Élément Hydromécanique couplé avec XFEM

Résumé :

Dans ce document nous présentons la formulation d'un nouveau type d'éléments finis. Il s'agit d'un élément hydromécanique traversé par une discontinuité (une interface ou une fissure) dont la conception repose sur l'utilisation de la méthode des éléments finis étendue dans la formulation des équations discrétisées du modèle poro-mécanique pour un milieu poreux saturé en fluide.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....4
2 Présentation du problème....5
2.1 Définition du domaine d'étude....5
2.2 Hypothèses et notations....5
3 Équations constitutives du modèle HM-XFEM....6
3.1 Équations pour la mécanique....6
3.1.1 Équation d'équilibre (cas du massif)....6
3.1.2 Modèle de zones cohésives (cas de l'interface)....7
3.1.3 Conditions aux limites pour la mécanique....8
3.2 É quations pour l'hydrodynamique....8
3.2.1 Équation de conservation de la masse (cas du massif)....8
3.2.2 Équation de conservation de la masse (cas de l'interface)....8
3.2.3 Conditions aux limites pour l'hydrodynamique....9
3.3 Équations du modèle poro-mécanique....9
3.3.1 Expression des apports massiques....9
3.3.2 Expression des flux massiques....9
3.3.3 Evolution de la variable de porosité....10
3.3.4 Evolution de la masse volumique du fluide....10
3.3.5 Dérivée des apports massiques....10
3.3.6 Dérivée des flux massiques....11
4 Formulation variationnelle....11
4.1 Formulation faible du problème mécanique....12
4.2 Formulations faibles du problème hydrodynamique....13
4.2.1 Formulation faible pour le massif....13
4.2.2 Formulation faible pour l'interface....13
5 Discrétisation du problème....13
5.1 Discrétisation temporelle....13
5.1.1 Discrétisation de l'équation mécanique....14
5.1.2 Discrétisation des équations de l'hydrodynamique....14
5.1.2.1 Cas du massif....14
5.1.2.2 Cas de l'interface....14
5.1.3 Discrétisation des équations du modèle poro-mécanique....14
5.1.3.1 Cas des apports massiques....14
5.2 Discrétisation avec XFEM....15
5.2.1 Représentation de l'élément HM-XFEM et ddls associés....15
5.2.2 Espace réduit pour la discrétisation des champs associés à la discontinuité....16
5.2.3 Approximations des champs avec XFEM....17
5.3 Extension au cas multi-fissuré....18

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3.1 Représentation de l'élément multi-fissuré HM-XFEM et ddls associés....18
5.3.2 Approximations des champs avec XFEM dans le cas multi-fissuré....19
5.3.3 Jonction de fractures hydrauliques....19
5.4 Imposition d'un flux dans une interface hydrauliques....20
6 Résolution du problème couplé....22
6.1 Linéarisation du problème couplé....22
6.1.1 Linéarisation par la méthode de Newton-Raphson....22
6.1.2 É criture intégrale du problème linéarisé....23
6.2 Écriture des termes élémentaires avec XFEM....25
6.2.1 Écriture sous forme matricielle du problème couplé....25
27
6.2.2 Expression des matrices élémentaires pour la mécanique....27
6.2.3 Expression des seconds membres pour la mécanique....28
6.2.4 Expression des matrices élémentaires pour l'hydrodynamique....29
6.2.4.1 Cas du massif....29
6.2.4.2 Cas de l'interface....29
6.2.4.3 Continuité de la pression....30
6.2.5 Expression des seconds membres élémentaires pour l'hydrodynamique....30
6.2.5.1 Cas du massif....30
6.2.5.2 Cas de l'interface....31
6.2.5.3 Continuité de la pression....31
7 Bibliographie....31
8 Description des versions du document....32

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

La formulation du modèle couplé HM-XFEM se base sur les équations du modèle de joint [R7.02.15] ainsi que sur celles du modèle de comportement THHM [R7.01.11] dans le cas saturé. Classiquement, le modèle de joint est utilisé pour modéliser en 2D le comportement d'un joint hydraulique ou d'une discontinuité en présence d'un écoulement de fluide en son sein, générant ainsi une pression de fluide. Le modèle de joint permet de prendre en compte :

- l'écoulement préférentiel du fluide dans la discontinuité conditionné par l'ouverture de celle-ci,
- l'échange de fluide entre le milieu poreux et la discontinuité le traversant,
- la propagation de la discontinuité,
- la déformation du milieu poreux induite par la pression de fluide.

