par :

$$a=\frac{\left(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_1\right)}{\left(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2\right)-2\,\sigma_m},$$
$$b=\frac{\sigma_m}{\left(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_1\right)+2\,\sigma_m}\times\frac{\Delta\sigma_1}{2}$$

où $\Delta\sigma_1$ est l'amplitude de chargement pour le cas alterné et $\Delta\sigma_2$ pour le cas où la contrainte moyenne est non nulle.

3.2 Critère de DANG VAN

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On suppose que le matériau reste globalement élastique tandis qu'il se plastifie localement. L'hypothèse physique intéressante du modèle est que le matériau s'adapte localement (il devient élastique après être passé par la plasticité) en-dessous de la limite d'endurance, ce qui correspond à la non initiation de fissure. Au-dessus de la limite d'endurance il y a localement accommodation plastique donc initiation de fissure.
Les hypothèses de base de l'interaction micro-macro, Lin-Taylor, permettent d'écrire :

$$\sigma_{ij}^{Loc}(t)=\sigma_{ij}(t)+\rho_{ij}(t)$$
$$\rho_{ij}(t)=-2\,\mu\,\varepsilon_{ij}^{p}(t)$$

On désigne la contrainte locale par $\sigma_{ij}^{Loc}(t)$, la contrainte globale par $\sigma_{ij}(t)$, la contrainte résiduelle locale par $\rho_{ij}(t)$ et par $\varepsilon_{ij}^{p}(t)$ la déformation plastique locale. Dès qu'il y a adaptation la déformation plastique locale devient constante et donc la contrainte résiduelle locale également.

Critère de plasticité :
En un point du milieu continu (où il y a une répartition des directions cristallographiques aléatoire des grains), on suppose qu'il y a un seul grain qui est plastifié et ce, suivant un seul système de glissement. Ce système de glissement sera celui qui sera le plus favorablement orienté, c'est à dire, le grain dans lequel se produira la plus grande scission (la projection du vecteur cisaillement sur une direction donnée). Le glissement se fait dans les plans de normale $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ et la direction de glissement est définie par le vecteur $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2,m_3)$. Les deux vecteurs $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{m}$ sont orthogonaux.
La loi de **Schmid** dit que pour qu'il n'y ait pas de glissement irréversible (déformation plastique) il faut que la scission, ne dépasse pas un certain seuil, soit :

$$\forall\,\boldsymbol{m}\ \ \forall\,\boldsymbol{n}\ \ |\tau^{Loc}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m},t)|-\tau_{y}^{Loc}(t)\leq 0 \qquad \text{éq 3.2-1}$$

où

$$\tau^{Loc}(t)=a_{ij}\sigma_{ij}^{loc}\quad\text{et}\quad a_{ij}=\frac{1}{2}(m_i n_j+n_i m_j)$$

Le dessin de la [Figure 3.2-a] montre que la valeur maximale de τ^{Loc} , désignée par $\tau_{\max}^{Loc}$, s'obtient par la projection orthogonale de $F^{Loc}=\sigma_{ij}^{Loc}\,n_j$ sur le plan de normale $\boldsymbol{n}$. La relation [éq 3.2-1] doit notamment être vérifiée dans le cas où l'on remplace τ^{Loc} par son majorant $\tau_{\max}^{Loc}$, celle-ci s'écrit alors :

$$\forall\,\boldsymbol{n}\ \ |\tau_{\max}^{Loc}(\boldsymbol{n},t)|-\tau_{y}^{Loc}(t)\leq 0 \qquad \text{éq 3.2-2}$$

où $\tau_{y}^{Loc}(t)$ est le seuil de la scission microscopique ou local. $\tau_{y}^{Loc}(t)$ dépend des variables d'écrouissage.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

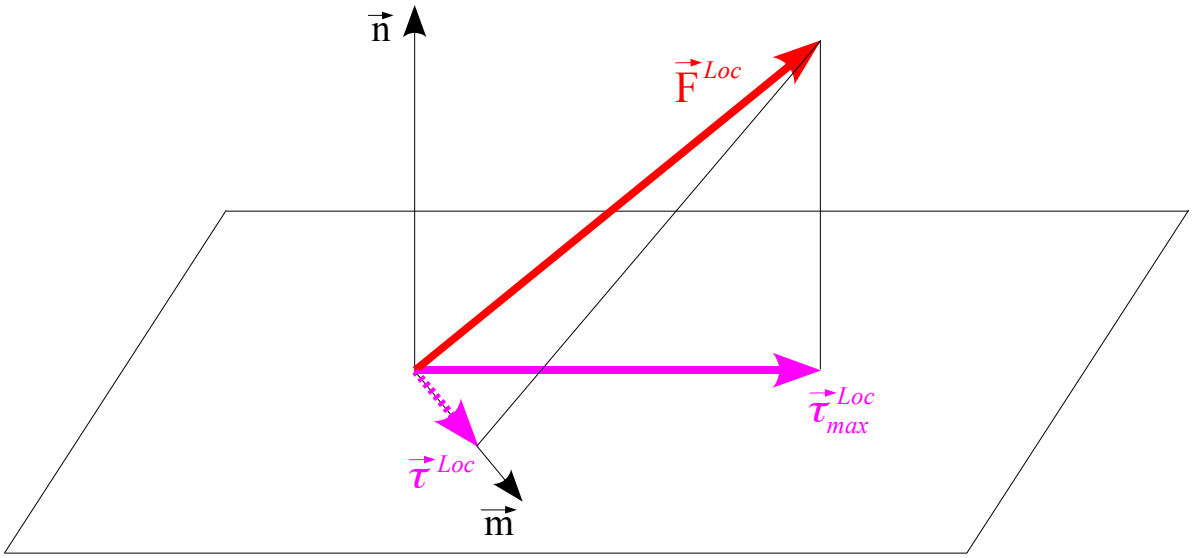


Figure 3.2-a : Projection de F^{Loc} sur le plan de normale n

On choisit un écrouissage microscopique du type isotrope linéaire. Cela permet de montrer l'existence d'un domaine d'adaptation [bib2], [bib3].
A l'état adapté par analogie avec la formule :

$$\sigma_{ij}^{Loc}(t)=\sigma_{ij}(t)+\rho_{ij}^{*}$$

on a, si l'on se place dans le plan $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$ de telle manière que la scission est maximale, la formule suivante :

$$\tau_{\max}^{Loc}(\boldsymbol{n},t)=\tau(n,t)+\tau^{*}(n)$$

où $\tau(\boldsymbol{n},t)$ est le vecteur cisaillement macroscopique défini dans la [Figure 3.2-b] et où $\tau^{*}(\boldsymbol{n})$ est le vecteur cisaillement résiduel microscopique (indépendant du temps puisque nous sommes à l'état adapté).

Critère de fatigue
Introduction de la pression maximale : DANG VAN utilise à la place de la contrainte normale sur un plan, comme cela est fait dans le modèle MATAKE, la pression hydrostatique maximale sur un cycle. Le critère s'écrit donc :

$$\underset{\boldsymbol{n},t}{MAX}\left(\left|\tau_{\max}^{Loc}(\boldsymbol{n},t)\right|+a\ P_{\max}^{Loc}\right)\leq b$$

Comme les pressions hydrostatiques locale et globale sont identiques le critère devient :

$$\underset{\boldsymbol{n},t}{MAX}\left(\left|\tau_{\max}^{Loc}(\boldsymbol{n},t)\right|+a\ P_{\max}\right)\leq b$$

Pour une pression maximale positive nous avons :

$$\underset{\boldsymbol{n},t}{MAX}\left(\left|\tau_{\max}^{Loc}(\boldsymbol{n},t)\right|\right)+a\ P_{\max}\leq b$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour une **pression toujours négative** on peut prendre $P_{\max}=0$ pour rester conservatif.

Hypothèse sur $\tau^*(n)$

Dans le cas radial où la direction du cisaillement maximal est définie à l'avance on peut calculer de façon exacte $\tau^*(n)$. Dans le cas général DANG VAN propose la méthode suivante pour faire un calcul simplifié de $\tau^*(n)$. On donne pour un plan n le trajet macroscopique du vecteur cisaillement défini précédemment. Le vecteur cisaillement résiduel compte tenu de l'hypothèse précédente est défini par MO, où M est le centre du cercle circonscrit au trajet de l'extrémité du vecteur cisaillement dans le plan de cisaillement.

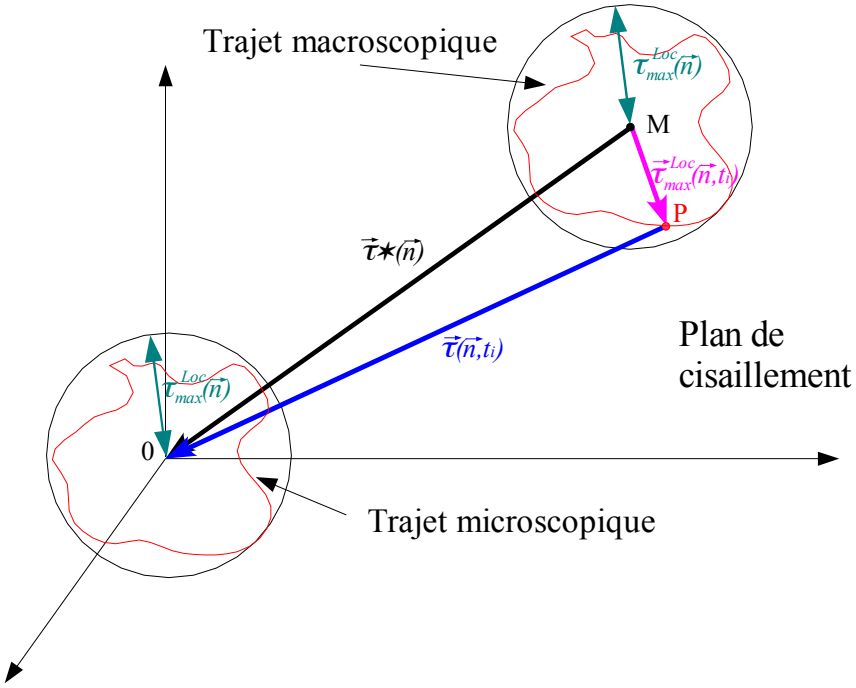


Figure 3.2-b : Trajets micro/macro dans le plan de cisaillement

Formulation Finale : prenant en compte les deux formules :

$$\tau^{Loc}_{\max}(\boldsymbol{n},t)=\tau(\boldsymbol{n},t)+\tau^*(\boldsymbol{n}) \quad \text{et} \quad \underset{\boldsymbol{n},t}{MAX}\left(\left|\tau^{Loc}_{\max}(\boldsymbol{n},t)\right|\right)+a\ P_{\max}\leq b$$

on se retrouve avec

$$\underset{\boldsymbol{n},t}{MAX}\left(|\boldsymbol{MP}|\right)+a\ P_{\max}\leq b$$

où P est un point courant du trajet de cisaillement dans le plan de normale $\boldsymbol{n}$.

Identification des constantes : pour déterminer les constantes a et b il faut utiliser deux essais simples. Deux possibilités existent :

- **Un essai de cisaillement pur plus un essai de traction compression alternée**. Dans ce cas les constantes sont données par : $b=\tau_0 \quad a=(\tau_0-d_0/2)/(d_0/3)$.
- **Deux essais de traction compression, un alterné et l'autre non**. Les constantes sont données par :

$$a=\frac{3}{2}\times\frac{\left(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_1\right)}{\left(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2\right)-2\ \sigma_m} \qquad b=\frac{\sigma_m}{\left(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_1\right)+2\ \sigma_m}\times\frac{\Delta\sigma_1}{2}\ .$$

avec $\Delta\sigma_1$ l'amplitude de chargement pour le cas alterné et $\Delta\sigma_2$ pour le cas où la contrainte moyenne est non nulle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 MATAKE et DANG VAN modifiés pour le cumul de dommage

Les modèles de MATAKE et DANG VAN ont été proposés initialement pour l'étude de la limite d'endurance. Comme la durée de vie infinie n'existe pas on utilise des limites d'endurance à, 10^6, 10^7, 10^n cycles de chargement. Ainsi les critères initiaux de MATAKE et DANG VAN sont présentés comme des critères de dépassement d'un seuil et ne donnent pas un cumul de dommage. L'utilisation, notamment du critère de DANG VAN, dans les industries automobiles est appropriée puisque l'objectif cherché est le non dépassement d'un seuil d'endurance contrairement aux problématiques d'EDF où on souhaite suivre l'endommagement.
Ainsi nous utilisons pour le cumul de dommage une contrainte équivalente de MATAKE ou de DANG VAN définie par :

$$\begin{aligned} &\text{MATAKE} \quad \sigma_{eq} = \frac{\Delta\tau}{2}(n^*) + a\, N_{\max}(n^*). \\ &\text{DANG VAN} \quad \sigma_{eq} = \text{MAX}_{\boldsymbol{n},t}(|\boldsymbol{MP}|) + aP_{\max} \end{aligned}$$

La prise en compte du traitement de surface est résumé à la prise en compte de l'effet néfaste du pré-écrouissage sur la durée de vie en déformation contrôlée [bib5]. Dans les modèles de MATAKE et DANG VAN l'effet du pré-écrouissage est pris en compte en multipliant la demi-amplitude de contrainte de cisaillement par un coefficient correctif supérieur à l'unité, noté c_p :

$$\begin{aligned} &\text{MATAKE} \quad \sigma_{eq} = c_p \frac{\Delta\tau}{2}(n^*) + a\, N_{\max}(n^*), \\ &\text{DANG VAN} \quad \sigma_{eq} = c_p \text{MAX}_{\boldsymbol{n},t}(|\boldsymbol{MP}|) + aP_{\max} \end{aligned}$$

Ces contraintes équivalentes sont à utiliser sur une courbe de fatigue en cisaillement. Pour l'utilisation sur une courbe de fatigue en traction compression il faut multiplier ces contraintes équivalentes par un coefficient correctif, noté ici α :

$$\begin{aligned} &\text{MATAKE} \quad \sigma_{eq} = \alpha\left(c_p \frac{\Delta\tau}{2}(n^*) + a\, N_{\max}(n^*)\right), \\ &\text{DANG VAN} \quad \sigma_{eq} = \alpha\left(c^p \text{MAX}_{\boldsymbol{n},t}(|\boldsymbol{MP}|) + aP_{\max}\right) \end{aligned}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Calcul du plan de cisaillement maximal

Nous utilisons ici la définition du plan de cisaillement introduite au paragraphe [§2.4]. Pratiquement, pour nous le point M du milieu continu sera un point de Gauss.

4.1 Expression des contraintes de cisaillement dans le plan Δ

Pour des raisons de symétrie nous faisons varier la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ selon une demi-sphère à l'aide des angles γ et φ, cf. [Figure 4.1-a].
Dans le repère $(O, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, le vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ est défini par :

$$n_x = \sin\gamma \cos\varphi \quad n_y = \sin\gamma \sin\varphi \quad n_z = \cos\gamma \ . \qquad \text{éq 4.1-1}$$

Nous introduisons un nouveau repère $(O, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ où $\boldsymbol{n}$ est perpendiculaire au plan de cisaillement Δ et où $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont dans ce plan, cf. [Figure 4.1-a]. Dans le repère $(O, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ les vecteurs unitaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont respectivement définis par :

$$u_x = -\sin\varphi \quad u_y = \cos\varphi \quad u_z = 0 \ , \qquad \text{éq 4.1-2}$$

$$v_x = -\cos\gamma \cos\varphi \quad v_y = -\cos\gamma \sin\varphi \quad v_z = \sin\gamma \ . \qquad \text{éq 4.1-3}$$

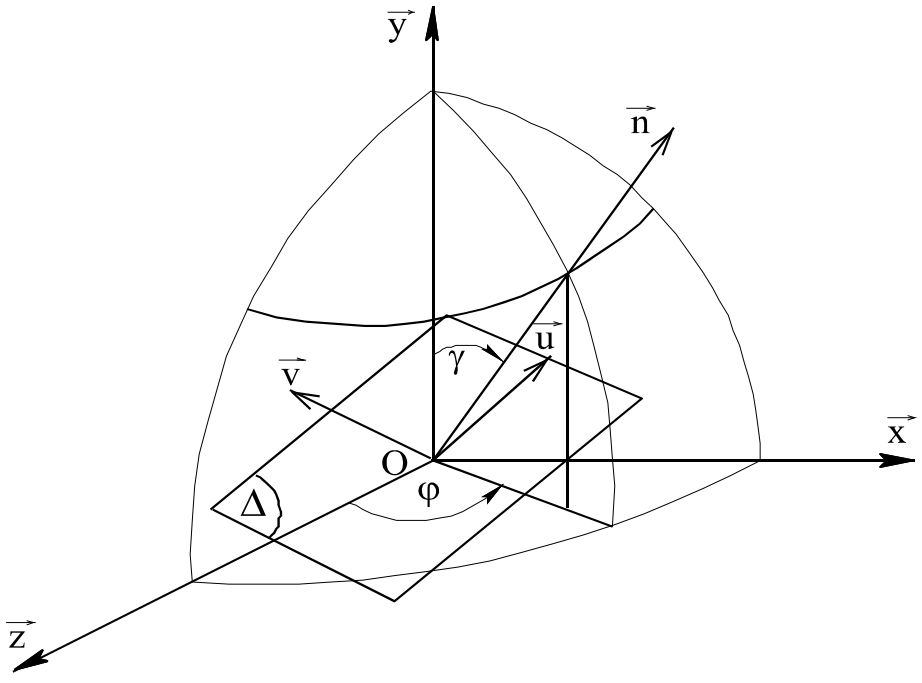


Figure 4.1-a : Repérage de la normale $\boldsymbol{n}$ à un plan par les angles γ et φ

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le plan Δ , les composantes τ_u et τ_v du vecteur $\boldsymbol{\tau}$ représentant la contrainte de cisaillement sont obtenues par les relations :

$$\tau_u = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau} = u_x\tau_x + u_y\tau_y + u_z\tau_z \ , \qquad \text{éq 4.1-4}$$

$$\tau_v = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau} = v_x\tau_x + v_y\tau_y + v_z\tau_z \ . \qquad \text{éq 4.1-5}$$

Sur la [Figure 4.1-b], nous avons représenté les contraintes de cisaillement dans le plan Δ ainsi que le repère $(O, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$.

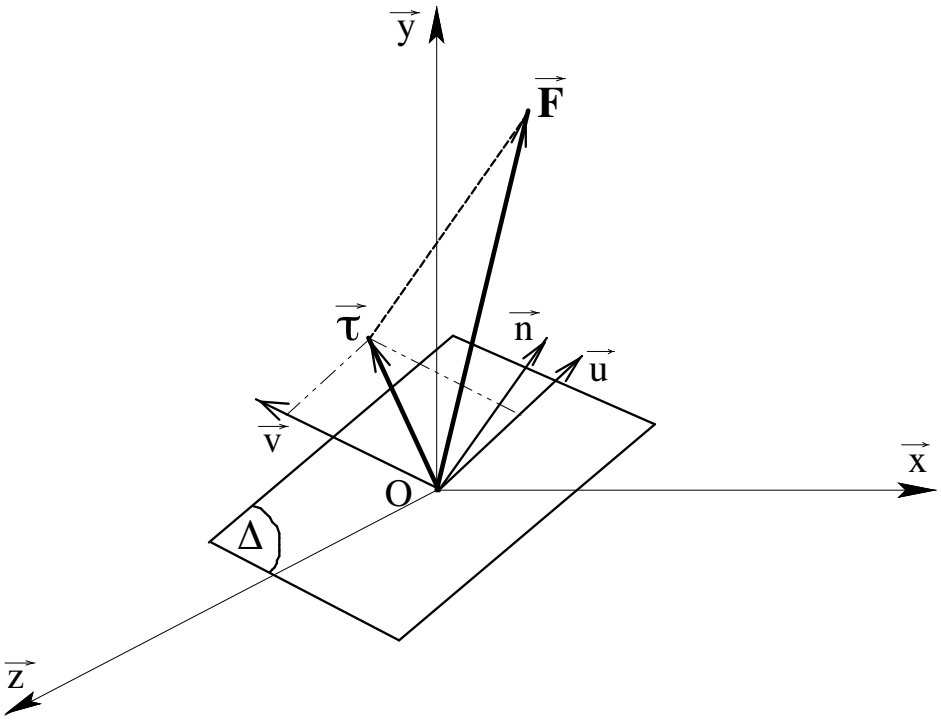


Figure 4.1-b : Représentation du vecteur contraintes de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ dans le plan Δ

A présent notre problématique est de déterminer pour chaque point de Gauss ou chaque nœud d'un maillage le plan de normale $\boldsymbol{n}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}|$ soit maximal. Pour ce faire nous faisons varier la normale unitaire $\boldsymbol{n}$.

4.2 Exploration des plans de cisaillement

La méthode que nous présentons ici est issue de la référence [bib4]. Son principe est le suivant. Comme indiqué dans le paragraphe [§4.1], pour des raisons de symétrie nous faisons varier la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ selon une demi-sphère à l'aide des angles γ et φ , cf. [Figure 4.1-a]. La question qui vient immédiatement est quel doit être le pas de variation des angles γ et φ . En effet, il faut trouver un optimum entre la finesse d'exploration et un temps de calcul raisonnable dans la mesure où il est nécessaire de faire cette opération à chaque point de Gauss du maillage. L'auteur de la référence [bib4] propose de diviser la surface de la demi sphère en facettes d'égales surfaces au centre desquelles la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ est positionnée, cf. [Figure 4.2-a]. En pratique les surfaces ne sont pas strictement égales mais du même ordre de grandeur.

La valeur du pas de variation de γ , $\Delta\gamma$ vaut 10 degrés. L'angle φ varie selon un pas $\Delta\varphi$ qui est fonction de l'angle γ . Plus γ est faible ou proche de 180 degrés et plus $\Delta\varphi$ doit être grand pour conserver une aire de facette à peu près constante. C'est au voisinage de $\gamma = 90°$ que $\Delta\varphi$ est le plus petit. Le [Tableau 4.2-1] résume le découpage qui a été retenu.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Avec cette méthode le nombre de facette donc le nombre de vecteurs normaux à explorer est égal à 209 pour une demi sphère.

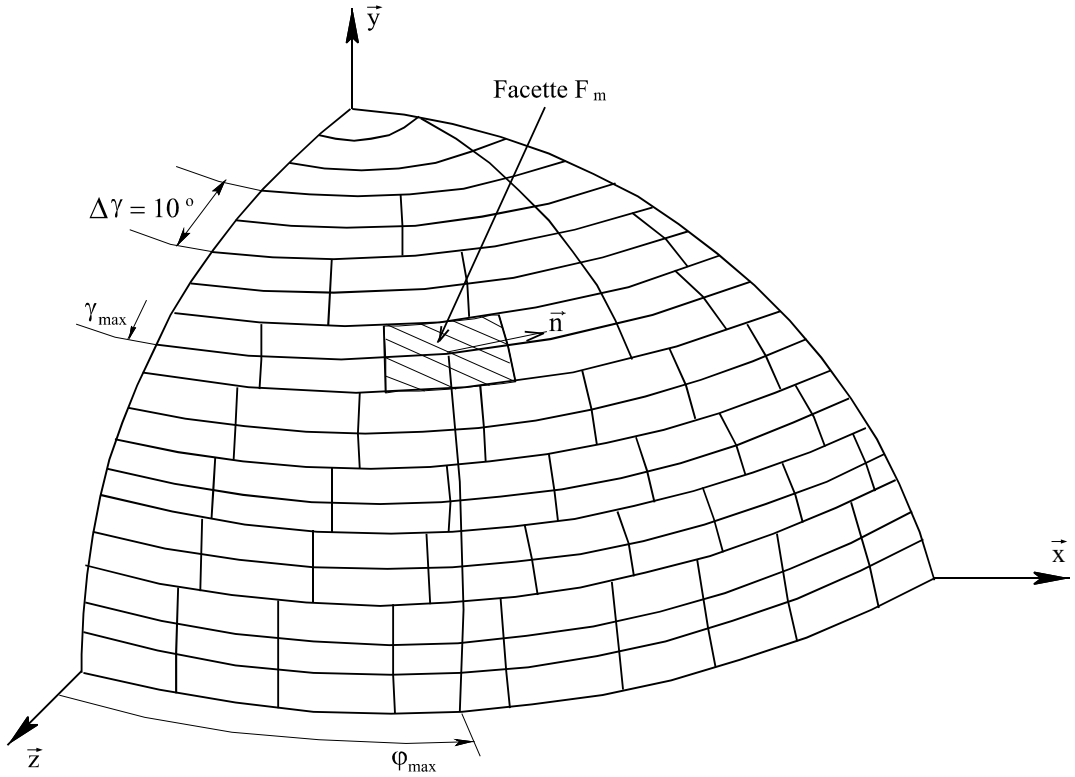


Figure 4.2-a : Division de la surface de la demi sphère en facettes

γ °	0 °	10 °	20 °	30 °	40 °	50 °	60 °
$\Delta\Phi$ °	180 °	60 °	30 °	20 °	15 °	12,857	11,25
Nombre de facettes	1	3	6	9	12	14	16

γ °	70 °	80 °	90 °	100 °	110 °	120 °	130 °
$\Delta\Phi$ °	10,588	10 °	10 °	10 °	10,588	11,25	12,857
Nombre de facettes	17	18	18	18	17	16	14

γ °	140 °	150 °	160 °	170 °	180 °
$\Delta\Phi$ °	15 °	20 °	30 °	60 °	180 °
Nombre de facettes	12	9	6	3	1

Tableau 4.2-1 : Nombre de facette en fonction de γ et de $\Delta\Phi$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Afin de déterminer le vecteur normal n qui donnera le plan de cisaillement maximal avec une bonne précision, l'auteur préconise de recourir à quatre affinages successifs supplémentaires. Le premier consiste à explorer huit nouvelles facettes autour du vecteur normal initial, comme l'illustre la [Figure 4.2-b].

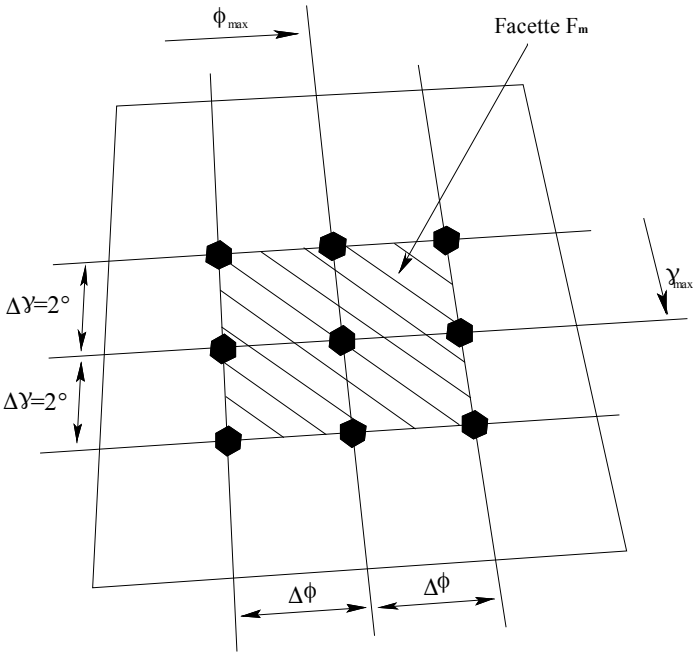


Figure 4.2-b : Représentation des huit facettes supplémentaires autour de n

Dans ce cas $\Delta\gamma$ est égal à deux degrés et pour $\gamma\in]0°, 180°[$, $\Delta\phi=\Delta\gamma/\sin\gamma$. Pour les trois derniers affinages, $\Delta\gamma$ est égal à 1, 0.5 et 0.25 degrés, respectivement.

Cas particulier. Dans le cas où la facette F_m est perpendiculaire à y, on considère les six facettes tout autour d'elle situées à $\gamma=5°$ et définies respectivement par $\Phi=0°$, $\Phi=60°$, $\Phi=120°$, $\Phi=180°$, $\Phi=240°$ et $\Phi=300°$, cf. [Figure 4.2-c].

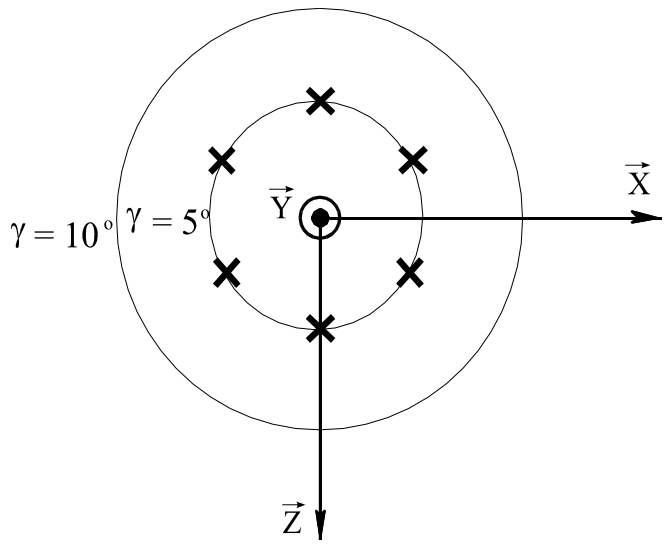


Figure 4.2-c : Localisation des facettes explorées lorsque F_m est normale à y

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour chaque point de Gauss ou chaque nœud nous explorons les 209 vecteurs normaux $\boldsymbol{n}$. A chaque vecteur normal est associé une histoire du cisaillement concrétisée par un certain nombre de points situés dans le plan de cisaillement Δ d'axes u et v . A présent il s'agit de trouver le cercle circonscrit aux points appartenant au plan de cisaillement de manière à en déduire la demi amplitude de cisaillement.