Dans le cadre de la méthode des éléments finis classique, l'utilisation d'un tel modèle présente un inconvénient majeur. En effet il est nécessaire de représenter explicitement la discontinuité dans le maillage et de faire concorder les lèvres de celle-ci avec les bords des éléments constituant le maillage. Cela implique qu'au cours de son évolution, il faille avoir recours à des algorithmes de projection élaborés pour l'actualisation de sa géométrie. Cette étape peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul pour des géométries complexes.

Afin de s'affranchir de cette contrainte liée au maillage, nous envisageons l'introduction d'un nouvel élément hydromécanique (HM) couplé avec la méthode des éléments finis étendue (XFEM) [1,2,3]. Cette méthode, basée sur le principe de partition de l'unité [4], assure une plus grande flexibilité pour des modélisations faisant intervenir des géométries plus ou moins complexes. En effet avec cette méthode, la discontinuité n'est plus représentée physiquement dans le maillage mais de manière symbolique en enrichissant avec des degrés de liberté supplémentaires, les champs approximés. Pour plus de détails sur la méthode des éléments finis étendue dans *Code_Aster*, l'utilisateur peut se reporter à la documentation [R7.02.12] (cas mécanique uniquement).

Dans la littérature certains auteurs ont déjà envisagé le couplage de la méthode XFEM avec le modèle poro-mécanique couplé HM. C'est le cas de [5] dans le cas de l'analyse dynamique des milieux poreux en conditions insaturées. L'extension au cas THM pour un milieu saturé traversé par une interface imperméable est envisagée dans [6]. D'autres auteurs comme [7] ont proposé un modèle pouvant prendre en compte la singularité du champ de pression en pointe de discontinuité, en adaptant l'expression des fonctions singulières pour le fond de discontinuité. Cependant, les modèles développés par ces auteurs ne prennent en compte ni les phénomènes d'échange qui peuvent exister entre le milieu environnant (nommé massif dans la suite de ce document) et la discontinuité, ni la propagation de cette dernière au sein du milieu poreux. Ce point sera pris en compte dans le modèle développé dans la présente documentation par l'introduction des lois cohésives régularisées dans la formulation faible de l'équation d'équilibre mécanique (voir § 3.1.2).

D'un point de vue pratique, la principale difficulté dans la formulation de l'élément HM-XFEM est la construction des différents espaces d'approximation des grandeurs mécaniques et hydrauliques. Le respect de la condition de stabilité LBB est essentiel afin d'obtenir une solution unique et convergente [8,9]. La violation de cette condition (c'est-à-dire ne pas choisir le bon degré d'interpolation des différents champs approximés voir § 5.2.1) entraîne des oscillations de la solution. La cohabitation des éléments HM-XFEM et des éléments classiques HM (ceux dont font référence les documentations [R7.01.11] et [R7.01.10]) est également un point délicat, notamment en ce qui concerne la répartition des degrés de liberté aux différents nœuds (sommets ou milieux) de chaque type d'élément (voir § 5.2.1).

Dans la suite de cette documentation nous rappellerons le cadre d'étude du problème, puis dans un second temps les équations fondamentales du modèle poro-mécanique impliquées dans la formulation du modèle HM-XFEM. Enfin nous procéderons à la discrétisation des formes variationnelles des équations d'équilibre, à la fois en temps (grâce à un θ-schéma) et en espace (grâce à la méthode XFEM).

La présentation du modèle HM-XFEM et sa validation ont fait l'objet d'une publication scientifique [15] .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Présentation du problème

2.1 Définition du domaine d'étude

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \in \{2,3\}$ un domaine traversé entièrement par une fissure ou une interface perméable. Soit $\boldsymbol{n}$ la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$ du domaine, et $\boldsymbol{n}_c$ celle de l'interface Γ_c.

Il est possible de décomposer :

- la frontière du domaine Ω en $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_p \cup \Gamma_F$ où sont imposées les conditions aux limites (de type Dirichlet et Neumann) pour l'hydrodynamique (sur Γ_p et Γ_F) et pour la mécanique (sur Γ_u et Γ_t),
- l'interface en $\Gamma_c = \Gamma_f \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où Γ_1 et Γ_2 représentent les lèvres de la discontinuité. On impose des conditions de flux sur Γ_1, Γ_2 et Γ_f et des efforts surfaciques cohésifs sur Γ_1 et Γ_2.

La Figure 2.1-1 donne une représentation symbolique des conditions imposées sur la frontière du domaine.

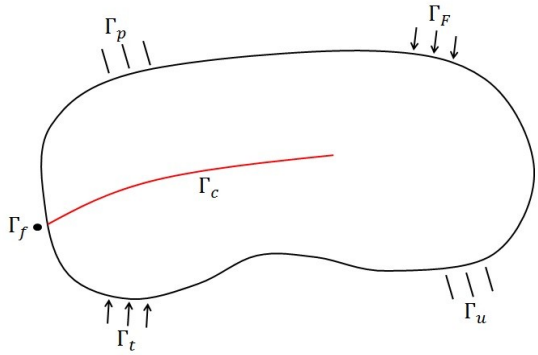


Figure 2.1-1: Imposition des conditions aux limites

2.2 Hypothèses et notations

On considère un milieu poreux saturé en liquide (en général de l'eau). La loi de couplage associée dans *Code_Aster* est donc `LIQU_SATU` (pour plus de détails se reporter à la notice du modèle THM [U2.04.05]). D'autre part il existe un écoulement longitudinal de fluide au niveau de l'interface. En supposant que celle-ci est perméable, les échanges de fluide ont lieu entre le massif (partie de Ω qui n'est pas l'interface) et l'interface. Ils sont représentés sur la Figure 2.2-1.

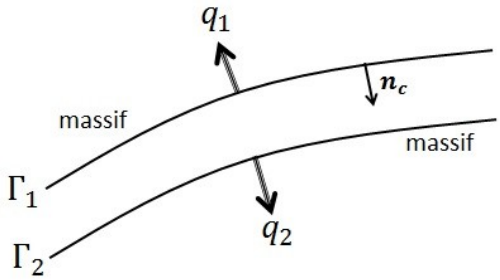


Figure 2.2-1: Orientation des échanges entre le massif et la discontinuité

q_1 et q_2 sont les flux dus aux échanges entre le massif et l'interface, et sont exprimés en $kg.m^{-2}.s^{-1}$. Ces flux proviennent de l'interface et sont dirigés respectivement vers les parties

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

supérieures et inférieures du massif au niveau des lèvres Γ_1 et Γ_2 de l'interface. Ils sont dirigés de la discontinuité vers le massif.

Le champ de pression au niveau du massif est noté p et celui au niveau de l'interface est noté p_f (champ induit par le fluide circulant au niveau de l'interface). Le champ de déplacements est noté $\boldsymbol{u}$ et le saut de déplacement au niveau de l'interface est noté $[\![\boldsymbol{u}]\!]$.