5 Calcul de la demi-amplitude de cisaillement

La problématique est donc de trouver le cercle circonscrit à un certain nombre de points situés dans un plan. La demi-amplitude de cisaillement sera égale au rayon du cercle circonscrit.

5.1 Présentation générale du calcul du cercle circonscrit

La méthode que nous utilisons est une méthode exacte qui se décompose en quatre étapes.

Étape 1
Nous encadrons les points et nous déterminons les coordonnées des quatre coins du cadre dans le repère $(0, u, v)$, et les coordonnées du centre du cadre O cf. [Figure 5.1-a] et [Figure 5.1-c]. **Dans le cas particulier** où le cadre se résume à une ligne horizontale ou verticale la demi longueur de la ligne est égale à la demi-amplitude de cisaillement.

Étape 2
L'objectif de la deuxième étape est de sélectionner les deux points les plus éloignés. Afin de ne pas examiner la distance entre toutes les paires de points possibles, nous construisons quatre secteurs, cf. [Figure 5.1-a] et [Figure 5.1-c]. Ces secteurs se situent aux quatre coins du cadre et sont délimités d'une part, par le contour du cadre et d'autre part, par un arc de cercle dont centre est le coin opposé et le rayon le grand côté du cadre qui en fait minore la distance entre les deux points les plus éloignés. Finalement, nous évaluons les distances entre les points des quatre secteurs deux à deux :

distances entre les points du secteur 1 et les points du secteur 2 ;
distances entre les points du secteur 1 et les points du secteur 3 ;
distances entre les points du secteur 1 et les points du secteur 4 ;
distances entre les points du secteur 2 et les points du secteur 3 ;
distances entre les points du secteur 2 et les points du secteur 4 ;
distances entre les points du secteur 3 et les points du secteur 4.

Dans le cas particulier où le rapport du petit côté du cadre sur le grand côté est strictement inférieur à $\sqrt{3/4}$ nous n'évaluons pas les distances entre les points appartenant aux secteurs 1 et 2 ni les distances entre les points des secteurs 3 et 4, cas de l'exemple de la [Figure 5.1-a].

Étape 3
Dans la troisième étape nous construisons les domaines 1 et 2 dans lesquels nous chercherons les points qui se trouvent en dehors du cercle circonscrit initial, cf. Étape 4. La constitution des domaines 1 et 2 a pour but de réduire le nombre de points à explorer lors de l'étape 4. Les principes de constructions de ces deux domaines sont les suivants.

- A partir des points milieux des deux grands côtés du cadre (Omi_1 et Omi_2 , cf. [Figure 5.1-b] et [Figure 5.1-d]) nous traçons un arc de cercle dont le rayon correspond au minorant de la valeur de la demi amplitude de cisaillement et est égal à la demi longueur du grand côté du cadre.
- Du centre du cadre O nous traçons quatre arcs de cercle dont le rayon est également le minorant de la valeur de la demi amplitude de cisaillement.

Si O_i le centre du cercle circonscrit initial a une composante selon l'axe u qui le place entre Omi_1 et O , alors si il existe un point dont la distance à O_i est supérieur à R_i le rayon du cercle circonscrit initial, il ne peut être que dans le domaine 1, cf. [Figure 5.1-b].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

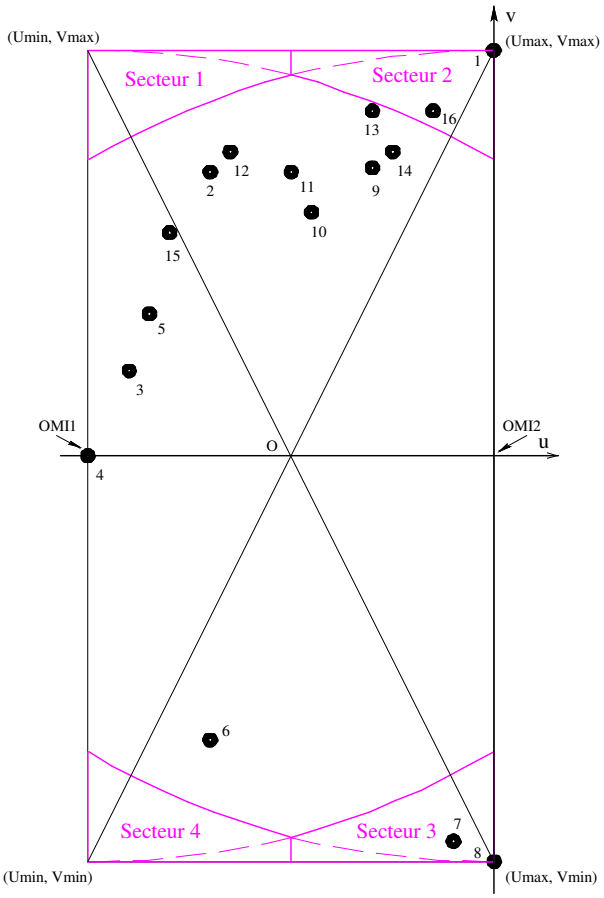


Figure 5.1-a : Exemple1, localisation des secteurs

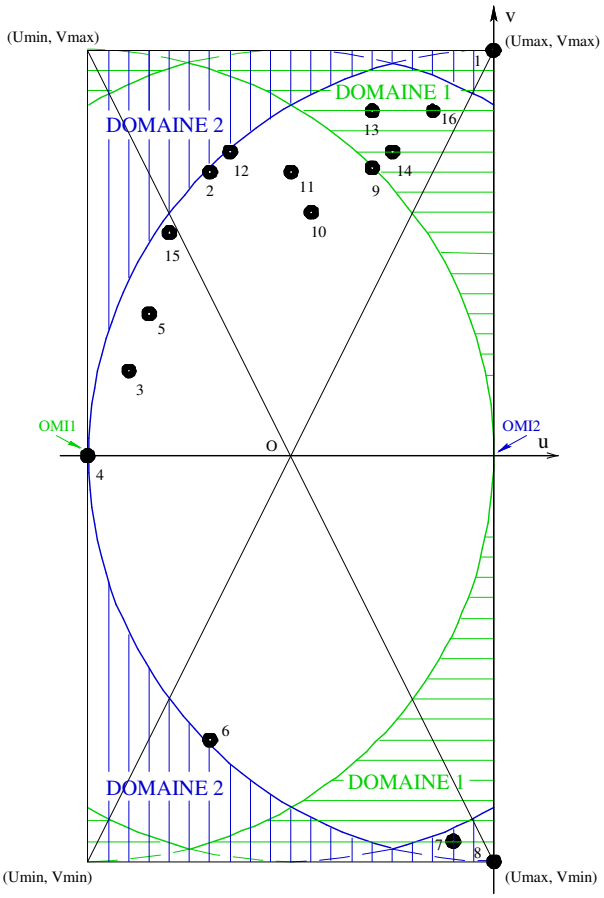


Figure 5.1-b : Exemple1, localisation des domaines

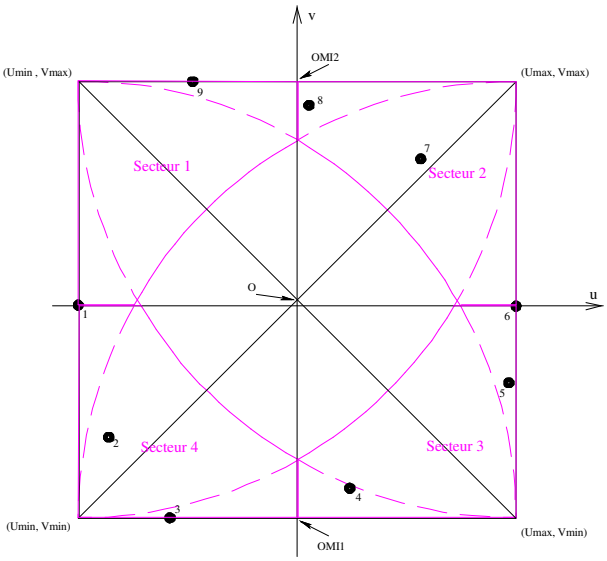


Figure 5.1-c : Exemple2, localisation des secteurs

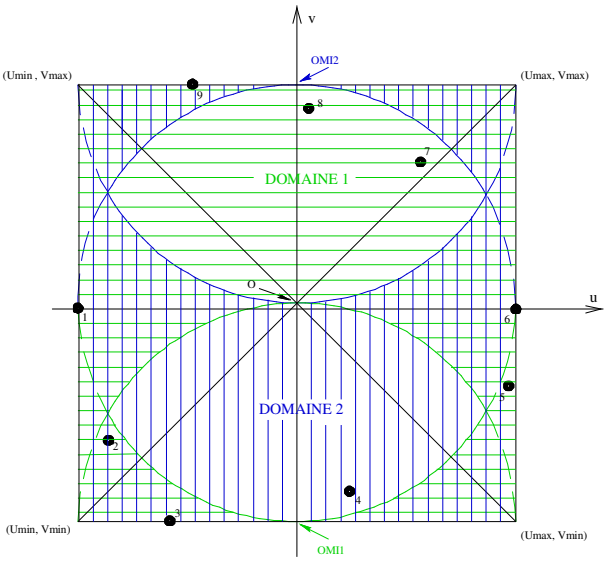


Figure 5.1-d : Exemple2, localisation des domaines

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Étape 4

Le but de la quatrième étape est de trouver le cercle circonscrit par la méthode du cercle passant par trois points, cf. [§5.2]. Pour ce faire, nous calculons le point milieu O_1 associé aux deux points les plus éloignés que nous notons P_1 et P_2, nous en déduisons la valeur d'un premier rayon noté R_1. En fonction de la position de O_1 par rapport au grand axe du cadre passant en son centre, nous cherchons soit dans le domaine 1, soit dans le domaine 2, s'il y a un point situé à une distance supérieure à la demi distance mesurée entre les deux points les plus éloignés P_1 et P_2. Notons P_3 un tel point. Si il n'y a pas de point tel que P_3 alors la demi amplitude de cisaillement est égale à R_1, cf. [Figure 5.1-c]. En revanche, si P_3 existe nous cherchons les coordonnées du point situé à égale distance de P_1, P_2 et P_3 ; nous notons ce point O_2. Nous obtenons ainsi un nouveau rayon, R_2 donc une nouvelle demi amplitude de cisaillement. De nouveau, en fonction de la position de O_2 par rapport au grand axe du cadre passant en son centre, nous cherchons soit dans le domaine 1, soit dans le domaine 2, s'il y a un point situé à une distance supérieure à R_2 de O_2. Notons P_4 un tel point. Si il n'y a pas de point tel que P_4 alors la demi amplitude de cisaillement est égale à R_2. En revanche, si P_4 existe nous cherchons le plus petit cercle circonscrit aux quatre points : P_1, P_2, P_3 et P_4 en utilisant successivement la méthode du cercle passant par trois points, cf. [§5.2]. Cela nous fournit un nouveau centre O_3 et un nouveau rayon R_3. Comme précédemment, en fonction de la position de O_3 par rapport au grand axe du cadre passant en son centre, nous cherchons soit dans le domaine 1, soit dans le domaine 2, s'il y a un point situé à une distance supérieure à R_3 de O_3. Notons P_5 un tel point. Si il n'y a pas de point tel que P_5 alors la demi amplitude de cisaillement est égale à R_3. En revanche si un point tel que P_5 existe nous avons cinq points, si nous voulons utiliser la méthode précédente, où il n'y a que quatre points en jeu, il est nécessaire d'éliminer un des cinq points. Cela ne peut pas être le dernier : P_5, donc nous conservons de l'itération précédente les trois points qui ont permis de déterminer O_3 et R_3, c'est-à-dire le plus petit cercle circonscrit. Supposons que P_1 soit ainsi éliminé. Nous cherchons donc le plus petit cercle circonscrit aux quatre points : P_2, P_3, P_4 et P_5 en utilisant successivement la méthode du cercle passant par trois points, cf. [§5.2]. Cela nous fournit un nouveau centre O_4 et un nouveau rayon R_4. En fonction de la position de O_4 par rapport au grand axe du cadre passant en son centre, nous cherchons soit dans le domaine 1, soit dans le domaine 2, s'il y a un point situé à une distance supérieure à R_4 de O_4. Si ce n'est pas le cas la demi amplitude de cisaillement est égale à R_4 et le cercle circonscrit a pour centre O_4, cf. [Figure 5.1-f]. A l'inverse, si un tel point existe nous refaisons une itération identique à la précédente.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

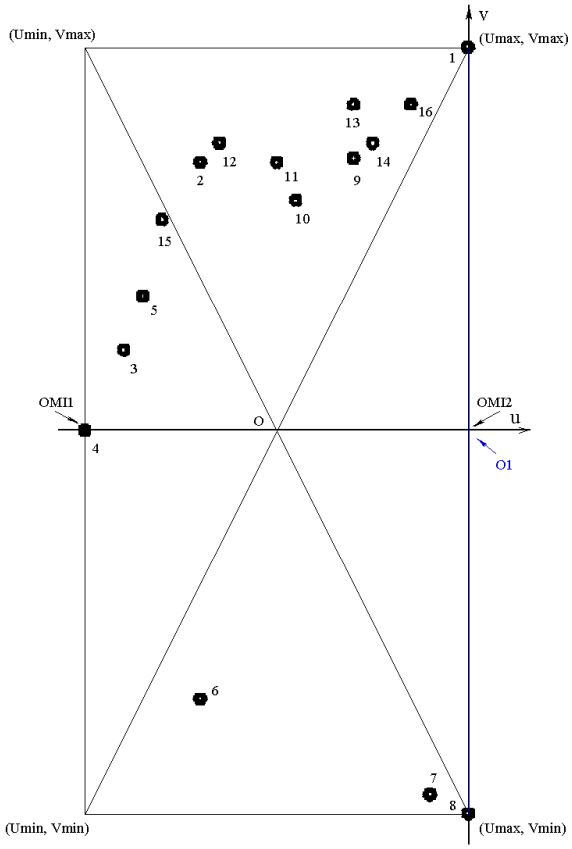


Figure 5.1-e : Exemple1, recherche du cercle circonscrit

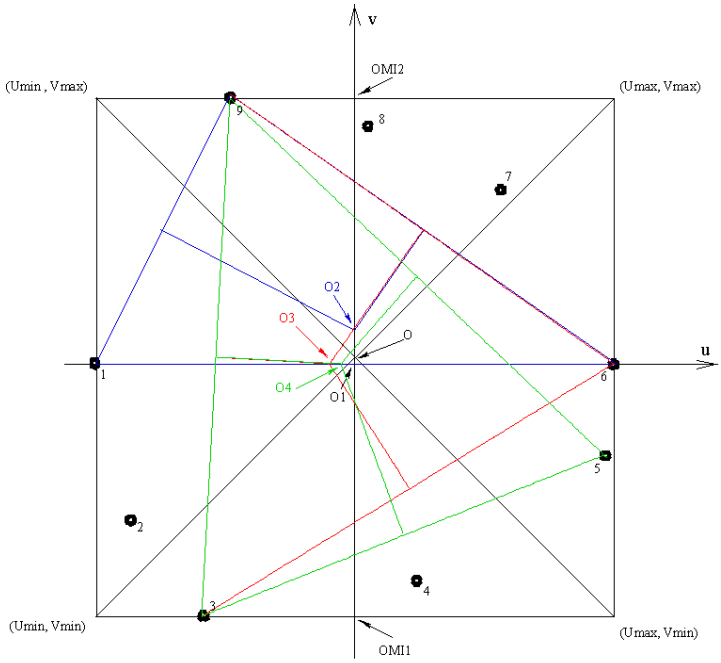


Figure 5.1-f : Exemple2, recherche du cercle circonscrit

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Description de la méthode du cercle passant par trois points

Dans ce paragraphe nous traiterons le cas général, puis les cas particuliers.

5.2.1 Cas général

Pour déterminer le cercle circonscrit à trois points P_0, P_1 et P_2, cf. [Figure 5.2.1-a], nous procédons en trois étapes.

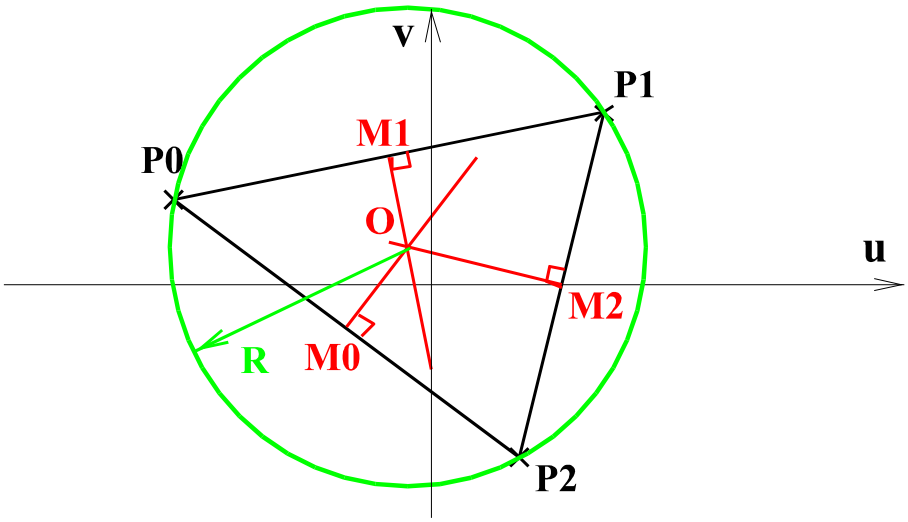


Figure 5.2.1-a : Détermination du cercle passant par trois points

Étape 1
Nous calculons les coordonnées des trois points milieux : M_0, M_1 et M_2, cf. [Figure 5.2.1-a].

Étape 2
Nous déterminons les normales passant par les trois points milieux : M_0, M_1 et M_2, cf. [Figure 5.2.1-a]. Ces normales sont des droites du type $v = a\,u + b$ où a et b sont des constantes qu'il est possible de calculer avec les coordonnées des points P_0, P_1, P_2, M_0, M_1 et M_2. Décrivons, à présent, la manière de déterminer ces normales.

1) Normale au segment P_0 P_1 passant par M_1
Nous déterminons les coordonnées d'un point $M_1^{'}$ par rotation de 90° du segment P_0 M_1 :

$$\begin{aligned} U_{M1'} &= U_{M1} + \left(V_{M1} - V_{P0}\right) \\ V_{M1'} &= V_{M1} + \left(U_{P0} - U_{M1}\right) \end{aligned} \qquad \text{éq 5.2.1-1}$$

où U_k et V_k avec $k = M1^{'}, M1, P0$ représentent les composantes u et v des points $M_1^{'}$, M_1 et P_0. Nous en déduisons les constantes a_0 et b_0 de la droite représentant la normale au segment P_0 P_1 passant par M_1 :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$a_0=\left(V_{M1'}-V_{M1}\right)/\left(U_{M1'}-U_{M1}\right)$$
$$b_0=\left(U_{M1'}\,V_{M1}-U_{M1}\,V_{M1'}\right)/\left(U_{M1'}-U_{M1}\right)$$ éq 5.2.1-2

Dans le cas particulier où $\left(U_{M1'}-U_{M1}\right)=0$, nous forçons a_0 et b_0 à zéro et nous obtenons les coordonnées du centre O du cercle circonscrit aux points P_0 , P_1 et P_2 par une méthode spécifique décrite dans le paragraphe [§5.2.2].

2) Normale au segment P_0 P_2 passant par M_0

Nous déterminons les coordonnées d'un point $M0'$ par rotation de 90° du segment P_0 M_0 :

$$U_{M0'}=U_{M0}+\left(V_{M0}-V_{P0}\right)$$
$$V_{M0'}=V_{M0}+\left(U_{P0}-U_{M0}\right)$$ éq 5.2.1-3

où U_k et V_k avec $k=M0',\ M0,\ P0$ représentent les composantes u et v des points $M0'$, M_0 et P_0 . Nous en déduisons les constantes a_1 et b_1 de la droite représentant la normale au segment P_0 P_2 passant par M_0 :

$$a_1=\left(V_{M0'}-V_{M0}\right)/\left(U_{M0'}-U_{M0}\right)$$
$$b_1=\left(U_{M0'}\,V_{M0}-U_{M0}\,V_{M0'}\right)/\left(U_{M0'}-U_{M0}\right)$$ éq 5.2.1-4

Dans le cas particulier où $\left(U_{M0'}-U_{M0}\right)=0$, nous forçons a_1 et b_1 à zéro et nous obtenons les coordonnées du centre O du cercle circonscrit aux points P_0 , P_1 et P_2 par une méthode spécifique décrite dans le paragraphe [§5.2.2].

3) Normale au segment P_1 P_2 passant par M_2

Nous déterminons les coordonnées d'un point $M_2^{'}$ par rotation de 90° du segment P_1 M_2 :

$$U_{M2'}=U_{M2}+\left(V_{M2}-V_{P1}\right)$$
$$V_{M2'}=V_{M2}+\left(U_{P1}-U_{M2}\right)$$ éq 5.2.1-5

où U_k et V_k avec $k=M2',\ M2,\ P1$ représentent les composantes u et v des points $M_2^{'}$, M_2 et P_1 . Nous en déduisons les constantes a_2 et b_2 de la droite représentant la normale au segment P_1 P_2 passant par M_2 :

$$a_2=\left(V_{M2'}-V_{M2}\right)/\left(U_{M2'}-U_{M2}\right)$$
$$b_2=\left(U_{M2'}\,V_{M2}-U_{M2}\,V_{M2'}\right)/\left(U_{M2'}-U_{M2}\right)$$ éq 5.2.1-6

Dans le cas particulier où $\left(U_{M2'}-U_{M2}\right)=0$, nous forçons a_2 et b_2 à zéro et nous obtenons les coordonnées du centre O du cercle circonscrit aux points P_0 , P_1 et P_2 par une méthode spécifique décrite dans le paragraphe [§5.2.2].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Étape 3

Dans le cas général, nous déduisons des constantes a_0 , b_0 , a_1 , b_1 , a_2 et b_2 les coordonnées du centre O du cercle circonscrit aux points P_0 , P_1 et P_2 de trois manière différentes. Notons O_0 , O_1 et O_2 le même centre O , obtenu de trois façons différentes, et U_k et V_k , où $k=O_0, O_1, O_2$, représentent les composantes u et v des points O_0 , O_1 et O_2 :

$$U_{O_0}=(b_1-b_0)/(a_0-a_1)$$
$$V_{O_0}=(a_0\ b_1-a_1\ b_0)/(a_0-a_1)$$ éq 5.2.1-7

$$U_{O_1}=(b_2-b_0)/(a_0-a_2)$$
$$V_{O_1}=(a_0\ b_2-a_2\ b_0)/(a_0-a_2)$$ éq 5.2.1-8

$$U_{O_2}=(b_2-b_1)/(a_1-a_2)$$
$$V_{O_2}=(a_1\ b_2-a_2\ b_1)/(a_1-a_2)$$ éq 5.2.1-9

Après avoir vérifié que les égalités : $U_{O_0}\equiv U_{O_1}\equiv U_{O_2}$ et $V_{O_0}\equiv V_{O_1}\equiv V_{O_2}$ sont satisfaites nous déterminons le rayon du cercle circonscrit en calculant la distance entre O et un des trois points P_0 , P_1 ou P_2 .

5.2.2 Cas particuliers

Dans ce paragraphe nous traitons les trois cas particuliers de l'étape 2 du paragraphe [§5.2.1].

Cas particulier où $(U_{M1'}-U_{M1})=0$

Dans ce cas nous obtenons immédiatement les composantes u et v du centre O par :

$$U_O=U_{M1}$$
$$V_O=(a_1\ b_2-a_2\ b_1)/(a_1-a_2)$$ éq 5.2.2-1

Cas particulier où $(U_{M0'}-U_{M0})=0$

Ici les composantes u et v du centre O sont données par :

$$U_0=U_{M0}$$
$$V_O=(a_0\ b_2-a_2\ b_0)/(a_0-a_2)$$ éq 5.2.2-2

Cas particulier où $(U_{M2'}-U_{M2})=0$

Dans ce dernier cas, les u et v du centre O sont données par :

$$U_0=U_{M2}$$
$$V_O=(a_0\ b_1-a_1\ b_0)/(a_0-a_1)$$ éq 5.2.2-3

La valeur du rayon du cercle circonscrit est obtenue de la même manière que dans le cas général ; c'est-à-dire, en calculant la distance entre O et un des trois points P_0 , P_1 ou P_2 .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Critères avec plans critiques

Dans ce paragraphe nous donnons la liste des critères avec plans critiques, cf. [bib3], qui sont programmés ainsi qu'un descriptif succinct.
Notation :

$\boldsymbol{n}*$: normale au plan dans lequel l'amplitude de cisaillement est maximale ;
$\Delta\tau(\boldsymbol{n})$: amplitude de cisaillement dans un plan de normale $\vec{n}$;
$N_{\max}(\boldsymbol{n})$: contrainte normale maximale sur le plan de normale $\vec{n}$ au cours du cycle ;
τ_0 : limite d'endurance en cisaillement pur alterné ;
d_0 : limite d'endurance en traction-compression pure alternée ;
$N_m(\boldsymbol{n})$: contrainte normale moyenne sur le plan de normale $\vec{n}$ au cours du cycle ;
$\varepsilon_{\max}(\boldsymbol{n})$: déformation normale maximale sur le plan de normale $\vec{n}$ au cours du cycle ;
$\varepsilon_m(\boldsymbol{n})$: déformation normale moyenne sur le plan de normale $\vec{n}$ au cours du cycle ;
P : pression hydrostatique ;
c_p : effet néfaste du pré-écrouissage en déformation contrôlée, $c_p \geq 1$.

Critère de MATAKE

$$\frac{\Delta\tau(\boldsymbol{n}*)}{2}+a\ N_{\max}(\boldsymbol{n}*)\leq b \qquad \text{éq 5.3-1}$$

où a et b sont deux constantes données par l'utilisateur, elles dépendent des caractéristiques matériaux et valent :

$$a=\left(\tau_0-\frac{d_0}{2}\right)/\frac{d_0}{2} \qquad b=\tau_0.$$

En outre, nous définissons une contrainte équivalente au sens de MATAKE, notée $\sigma_{eq}(n*)$:

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{n}*)=\left(c_p\frac{\Delta\tau(\boldsymbol{n}*)}{2}+a\ N_{\max}(\boldsymbol{n}*)\right)\frac{f}{t},$$

où f/t représente le rapport des limites d'endurance en flexion et torsion alternées.

Critère de DANG VAN

$$\frac{\Delta\tau(\boldsymbol{n}*)}{2}+a\ P\leq b \qquad \text{éq 5.3-2}$$

où a et b sont deux constantes données par l'utilisateur, elles dépendent des caractéristiques matériaux et valent :

$$a=\frac{3}{2}\times\frac{(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_1)}{(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2)-2\ \sigma_m} \qquad b=\frac{\sigma_m}{(\Delta\sigma_2-\Delta\sigma_1)+2\ \sigma_m}\times\frac{\Delta\sigma_1}{2}.$$

De plus, nous définissons une contrainte équivalente au sens de DANG VAN, notée $\sigma_{eq}(\boldsymbol{n}*)$:

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{n}*)=\left(c_p\frac{\Delta\tau(\boldsymbol{n}*)}{2}+a\ P\right)\frac{c}{t},$$

où c/t représente le rapport des limites d'endurance en cisaillement et traction alternés.

5.4 Nombre de cycles à la rupture et endommagement

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A partir de $\sigma_{eq}(n*)$ et d'une courbe de Wöhler nous déduisons le nombre de cycles à la rupture : $N(n*)$, puis l'endommagement correspondant à un cycle : $D(n*)=1/N(n*)$.

6 Critères à amplitude variable

Les critères à amplitude variable sont mis en œuvre lorsque le chargement n'est pas périodique. Quand le chargement n'est pas périodique il est nécessaire de décomposer le trajet de chargement subi par la structure en sous-cycles élémentaires à l'aide d'une méthode de comptage de cycles. Dans le cas où le chargement est non radial il n'y a pas de méthode de comptage multiaxiale éprouvée. En conséquence nous choisissons, comme dans la littérature, d'utiliser la méthode de comptage RAINFLOW [bib7] qui a besoin en entrée d'un scalaire. C'est pourquoi nous réduisons à une dimension la scission, qui est la projection orthogonale du vecteur contrainte sur un plan, en projetant la pointe du vecteur scission sur un ou deux axes. Une autre différence importante avec les critères à plan critique est que ce n'est pas l'amplitude de cisaillement qui permet de sélectionner le plan critique mais le cumul de dommage qui résulte des sous-cycles élémentaires.

La méthode de projection que nous utilisons est explicitée dans les chapitres 7 et 8. Dans la suite nous décrivons la façon dont nous avons fait évoluer les critères de MATAKE et de DANG VAN pour les adapter aux cas où le chargement est non périodique.

6.1 Critère de MATAKE modifié

Dans le contexte du cumul de dommage et d'un chargement périodique, le critère de MATAKE [bib6], s'écrit de la façon suivante :

$$\sigma_{eq}=c_p\frac{\Delta\tau(\vec{n}^*)}{2}+a\ N_{\max}(\vec{n}^*) \qquad \text{éq 6.1-1}$$

où σ_{eq} représente la contrainte équivalente au sens du critère de MATAKE et avec :

$\vec{n}^*$ normale au plan pour lequel l'amplitude de cisaillement est maximale ;
$\Delta\tau(\vec{n}^*)/2$ demi-amplitude de cisaillement maximale ;
a constante qui peut-être définie par un essai en cisaillement pur alterné et en traction-compression alternée ou par un essai en traction-compression alternée et en traction-compression non alternée ;
$N_{\max}(\vec{n}^*)$ contrainte normale maximale sur le plan de normale $\vec{n}^*$ au cours du cycle ;
c_p effet néfaste du pré-écrouissage en déformation contrôlée $c_p\geq 1$.

Pour calculer le dommage cumulé dans le cas où le chargement est non périodique la première étape consiste à déterminer la scission (vecteur cisaillement) dans un plan de normale $\vec{n}$ à tous les instants du chargement. La technique qui est utilisée pour ce faire est décrite dans la référence [bib6]. Dans la seconde étape nous commençons par réduire l'historique de la scission à une fonction unidimensionnelle du temps en projetant la pointe du vecteur scission sur un ou deux axes définis dans le plan de normale $\vec{n}$ considéré, cf. chapitre 7 et 8. Ainsi l'évolution de la scission projetée se résume à la relation : $\tau_p=f(t)$ ce qui permet d'utiliser la méthode de comptage RAINFLOW. Sur la figure [Figure 6.1-a] nous montrons les valeurs atteintes par l'extrémité du vecteur cisaillement dans un plan de normale $\vec{n}$ avant projection sur un axe ou deux axes et sur la figure [Figure 6.1-b] ces mêmes valeurs après projection sur un axe. À ce stade il nous faut introduire la notion de contrainte équivalente élémentaire σ_{eq}^i. Pratiquement cette notion a la même signification que la notion de contrainte équivalente définie par la relation [éq 6.1-1], mais elle s'applique aux sous-cycles élémentaires issus de la méthode de comptage RAINFLOW. Donc à partir de la scission projetée τ_p nous calculons des contraintes équivalentes élémentaires σ_{eq}^i.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

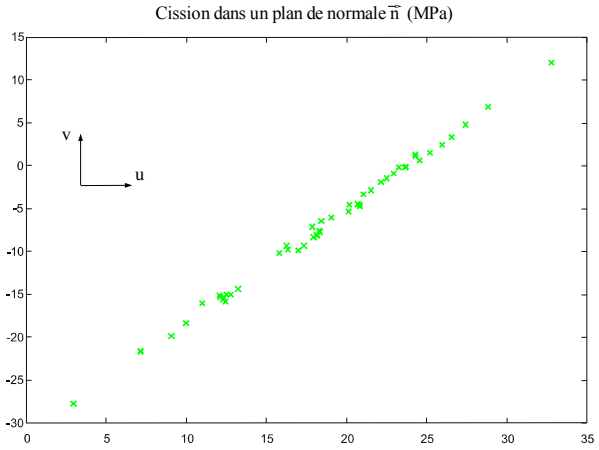


Figure 6.1-a : Pointes du vecteur cission avant projection

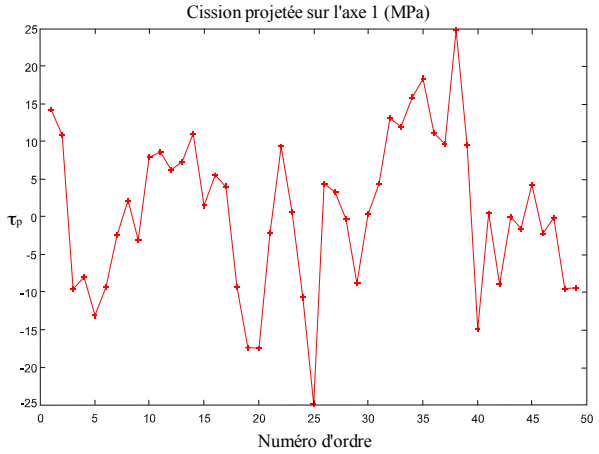


Figure 6.1-b : Pointes du vecteur cission après projection sur un axe

La méthode RAINFLOW décompose $\tau_p = f(t)$ en sous-cycles élémentaires périodiques et brise l'historique du chargement, comme nous le montrons sur la figure [Figure 6.1-c]. Ainsi, pour une normale $\vec{n}$ donnée la méthode RAINFLOW fournit pour chaque sous-cycle élémentaire deux valeurs, points haut et bas, de la pointe du vecteur cission $\tau^i_{p_1}(\vec{n})$ et $\tau^i_{p_2}(\vec{n})$ associées à deux valeurs de contrainte normale maximale $N^i_1(\vec{n})$ et $N^i_2(\vec{n})$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

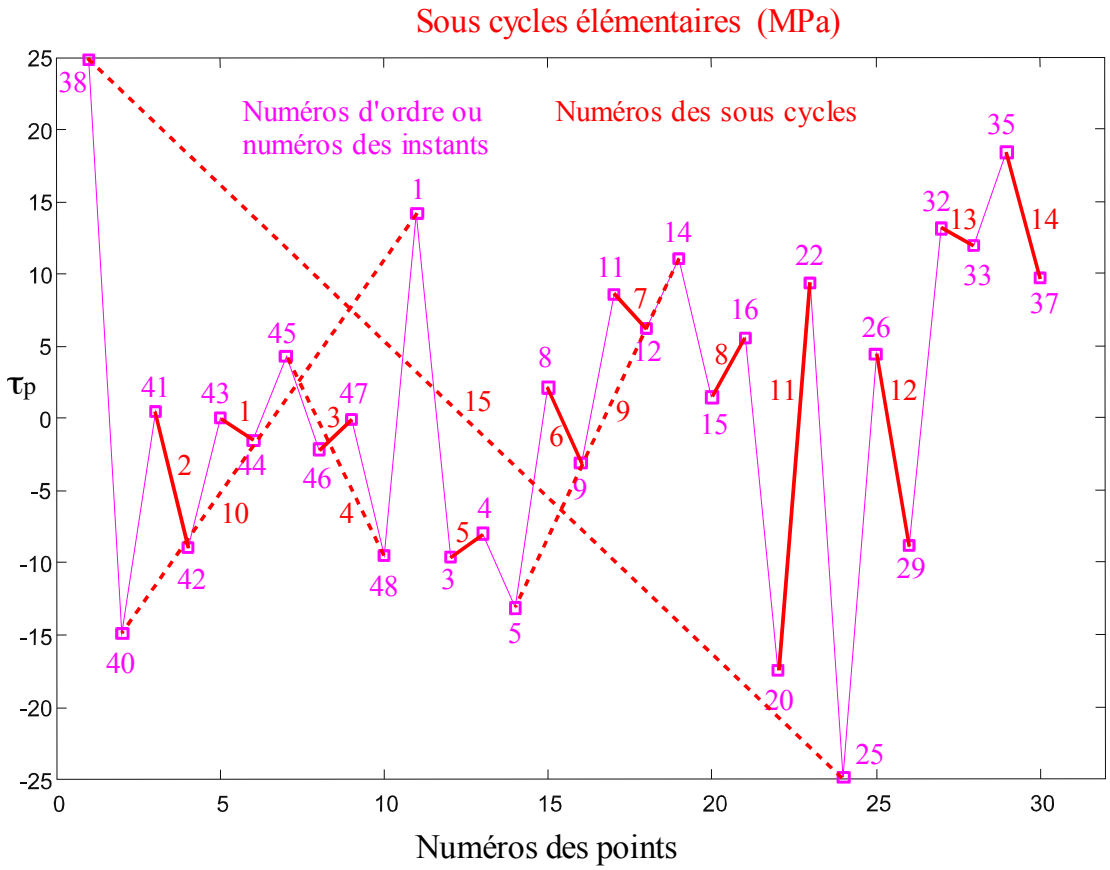


Figure 6.1-c : Les quinze sous-cycles élémentaires après traitement par la méthode RAINFLOW

Pour le critère de MATAKE nous définissons la contrainte équivalente élémentaire de la manière suivante :

$$\sigma_{eq}^{i}(\vec{n})=c_p\frac{Max\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)-Min\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)}{2}+a\ Max\left(N_1^i(\vec{n}),N_2^i(\vec{n}),0\right)$$ éq 6.1-2

Pour le cumul de dommage, cette contrainte équivalente élémentaire est à utiliser avec une courbe de fatigue en cisaillement. Si on utilise une courbe de fatigue en traction compression il faut multiplier [éq 6.1-2] par un coefficient correctif qui correspond au rapport des limites d'endurance en flexion et en torsion alternée et que nous notons α :

$$\sigma_{eq}^{i}(\vec{n})=\alpha\left(c_p\frac{Max\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)-Min\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)}{2}+a\ Max\left(N_1^i(\vec{n}),N_2^i(\vec{n}),0\right)\right)$$ éq 6.1-3

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A partir de $\sigma_{eq}^{i}(\vec{n})$ et d'une courbe de Wöhler nous déduisons le nombre de cycles à la rupture $N^{i}(\vec{n})$ et le dommage élémentaire $D^{i}(\vec{n})=1/N^{i}(\vec{n})$ correspondant à un sous-cycle élémentaire. Nous utilisons un cumul de dommage linéaire. Soit k le nombre de sous-cycles élémentaires, pour une normale $\vec{n}$ fixée, le dommage cumulé est égal à :

$$D(\vec{n})=\sum_{i=1}^{k} D^{i}(\vec{n}) \qquad \text{éq 6.1-4}$$

Pour déterminer le vecteur normal $\vec{n}^{*}$ correspondant au dommage cumulé maximal il suffit de faire varier $\vec{n}$ et de calculer [éq 6.1-4]. Le vecteur normal $\vec{n}^{*}$ correspondant au dommage cumulé maximal est alors donné par :

$$D(\vec{n}^{*})=\underset{\vec{n}}{Max}\left(D(\vec{n})\right)$$

6.2 Critère de DANG VAN modifié

Dans le cadre de l'endommagement et d'un chargement périodique, le critère de DANG VAN s'écrit :

$$\sigma_{eq}(\vec{n}^{*})=c_{p}\frac{\Delta\tau(\vec{n}^{*})}{2}+a\ P$$

où σ_{eq} représente la contrainte équivalente au sens du critère de DANG VAN et avec :

$\vec{n}^{*}$	normale au plan pour lequel l'amplitude de cisaillement est maximale ;
$\Delta\tau(\vec{n}^{*})/2$	demi-amplitude de cisaillement maximale ;
a	constante qui peut-être définie par un essai en cisaillement pur alterné et en traction-compression alternée ou par un essai en traction-compression alternée et en traction-compression non alternée ;
P	pression hydrostatique maximale au cours du cycle ;
c_{p}	effet néfaste du pré-écrouissage en déformation contrôlée $c_{p}\geq 1$.

Lorsque le chargement est non périodique, nous calculons l'endommagement par le même procédé que celui utilisé pour le critère de MATAKE. La seule différence réside dans la définition de la contrainte équivalente élémentaire :

$$\sigma_{eq}^{i}(\vec{n})=\frac{Max\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)-Min\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)}{2}+a\ Max\left(P_{1}^{i}(\vec{n}),P_{2}^{i}(\vec{n}),0\right) \qquad \text{éq 6.2-1}$$

où P_{1}^{i} et P_{2}^{i} représentent les deux valeurs de la pression hydrostatique attachées à chaque sous-cycle élémentaire. Cette contrainte équivalente élémentaire est à utiliser avec une courbe de fatigue en cisaillement. Si l'on doit employer une courbe de fatigue en traction compression il est nécessaire de multiplier [éq 6.2-1] par le coefficient correctif α :

$$\sigma_{eq}^{i}(\vec{n})=\alpha\left(c_{p}\frac{Max\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)-Min\left(\tau_{p_1}^{i}(\vec{n}),\tau_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)}{2}+a\ Max\left(P_{1}^{i}(\vec{n}),P_{2}^{i}(\vec{n}),0\right)\right)$$

Après avoir défini les critères de MATAKE et de DANG-VAN dans le cadre du cumul de dommage et d'un chargement non périodique, il nous reste à préciser la technique de projection que nous proposons.

6.3 Critère de FATEMI-SOCIE modifié

6.3.1 Description

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le critère de FATEMI et SOCIE est un critère de type plan critique [9], [10]. Initialement formulé pour des chargements périodiques, nous en proposons une version adaptée aux chargements non périodiques.
Dans ce critère le paramètre a est défini comme suit : $a=k/\sigma_y$ où σ_y est la limite d'élasticité et k un coefficient qui dépend du matériau. Nous reviendrons sur la façon de calculer k . Ce critère mêle le cisaillement en déformation et la contrainte normale maximale. Nous proposons de définir une déformation équivalente « élémentaire » de la manière suivante :

$$\varepsilon_{eq}^{i}(\vec{n})=\alpha\left(c_p\ \frac{Max\left(\gamma_{p_1}^{i}(\vec{n}),\gamma_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)-Min\left(\gamma_{p_1}^{i}(\vec{n}),\gamma_{p_2}^{i}(\vec{n})\right)}{2}\left[1+a\ Max\left(N_{1}^{i}(\vec{n}),\ N_{2}^{i}(\vec{n}),\ 0\right)\right]\right)$$

où $\gamma_{p_1}^{i}$ et $\gamma_{p_2}^{i}$ représentent les déformations de cisaillement extrêmes du sous-cycle numéro i .

Hormis une définition différente du critère, la démarche utilisée pour calculer le dommage est identique aux deux critères précédents. Enfin, c'est également le dommage maximum qui permet de sélectionner le plan critique.

On notera que les déformations de cisaillement utilisées dans le critère de FATEMI et de SOCIE sont des distorsions γ_{ij} ($i\neq j$). Si on utilise les déformations de cisaillement du type tensoriel ϵ_{ij} ($i\neq j$), il faut les multiplier par un facteur 2 car $\gamma_{ij}=2\epsilon_{ij}$.

6.3.2 Identification du coefficient *k*

L'auteur propose d'identifier le coefficient k à partir d'essais en traction-compression pure et en torsion alternée pure sur un tube mince [9], [10]. Afin de ne pas introduire de biais, les deux sortes d'essais doivent être réalisées sur le même type d'éprouvette. Avant de présenter la formule qui définit k nous introduisons les notations suivantes :

v : coefficient de Poisson, (vaut généralement $0,3$ pour nos matériaux) ;
v_p : coefficient de d'incompressibilité des déformations plastiques (vaut $0,5$ dans [9] et [10]) ;
E : Module d'élasticité de Young ;
G : Module de cisaillement élastique ;
N_f : Nombre de cycles à la rupture.

Contrairement aux deux critères précédents celui-ci peut traiter les cas où il subsiste des zones élastoplastiques dans la structure. Le coefficient k est défini par la relation suivante :

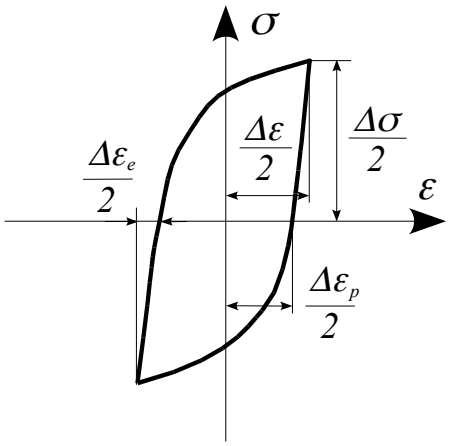
$$k=\left[\frac{\frac{\tau_f^{'}}{G}\left(2N_f\right)^{b_o}+\gamma_f^{'}\left(2N_f\right)^{c_o}}{(1+\nu)\frac{\sigma_f^{'}}{E}\left(2N_f\right)^{b}+(1+\nu_p)\varepsilon_f^{'}\left(2N_f\right)^{c}}-1\right]\frac{k^{'}(0,002)^{n'}}{\sigma_f^{'}\left(2N_f\right)^{b}}\ ,$$

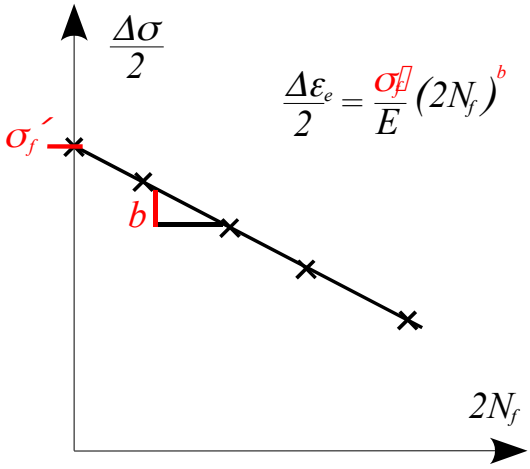
où les termes : $\tau_f^{'}$, b_o , $\gamma_f^{'}$, c_o , $\sigma_f^{'}$, b , $\varepsilon_f^{'}$, c , k' et n' sont définis par le truchement d'essais.

Essais en traction-compression pure

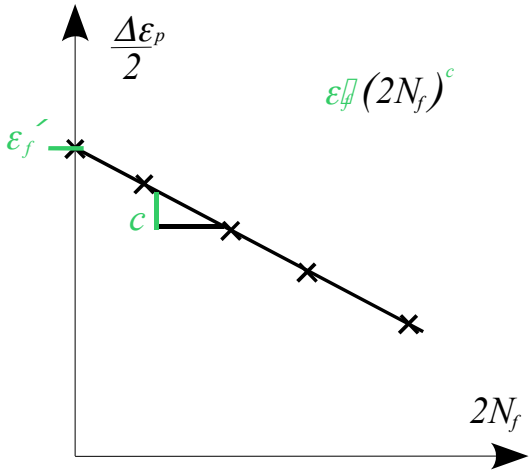
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les essais en traction-compression pure permettent d'identifier les coefficients :
σ_f' , b , ε_f' , c , k' et n' .





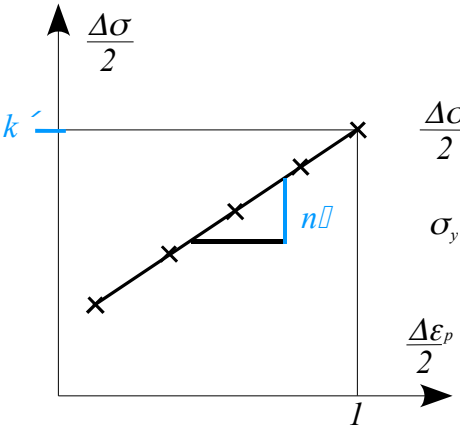
$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma_f'}{E}(2N_f)^b$$



$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon_f'(2N_f)^c$$

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_f'}{E}(2N_f)^b + \varepsilon_f'(2N_f)^c$$

Les courbes ci-contre utilisent des échelles Log-Log.



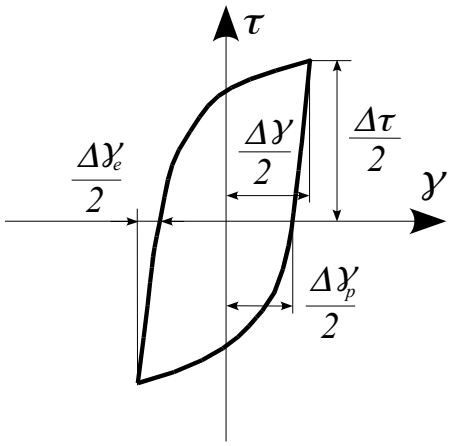
$$\frac{\Delta\sigma}{2} = k'\left(\frac{\Delta\varepsilon_p}{2}\right)^{n'}$$

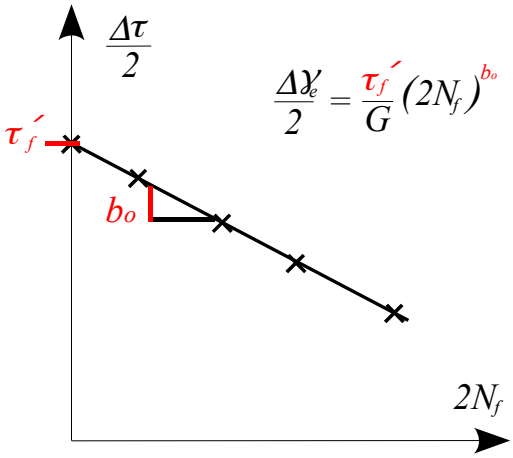
$$\sigma_y = k'(0{,}002)^{n'}$$

Essais en torsion alternée pure

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les essais en torsion alternée pure permettent d'identifier les coefficients :
$\tau_f^{'}$, b_o , $\gamma_f^{'}$, c_o .





$$\frac{\Delta\gamma_e}{2} = \frac{\tau_f^{'}}{G}(2N_f)^{b_o}$$

$$\gamma_a = \frac{\Delta\gamma}{2} = \frac{\tau_f^{'}}{G}(2N_f)^{b_o} + \gamma_f^{'}(2N_f)^{c_o} \qquad \gamma_a = \frac{\Delta\gamma}{2} = \frac{\tau_f^{'}}{G}(2n_f)^{b_o} + \gamma_f^{'}(2N_f)^{c_o}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Choix des axes de projection

En ce qui concerne la projection de l'extrémité du vecteur cission nous proposons deux options :

- une projection sur un axe,
- une projection sur deux axes.

L'axe de l'option 1 est déterminé de la même façon que le premier axe de l'option 2. Le second axe de l'option 2 est orthogonal au premier axe de cette option.

7.1 Projection sur un axe

Nous nous plaçons dans un plan de normale $\vec{n}$ donnée où chaque point représente la position de la pointe du vecteur cisaillement à un instant, pour plus de détails voir la référence [bib6]. Dans ce plan nous construisons le plus petit cadre qui contient tous les points représentant l'extrémité du vecteur cission à chaque instant. Les deux diagonales du cadre nous permettent de définir deux axes : l'axe 1 correspond au segment $\overline{AC}$, et l'axe 2 correspond au segment $\overline{DB}$, cf. [Figure 7.1].

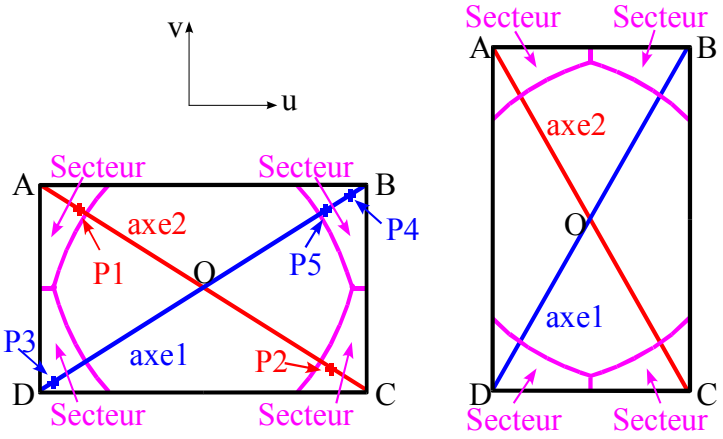


Figure 7.1-a **Figure 7.1-b**

Figure 7.1 : Définition des axes de projection

Nous choisissons a priori l'axe de projection parmi les axes 1 et 2 parce que la diagonale du cadre est plus grande que le grand côté du cadre ce qui a pour vertu de dilater un peu les points projetés. D'autre part les chargements qui nous intéressent sont d'origine thermique ce qui fait que les points représentant l'évolution de la pointe du vecteur cission, dans les plans de normale $\vec{n}$, sont le plus souvent alignées sur un axe, comme nous le montrons sur la figure [Figure 6.1-a].

Les secteurs 1, 2, 3 et 4 sont construits de la même manière que dans la référence [bib6]. Seuls les points qui se trouvent dans ces secteurs sont projetés orthogonalement sur les axes 1 et 2.

Nous définissons l'axe de projection comme étant l'axe sur lequel la distance entre deux points projetés est la plus grande.

Par exemple, sur la [Figure 7.1-a] l'axe de projection est l'axe 1 puisque la longueur du segment $\overline{P_3P_4}$ est supérieure à la longueur du segment $\overline{P_1P_2}$. Cette définition de l'axe de projection permet de s'assurer que l'axe de projection retenu permettra de rendre compte de l'amplitude de cisaillement projetée la plus grande.

En fonction de la présence ou de l'absence de points dans les secteurs 1, 2, 3 et 4 la détermination de l'axe de projection peut être immédiate, il n'est alors pas nécessaire de mettre en œuvre la procédure de sélection décrite ci-dessus. Pour plus de détails le lecteur pourra se reporter à l'annexe 1.

Un second axe est nécessaire pour distinguer le cas où les points représentant la pointe du vecteur cission sont alignés sur un axe du cas où ces points décrivent un cercle.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.2 Construction du second axe

Le second axe de projection est orthogonal à l'axe initial de projection et il passe par le point O.

Puisque nous connaissons les coordonnées des points A, B, C et D, pour caractériser complètement le second axe il suffit de déterminer les coordonnées d'un point M tel que :

$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$ si l'axe initial est l'axe 1,
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$ si l'axe initial est l'axe 2.

8 Projection du cisaillement

Dans ce chapitre nous décrivons le procédé de projection sur l'axe initial, ou premier axe, et le second axe. Nous rappelons que la projection sur ces deux axes est orthogonale.

8.1 Cas où l'axe 1 est l'axe initial

Ce cas est représenté sur la [Figure 8.1-a]. Plaçons-nous dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$. Les définitions de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont données dans la référence [bib6]. Dans le plan $(\vec{u}, \vec{v})$ de normale $\vec{n}$ les points A, B, C, D et O ont respectivement, pour coordonnées $(U_{\min}, V_{\max})$, $(U_{\max}, V_{\max})$, $(U_{\max}, V_{\min})$, $(U_{\min}, V_{\min})$ et (U_O, V_O).

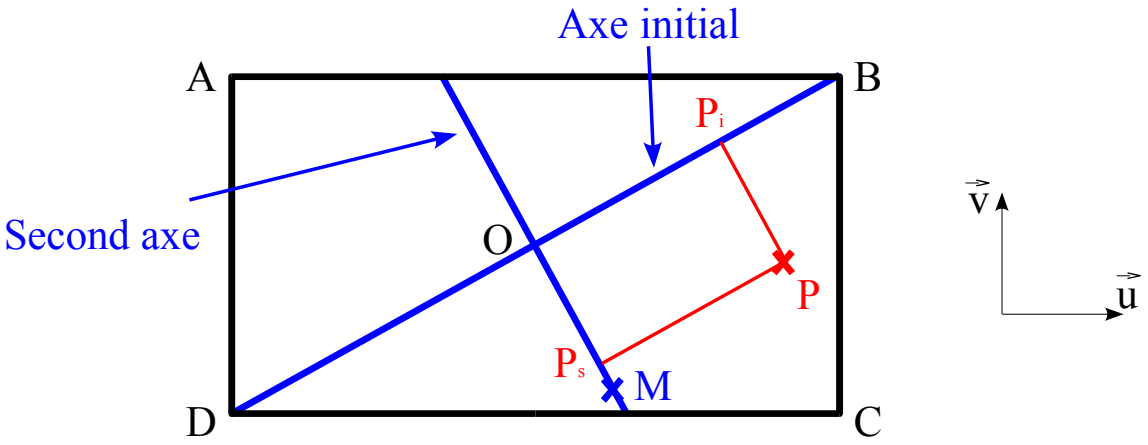


Figure 8.1-a : Projection dans le cas où l'axe 1 est l'axe initial

8.1.1 Détermination du second axe

Ici pour déterminer le second axe nous résolvons l'équation :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \qquad \text{éq 8.1.1-1}$$

où les coordonnées U_M, V_M du point M sont les inconnues.
L'équation [éq 8.1.1-1] s'écrit également sous la forme suivante :

$$(U_{\max} - U_{\min})(U_M - U_O) + (V_{\max} - V_{\min})(V_M - V_O) = 0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ce qui conduit à :

$$V_M = V_O - \frac{\left(U_{\max} - U_{\min}\right)}{\left(V_{\max} - V_{\min}\right)}\left(U_M - U_O\right)$$

En se donnant une valeur de U_M différente de U_O nous obtenons immédiatement V_M .

8.1.2 Projection d'un point quelconque sur l'axe initial

A partir d'un point P quelconque connu, la première étape consiste à calculer les coordonnées d'un point P tel que :

$$\vec{DB} . \vec{PP'} = 0$$

En procédant comme précédemment, nous obtenons la relation :

$$V_{P'} = V_P \frac{\left(U_{\max} - U_{\min}\right)}{\left(V_{\max} - V_{\min}\right)}\left(U_{P'} - U_P\right)$$

où $V_{P'}$ résulte d'une valeur de $U_{P'}$ différente de U_P.

Dans le plan (u,v) l'axe initial et le segment $P\bar{P}'$ sont des droites affines respectivement décrites par $v = a_i u + b_i$ et $v = a_P u + b_P$, donc pour connaître les coordonnées du point projeté sur l'axe initial P_p nous résolvons l'équation :

$$a_i u + b_i = a_P u + b_P$$

où

$$a_i = \frac{\left(V_{\max} - V_{\min}\right)}{\left(U_{\max} - U_{\min}\right)} \quad , \qquad b_i = \frac{\left(U_{\max} V_{\min} - U_{\min} V_{\max}\right)}{\left(U_{\max} - U_{\min}\right)} ,$$

$$a_P = \frac{\left(V_{P'} - V_P\right)}{\left(U_{P'} - U_P\right)} \quad , \qquad b_P = \frac{\left(U_{P'} V_P - U_P V_{P'}\right)}{\left(U_{P'} - U_P\right)} .$$

On obtient :

$$U_{P_i} = \frac{b_p - b_i}{a_i - a_p}$$

$$V_{P_i} = \frac{a_i b_P - a_P b_i}{a_i - a_P}$$

La projection d'un point quelconque sur le second axe est décrite dans l'annexe 2.

8.2 Cas où l'axe 2 est l'axe initial

Ce cas est représenté sur la [Figure 8.2-a]. Comme précédemment, dans le plan $(\vec{u}, \vec{v})$ les points A , B , C , D et O ont respectivement, pour coordonnées $(U_{\min}, V_{\max})$, $(U_{\max}, V_{\max})$, $(U_{\max}, V_{\min})$, (U_{min}, V_{min}) et $(U_{0,}V_0)$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

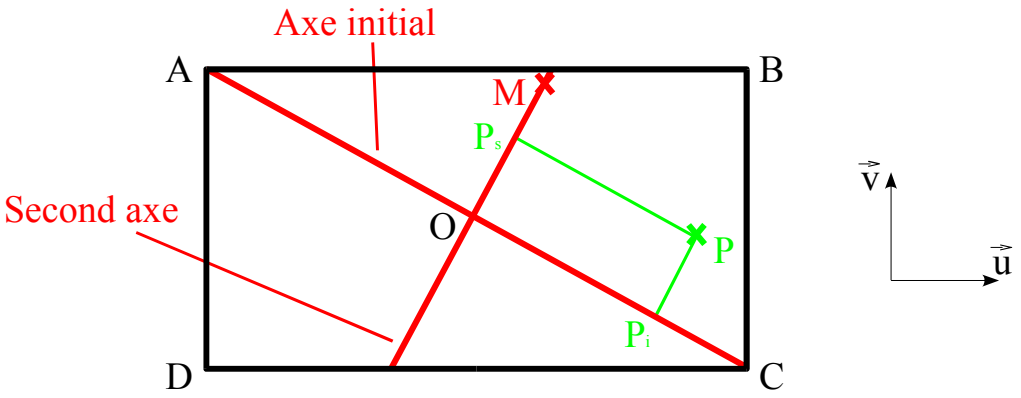


Figure 8.2-a : Projection dans le cas où l'axe 2 est l'axe initial

8.2.1 Détermination du second axe

Ici pour déterminer le second axe nous résolvons l'équation :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \qquad \text{éq 8.2.1-1}$$

où les coordonnées (U_M, V_M) du point M sont les inconnues.

L'équation [éq 8.2.1-1] s'écrit également sous la forme suivante :

$$(U_{\max} - U_{\min})(U_M - V_O)(V_{\max} - V_{\min})(V_M - V_O) = 0$$

ce qui conduit à :

$$V_M = V_O + \frac{(U_{\max} - U_{\min})}{(v_{\max} - V_{\min})}(U_M - U_O)$$

En se donnant une valeur de U_M différente de U_O nous obtenons immédiatement V_M.

8.2.2 Projection d'un point quelconque sur l'axe initial

A partir d'un point P quelconque connu, la première étape consiste à calculer les coordonnées d'un point P' tel que :

$$\vec{AC} \cdot \vec{PP'} = 0$$

En procédant comme précédemment, nous obtenons la relation :

$$V_{P'} = V_P \frac{(U_{\max} - U_{\min})}{(V_{\max} - V_{\min})}(U_{P'} - U_P)$$

où pour une valeur de $U_{P'}$ différente de U_P nous calculons $V_{P'}$.

Dans le plan (u, v) l'axe initial et le segment $P\bar{P}'$ sont des droites affines respectivement décrites par $v = a_i u + b_i$ et $v = a_p u + b_p$, donc pour connaître les coordonnées du point projeté sur l'axe initial P_p nous résolvons l'équation :

$$a_i u + b_i = a_p u + b_p$$

où

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$a_i = -\frac{(V_{\max} - V_{\min})}{(U_{\max} - U_{\min})} \quad , \qquad b_i = \frac{(U_{\max} V_{\max} - U_{\min} V_{\min})}{(U_{\max} - U_{\min})} \quad ,$$

$$a_p = \frac{(V_{P'} - V_P)}{(U_{P'} - U_P)} \quad , \qquad b_p = \frac{(U_{P'} V_p - U_P V_{P'})}{(U_{P'} - U_P)} \quad .$$

On obtient :

$$U_{P_i} = \frac{b_P - b_i}{a_i - a_P} \quad , \qquad V_{P_i} = \frac{a_i\, b_P - a_P\, b_i}{a_i - a_P} \quad .$$

La projection d'un point quelconque sur le second axe est décrite dans l'annexe 2.

8.3 Définition du module et orientation de l'axe de projection

Nous proposons de définir le signe du module du point projeté par rapport à l'axe initial. Soit le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ dans lequel évolue la scission. Dans ce repère si la composante U_{P_i} du point projeté est supérieure ou égale à zéro le signe du module est positif, sinon il est négatif. En résumé le module et le signe du module du point projeté sont définis de la manière suivante :

$$P_{\mathrm{mod}} = \sqrt{\overline{OP_i}^2 + \overline{OP_s}^2} \quad si \quad U_{P_i} \geq 0 \ ,$$
$$P_{\mathrm{mod}} = -\sqrt{\overline{OP_i}^2 + \overline{OP_s}^2} \quad si \quad U_{P_i} < 0 \ .$$

La définition du module différencie les chargements affines des chargements circulaires. Conformément à l'expérience un chargement circulaire sera considéré comme étant plus endommageant qu'un chargement affine [bib1].

9 Critères en formule

9.1 Pour le chargement périodique

Pour le chargement périodique, le calcul du dommage s'effectue seulement sur le premier cycle complet. La première partie de l'histoire du chargement correspondant au chargement monotonique n'est pas prise en compte car celle-ci a pour objectif d'imposer un chargement moyen non nul. Pour le comportement élastique, le calcul est réalisé entre la valeur maximale et la valeur minimale du cycle considéré. Pour le comportement élasto-plastique, le calcul est réalisé entre le premier décharge et le deuxième décharge.

La liste de grandeurs disponibles se trouve dans le tableau suivant :

TYPE_CHARGE = 'PERIODIQUE', CRITERE = 'FORMULE_CRITERE'
Les grandeurs disponibles sont :
'DTAUMA' : demi-amplitude de cisaillement en contrainte maximale ($\Delta\tau(\mathbf{n}^*)/2$)
'PHYDRM' : pression hydrostatique (P)
'NORMAX' : contrainte maximale normale sur le plan de normale ($N_{max}(\mathbf{n}^*)$)
'NORMOY' :contrainte normale moyenne sur le plan critique ($N_{moy}(\mathbf{n}^*)$)
'EPNMAX' :déformation normale maximale sur le plan critique ($\varepsilon_{Nmax}(\mathbf{n}^*)$)
'EPNMOY' :déformation normale moyenne sur le plan critique ($\varepsilon_{Nmoy}(\mathbf{n}^*)$)
'DEPSPE' :demi-amplitude de la déformation plastique équivalente ($\Delta\varepsilon_{eq}^p/2$)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Delta \varepsilon_{eq}^{p}/2=\frac{1}{2} max_{t1} max_{t2} \sqrt{\frac{2}{3}(\boldsymbol{\epsilon}^{p}(t_1)-\boldsymbol{\epsilon}^{p}(t_2)):(\boldsymbol{\epsilon}^{p}(t_1)-\boldsymbol{\epsilon}^{p}(t_2))}$$

'EPSPR1' :demi-amplitude de la première déformation principale (avec la prise en compte du signe)

$$\frac{\epsilon_{max}^{1}-\epsilon_{min}^{1}}{2}$$

'SIGNM1' :contrainte normale maximale sur le plan associé avec ε_1

$$max_t(\boldsymbol{\sigma}(t).\boldsymbol{n_1}(t).\boldsymbol{n_1}(t))$$

où $\boldsymbol{n_1}(t)$ est le vecteur normal du plan associé avec ε_1 .

'DENDIS' :densité d'énergie dissipée (W_{cy})

$$W_{cy}=\int_{cylce} \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{p} dt$$

où $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{p}$ représente le taux de la déformation plastique.

'DENDIE' :densité d'énergie des distorsions élastiques (W_e)

$$W_e=\int_{cylce} \langle \boldsymbol{s}:\dot{\boldsymbol{e}}^{e} \rangle dt$$

où $\boldsymbol{s}$ représente la partie déviatorique de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{e}^{e}$ représente la partie déviatorique de la contrainte $\boldsymbol{\epsilon}^{e}$ et $\langle x \rangle$ donne x si $x \geq 0$ et donne 0 si $x < 0$.

'APHYDR' :demi-amplitude de la pression hydrostatique (P_a)

$$P_a=\frac{P_{max}-P_{min}}{2}$$

'MPHYDR' :pression hydrostatique moyenne (P_m)

$$P_m=\frac{P_{max}-P_{min}}{2}$$

'DSIGEQ' :demi-amplitude de la contrainte équivalente ($\Delta \sigma_{eq}/2$)

$$\frac{\Delta \sigma_{eq}}{2}=\frac{1}{2} max_{t1} max_{t2} \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{s}(t_1)-\boldsymbol{s}(t_2)):(\boldsymbol{s}(t_1)-\boldsymbol{s}(t_2))}$$

'SIGPR1' :demi-amplitude de la première contrainte principale (avec la prise en du signe)

$$\frac{\sigma_{max}^{1}-\sigma_{min}^{1}}{2}$$

'EPSNM1' :déformation maximale normale sur le plan associé avec σ_1

$$max_t(\boldsymbol{\epsilon}(t).\boldsymbol{n_1}(t).\boldsymbol{n_1}(t))$$

où $\boldsymbol{n_1}(t)$ est le vecteur normal du plan associé avec σ_1 .

'INVA2S' :demi-amplitude du deuxième invariant de la déformation ($J_2(\Delta \epsilon)$)

$$J_2(\Delta \epsilon)=\frac{1}{2} max_{t1} max_{t2} \sqrt{\frac{2}{3}(\boldsymbol{e}(t_1)-\boldsymbol{e}(t_2)):(\boldsymbol{e}(t_1)-\boldsymbol{e}(t_2))}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

'DSITRE' :demi-amplitude de la demi-contrainte Tresca ($(\sigma_{max}^{Tresca}-\sigma_{min}^{Tresca})/4$)
'DEPTRE' : demi-amplitude de la demi-déformation Tresca ($(\epsilon_{max}^{Tresca}-\epsilon_{min}^{Tresca})/4$)
'EPSPAC' : déformation plastique accumulé p
'RAYSPH' : le rayon de la plus petite sphère circonscrite au trajet de chargement dans l'espace des déviateurs des contraintes R . Voir le document [R7.04.01] pour la définition de ce paramètre.
'AMPCIS' : amplitude de cission ($\tau_a = \frac{1}{2} \underset{0 \le t_0 \le T}{\text{Max}} \underset{0 \le t_1 \le T}{\text{Max}} \|\sigma_{(t_1)}^D - \sigma_{(t_0)}^D\|$)
'DEPSEE' : demi-amplitude de la déformation élastique équivalente ($\Delta\varepsilon_e^p/2$)

Il existe des grandeurs dépendant de l'orientation du plan qui passes au travers un point de matériel. Pour ces grandeurs, on définit des critères du type de plan critique. Le plan critique est le plan qui rend la valeur maximale d'une formule critique maximum.

'DTAUCR' : demi-amplitude de contrainte cisaillement sur le plan de normal **n** ($\Delta\tau(\mathbf{n})/2$)
'DGAMCR' : demi-amplitude de déformation (d'ingénierie) cisaillement sur le plan de normal **n** ($\Delta\gamma(\mathbf{n})/2$)
'DSINCR' : demi-amplitude de contrainte normale sur le plan de normal **n** ($\Delta N(\mathbf{n})/2$)
'DEPNCR' : demi-amplitude de déformation normale sur le plan de normal **n** ($\Delta\epsilon_n(\mathbf{n})/2$)
'MTAUCR' : contrainte cisaillement maximum sur le plan de normal **n** ($\tau_{max}(\mathbf{n})$)
'MGAMCR' : déformation (d'ingénierie) cisaillement maximum sur le plan de normal **n** ($\gamma_{max}(\mathbf{n})$)
'MSINCR' : contrainte normale maximum sur le plan de normal **n** ($N_{max}(\mathbf{n})$)
'MEPNCR' :déformation normale maximum sur le plan de normal **n** $\varepsilon_{nmax}(\mathbf{n})$

'DGAMPC' : demi-amplitude de déformation plastique (d'ingénierie) cisaillement sur le plan de normal **n** ($\Delta\gamma^p/2$)
'DEPNPC' :demi-amplitude de déformation plastique normale sur le plan de normal **n** ($\Delta\varepsilon_e^p/2$)
'MGAMPC' : déformation plastique (d'ingénierie) cisaillement maximum sur le plan de normal **n** ($\gamma_{max}^p(\mathbf{n})$)
'MEPNPC' : déformation plastique normale maximum sur le plan de normal **n** $\varepsilon_{nmax}^p(\mathbf{n})$

On notera qu'il existe deux types de mesure déformation de cisaillement : les distorsions de cisaillement γ_{ij} ($i \neq j$) et les déformations de cisaillement ϵ_{ij} ($i \neq j$). Notons que $\gamma_{ij}=2\epsilon_{ij}$. Pour 'DGAMCR', 'MGAMCR', 'MGAMPC', on a utilisé les distorsions de cisaillement γ_{ij} .

En utilisant au moins l'une des six premières grandeurs, on va implicitement construire le critère du type "plan critique". Dans ce cas là, on va trouver deux plans différents sur lesquelles le cisaillement est maximal.

On remarque que les noms des grandeurs sont identiques à ceux utilisés dans la programmation. Les opérateurs utilisés dans la formule doivent être conformes à la syntaxe de Python comme indiqué dans la note [U4.31.05].

On note que la grandeur équivalente sortie pour le chargement périodique est sous le nom 'SIG1' dans le résultat.

9.2 Pour le chargement non-périodique

La liste de grandeurs disponibles se trouve dans le tableau suivant:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

TYPE_CHARGE = 'NON-PERIODIQUE', CRITERE = 'FORMULE_CRITERE'
Les grandeurs disponibles sont :
'TAUPR_1': contrainte de cisaillement projetées du premier sommet du sous-cycle ($\tau_{p1}(\mathbf{n})$)
'TAUPR_2': contrainte de cisaillement projetées du deuxième sommet du sous-cycle ($\tau_{p2}(\mathbf{n})$)
'SIGN_1' : contrainte normale du premier sommet du sous-cycle ($N_1(\mathbf{n})$)
'SIGN_2' : contrainte normale du deuxième sommet du sous-cycle ($N_2(\mathbf{n})$)
'PHYDR_1': pression hydrostatique du premier sommet du sous-cycle
'PHYDR_2': pression hydrostatique du deuxième sommet du sous-cycle
'EPSPR_1': cisaillement en déformation projetés du premier sommet du sous-cycle ($\gamma_{p1}(\mathbf{n})$)
'EPSPR_2': cisaillement en déformation projetés du deuxième sommet du sous-cycle ($\gamma^i_{p2}(\mathbf{n})$)
'SIPR1_1': première contrainte principale du premier sommet du sous-cycle ($\sigma_1(1)$)
'SIPR1_2': première contrainte principale du deuxième sommet du sous-cycle ($\sigma_1(2)$)
'EPSN1_1': déformation normale sur le plan associé avec $\sigma_1(1)$ du premier sommet du sous-cycle
'EPSN1_2': déformation normale sur le plan associé avec $\sigma_1(2)$ du deuxième sommet du sous-cycle
'ETPR1_1': première déformation totale principale du premier sommet du sous-cycle ($\epsilon_1^{tot}(1)$)
'ETPR1_2': première déformation totale principale du deuxième sommet du sous-cycle ($\epsilon_1^{tot}(2)$)
'SITN1_1': contrainte normale sur le plan associé avec $\epsilon_1^{tot}(1)$ du premier sommet du sous-cycle
'SITN1_2': contrainte normale sur le plan associé avec $\epsilon_1^{tot}(2)$ du deuxième sommet du sous-cycle
'EPPR1_1': première déformation plastique principale du premier sommet du sous-cycle ($\epsilon_1^{p}(1)$)
'EPPR1_2': première déformation plastique principale du deuxième sommet du sous-cycle ($\epsilon_1^{p}(2)$)
'SIPN1_1': contrainte normale sur le plan associé avec $\epsilon_1^{p}(1)$ du premier sommet du sous-cycle
'SIPN1_2': contrainte normale sur le plan associé avec $\epsilon_1^{p}(2)$ du deuxième sommet du sous-cycle
'SIGEQ_1': contrainte équivalente du premier sommet du sous-cycle ($\sigma_{eq}(1)$)
'SIGEQ_2': contrainte équivalente du deuxième sommet du sous-cycle ($\sigma_{eq}(2)$)
'ETEQ_1' : déformation totale équivalente du premier sommet du sous-cycle ($\epsilon_{eq}^{tot}(1)$)
'ETEQ_2' : déformation totale équivalente du deuxième sommet du sous-cycle ($\epsilon_{eq}^{tot}(2)$)

Pour le chargement non-périodique, après avoir extrait les sous-cycles élémentaires avec la méthode RAINFLOW, nous calculons une grandeur équivalente élémentaire par la formule de critère pour tout sous-cycle élémentaire. On note que le sous cycle est représenté par deux états de contrainte ou déformation, notés par le premier et le deuxième sommets du sous-cycle.

En utilisant le critère en formule, on va implicitement construire le critère pour déterminer le plan du dommage maximal avec un cumul linéaire du dommage.

On note que l'utilisation des grandeurs 'TAUPR_1' et 'TAUPR_2' excluent celle de 'EPSPR_1' et 'EPSPR_2' car on peut projeter soit la contrainte de cisaillement , soit le cisaillement en déformation. Il n'est pas possible de projeter tous ces deux paramètres simultanément.

On remarque que les noms des grandeurs sont identiques à ceux utilisés dans la programmation. Les opérateurs utilisés dans la formule doit respecter la syntaxe de Python comme indiqué dans la note U4.31.05.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Grandeur et composantes introduites dans *Code_Aster*

10.1 Calculé par CALC_FATIGUE

Les valeurs calculées sont stockées aux points de Gauss ou aux nœuds suivant l'option retenue. La grandeur FACY_R (FAtigue CYclique) a été introduite dans le catalogue des grandeurs. Les composantes du champ de cette grandeur, calculé par CALC_FATIGUE [U4.83.02] sont décrites dans les tableaux suivants.

Pour le chargement périodique et les critères du type de plan critique de contrainte de cisaillement maximum (avec DTAUM1)

DTAUM1	**première** valeur de la demi amplitude max de contrainte cisaillement dans le plan critique
VNM1X	composante x du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM1
VNM1Y	composante y du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM1
VNM1Z	composante z du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM1
SINMAX1	contrainte maximale normale au plan critique correspondant à DTAUM1
SINMOY1	contrainte moyenne normale au plan critique correspondant à DTAUM1
EPNMAX1	déformation maximale normale au plan critique correspondant à DTAUM1
EPNMOY1	déformation maximale moyenne au plan critique correspondant à DTAUM1
SIGEQ1	Contrainte équivalente au sens du critère sélectionné correspondant à DTAUM1
NBRUP1	nombre de cycles avant rupture (fonction de SIGEQ1 et d'une courbe de Wöhler)
ENDO1	endommagement associé à NBRUP1 (ENDO1=1/NBRUP1)
DTAUM2	**deuxième** valeur de la demi amplitude max du cisaillement dans le plan critique
VNM2X	composante x du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM2
VNM2Y	composante y du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM2
VNM2Z	composante z du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM2
SINMAX2	contrainte maximale normale au plan critique correspondant à DTAUM2
SINMOY2	contrainte moyenne normale au plan critique correspondant à DTAUM2
EPNMAX2	déformation maximale normale au plan critique correspondant à DTAUM2
EPNMOY2	déformation maximale moyenne au plan critique correspondant à DTAUM2
SIGEQ2	Contrainte équivalente au sens du critère sélectionné correspondant à DTAUM2
NBRUP2	nombre de cycles avant rupture (fonction de SIGEQ2 et d'une courbe de Wöhler)
ENDO2	endommagement associe à NBRUP2 (ENDO2=1/NBRUP2)

Tableau 5.5-1 : Composantes spécifiques à la fatigue cyclique multiaxiale pour le chargement périodique

Pour le chargement périodique et les critères du type de plan critique avec le mot-clé FORMULE_CRITIQUE

VNM1X	Composante x du vecteur normal au plan critique qui maximise la formule critique
VNM1Y	Composante y du vecteur normal au plan critique qui maximise la formule critique
VNM1Z	Composante z du vecteur normal au plan critique qui maximise la formule critique
SIGEQ1	Contrainte équivalente au sens du critère sélectionné au plan critique qui maximise la formule critique
NBRUP1	Nombre de cycles avant rupture
ENDO1	Endommagement associé à NBRUP1 (ENDO1=1/NBRUP1)

Tableau 5.5-2 : Composantes spécifiques à la fatigue cyclique multiaxiale pour le chargement périodique et les critères du type plan critique avec le mot-clé FORMULE_CRITIQUE

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour le chargement non-périodique et les critères du type de plan critique du dommage maximum

VNM1X	Composante x du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM1Y	Composante y du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM1Z	Composante z du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
ENDO1	Endommagement associé au bloc du de chargement
VNM2X	Composante x du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM2Y	Composante y du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM2Z	Composante z du vecteur normal au plan critique liée au dommage max

Tableau 5.5-3 : Composantes spécifiques à la fatigue cyclique multiaxiale pour le chargement non-périodique

Pour le chargement non-périodique, s'il existe un seul plan critique du dommage maximum, VNM2X, VNM2Y, VNM2Z sont identiques aux VNM1X, VNM1Y, VNM1Z . Si plusieurs plans existent, on émet une alarme et on sort les deux premiers plans.

10.2 Calculé par POST_FATIGUE

Les valeurs calculées sont stockées aux points de Gauss ou aux nœuds suivant l'option retenue. La grandeur FACY_R (FAtigue CYclique) a été introduite dans le catalogue des grandeurs.

Les composantes calculées par POST_FATIGUE [U4.83.01] sont décrites dans les tableaux suivants.

Pour le chargement périodique et les critères du type de plan critique de contrainte cisaillement maximum

DTAUM1	**Première** valeur de la demi-amplitude max du cisaillement dans le plan critique
VNM1X	Composante x du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM1
VNM1Y	Composante y du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM1
VNM1Z	Composante z du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM1
SINMAX	Contrainte maximale normale au plan critique correspondant à DTAUM1
SINMOY	Contrainte moyenne normale au plan critique correspondant à DTAUM1
EPNMAX	Déformation maximale normale au plan critique correspondant à DTAUM1
EPNMOY	Déformation maximale moyenne au plan critique correspondant à DTAUM1
SIGEQ	Contrainte équivalente au sens du critère sélectionné correspondant à DTAUM1
NBRUP	Nombre de cycles avant rupture (fonction de SIGEQ1 et d'une courbe de Wöhler)
DOMMAGE	Endommagement associé à NBRUP1 (ENDO1=1/NBRUP1)
VNM2X	Composante x du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM2
VNM2Y	Composante y du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM2
VNM2Z	Composante z du vecteur normal au plan critique liée à DTAUM2

Tableau 5.5-1 : Composantes spécifiques à la fatigue cyclique multiaxiale pour le chargement périodique

Pour le chargement périodique et les critères du type de plan critique avec le mot-clé FORMULE_CRITIQUE

VNM1X	Composante x du vecteur normal au plan critique qui maximise la formule critique
VNM1Y	Composante y du vecteur normal au plan critique qui maximise la formule critique
VNM1Z	Composante z du vecteur normal au plan critique qui maximise la formule critique
SIGEQ1	Contrainte équivalente au sens du critère sélectionné au plan critique qui maximise la formule critique
NBRUP1	Nombre de cycles avant rupture
ENDO1	Endommagement associé à NBRUP1 (ENDO1=1/NBRUP1)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Tableau 5.5-2 : Composantes spécifiques à la fatigue cyclique multiaxiale pour le chargement périodique et les critères du type plan critique avec le mot-clé FORMULE_CRITIQUE

Pour le chargement non-périodique et les critères du type de plan critique du dommage maximum

VNM1X	Composante x du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM1Y	Composante y du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM1Z	Composante z du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
DOMMAGE	Endommagement associé au bloc du de chargement
VNM2X	Composante x du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM2Y	Composante y du vecteur normal au plan critique liée au dommage max
VNM2Z	Composante z du vecteur normal au plan critique liée au dommage max

Tableau 5.5-3 : Composantes spécifiques à la fatigue cyclique multiaxiale pour le chargement non-périodique

11 Autres critères

11.1 Critère VMIS_TRESCA

Dans cette partie nous décrivons l'option VMIS_TRESCA qui permet de calculer la variation maximale, au cours du temps, d'un tenseur de contrainte selon les critères de Von Mises et de Tresca.

Ce calcul peut être effectué au nœuds ou aux points de Gauss selon la demande de l'utilisateur.

Nous donnons ci-dessous l'algorithme qui est programmé dans *Code_Aster*.

Notations :

N : Nombre d'instants T_i : Tenseur à l'instant i

$DIFF_T$: différence entre deux tenseurs

$VAVMIS = 0.0$

$VATRES = 0.0$

Pour i de 1 à $(N-1)$

  Pour j de $(i+1)$ à N

    $DIFF_T = T_i - T_j$

    $VMIS =$ Von-Mises de $DIFF_T$

    $TRES =$ Tresca de $DIFF_T$

    Si $VMIS > VAVMIS$ alors

      $VAVMIS = VMIS$

    Si $TRES > VATRES$ alors

      $VATRES = TRES$

11.2 Composantes de *Code_Aster* utilisées

Le champ calculé par CALC_FATIGUE a pour composantes :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

VAVMIS Amplitude maximum de variation du critère de Von Mises
VATRES Amplitude maximum de variation du critère de Tresca

12 Conclusion

Dans ce document nous avons présenté les critères de MATAKE et de DANG-VAN adaptés au cumul de dommage sous chargement périodique et non périodique.

Lorsque le chargement est périodique les critères de MATAKE et de DANG-VAN sont testés par les cas tests SSLV135a et SSLV135b. Les cas tests SSLV135c et SSLV135d testent ces deux critères dans le cas où le chargement est non périodique.

Les mots clés qui permettent d'utiliser ces deux critères sont décrits dans le document [U4.83.02] consacré à la commande CALC_FATIGUE. On pourra également consulter le mot clé facteur CISA_PLAN_CRIT de la commande DEFI_MATERIAU [U4.43.01].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Bibliographie

- TAHERI S. : Bibliographie sur la fatigue à grand nombre de cycles, Note HI-74/94/086/0
- DANG VAN K., GRIVEAU B., MESSAGE O. : On a new multiaxial fatigue limit criterion : theory and application. Biaxial and Multiaxial Fatigue, Ed. Brown/Miller, 1989.
- MANDEL J., ZARKA J., HALPHEN B. : Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique. Mechanical research communications, Vol. 4 (5), 1977.
- CLEMENT J.C. : Etude et optimisation d'une méthode de calcul de fatigue sous sollicitations multiaxiales d'amplitude variable, Note HP-17/97/023/A, Juin 1997.
- TAHERI S. : La prise en compte d'un chargement à amplitude variable pour le calcul de dommage de fatigue dans les zones de mélanges – Projet FATMAV, Note HT-64/04/011, Décembre 2004.
- ANGLES J. ; Critères multiaxiaux d'amorçage en fatigue à grand nombre de cycles, plan critique, DANG VAN, Projet FATMAV, Note HT-64/03/015/A.
- Estimation de la durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles et en fatigue oligocyclique, Manuel de référence du Code_Aster, Document [R7.04.01].
- PAPADOPOULOS I. V. ; Fatigue polycyclique des métaux, une nouvelle approche, Thèse présentée à l'ENPC le 18 décembre 1987.
- SOCIE D. F. and MARQUIS G. B. "Multiaxial Fatigue", SAE International, 2000.
- FATEMI A. and SOCIE D. F. « A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading », Fatigue Fract. Mater. Struct. Vol. 11, No 3, pp. 149-165, 1988

14 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
8,4	J.ANGLE S EDF-R&D/AMA	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1

Les différentes situations sont résumées dans le [Tableau A1-1]. Dans le [Tableau A1-1], « 0 » et « 1 » signifient respectivement qu'il n'y a pas de points et qu'il y a au moins un point dans les secteurs désignés.

Secteur 1	Secteur 3	Secteur 2	Secteur 4	Axe de projection
0	0	0	0	Cas impossible.
0	0	0	1	Cas impossible.
0	0	1	0	Cas impossible.
0	0	1	1	Axe 1.
0	1	0	0	Cas impossible.
0	1	0	1	Utilisation de la procédure de sélection.
0	1	1	0	Utilisation de la procédure de sélection.
0	1	1	1	Axe 1.
1	0	0	0	Cas impossible.
1	0	0	1	Utilisation de la procédure de sélection.
1	0	1	0	Utilisation de la procédure de sélection.
1	0	1	1	Axe 1.
1	1	0	0	Axe 2.
1	1	0	1	Axe 2.
1	1	1	0	Axe 2.
1	1	1	1	Utilisation de la procédure de sélection.

Tableau A1-1 : Résumé des situations

Les cas impossibles résultent de la manière dont sont construits le cadre et les secteurs. Cette construction rend impossible la présence de points dans aucun ou un seul secteur.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2

La projection d'un point quelconque sur le second axe est rapidement décrite dans cette annexe. À partir d'un point P quelconque connu, nous calculons les coordonnées d'un point P' tel que :

$$\overrightarrow{OM} \,.\, \overrightarrow{PP'} = 0$$

Après simplification il vient la relation :

où une valeur de $U_{P'}$ différente de U_P nous donne $V_{P'}$.

Dans le plan (u,v) le second axe et le segment sont des droites affines respectivement décrites par $v = a_s u + b_s$ et $v = a_P u + b_P$, donc pour connaître les coordonnées du point projeté sur le second axe P_p nous résolvons l'équation :

$$a_s u + b_s = a_P u + b_P$$

où

$$a_s = \frac{(V_M - V_O)}{(U_M - U_O)} \quad , \qquad b_s = \frac{(U_M V_O - U_O V_M)}{(U_M - U_O)} \quad ,$$

$$a_P = \frac{(V_{P'} - V_P)}{(U_{P'} - U_P)} \quad ,$$

.

On obtient :

$$U_{P_s} = \frac{b_P - b_s}{a_s - a_P} \quad ,$$

$$V_{P_s} = \frac{a_s b_P - a_P b_s}{a_s - a_p} \quad .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)