Soit P_1 un point de Γ_1 et P_2 un point de Γ_2 et $\boldsymbol{n_c} = \boldsymbol{n_c^1}$ la normale extérieure à Γ_1 et $\boldsymbol{n_c^2}$ la normale extérieure à Γ_2. Le saut de déplacement normal (pris négatif ou nul en ouverture et positif en interpénétration des lèvres) est donc défini de la manière suivante :

$$[\![\boldsymbol{u}]\!].\boldsymbol{n_c} = (\boldsymbol{u}(P_1) - \boldsymbol{u}(P_2)).\boldsymbol{n_c} \leqslant 0$$

Sur la Figure 2.2-2, on indique les conventions adoptées pour la prise en compte du saut de déplacement au niveau de l'interface.

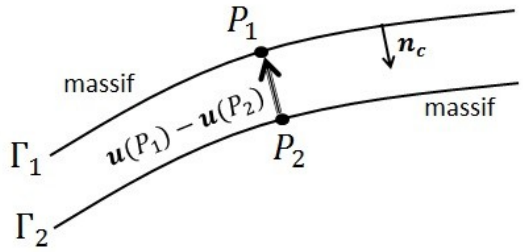


Figure 2.2-2: Définition du saut de déplacement au niveau de la discontinuité

Pour le massif, comme pour l'interface, l'hypothèse des contraintes effectives est prise en considération. Ainsi :

- la contrainte totale dans le massif est notée σ,
- la contrainte totale (liée aux efforts cohésifs) au niveau de l'interface est notée $\boldsymbol{t_c}$.

L'hypothèse des petites perturbations est admise. D'autre part on considère que les grandeurs mécanique et hydraulique sont isotropes.

3 Équations constitutives du modèle HM-XFEM

3.1 Équations pour la mécanique

3.1.1 Équation d'équilibre (cas du massif)

Dans le cas du massif l'équation de conservation de la quantité de mouvement (en tenant compte des efforts volumiques) peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{Div}(\sigma) + r\,\boldsymbol{F^m} = \mathbf{0}$$

avec :

- $\sigma = \sigma' - bp\mathbf{1}$ (sous l'hypothèse des contraintes effectives) où b est le coefficient de Biot,
- r la masse volumique homogénéisée telle que dans le cas saturé $r = r_0 + m_w$ où r_0 est la masse volumique homogénéisée dans la configuration de référence et m_w les apports massiques en eau,
- $r\boldsymbol{F^m}$ représentent les efforts volumiques agissant sur Ω (dans la pratique il s'agit des forces de gravité).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1.2 Modèle de zones cohésives (cas de l'interface)

Afin de prendre en compte la propagation de la discontinuité, l'irréversibilité de la fracturation et la non-interpénétration des lèvres de la discontinuité, on choisit de modéliser le comportement de l'interface ou de la fissure à l'aide d'une loi cohésive.
Pour plus d'informations concernant l'établissement de ces lois, l'utilisateur peut se reporter à la documentation [R7.02.11]. En ce qui nous concerne, au niveau de la discontinuité, il est possible de distinguer 3 zones :

- une zone complètement ouverte, au niveau de laquelle la contrainte totale sur les lèvres de la discontinuité est égale à $p_f \boldsymbol{n_c}$ sur Γ_2 et égale à $-p_f \boldsymbol{n_c}$ sur Γ_1. Dans cette zone la valeur de la contrainte est due principalement au fluide y circulant,
- une zone cohésive (ou Fracture Processing Zone (FPZ)) dont l'ouverture dépend de la valeur de la contrainte totale qui est alors égale à $\boldsymbol{t_c}=\boldsymbol{t_c}'-p_f \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ étant la normale extérieure à la surface concernée Γ_1 ou Γ_2. Au delà d'une certaine ouverture w_c, la contrainte correspond à celle de la zone précédente,
- et une zone saine adhérente au niveau de laquelle les lèvres de la discontinuité sont en contact et ne s'interpénètrent pas.

Sur la Figure 3.1.2-1 on situe les différentes zones de contraintes associées au modèle de zones cohésives. Le front de fissure est alors naturellement localisé à la frontière entre la zone cohésive et la zone adhérente.

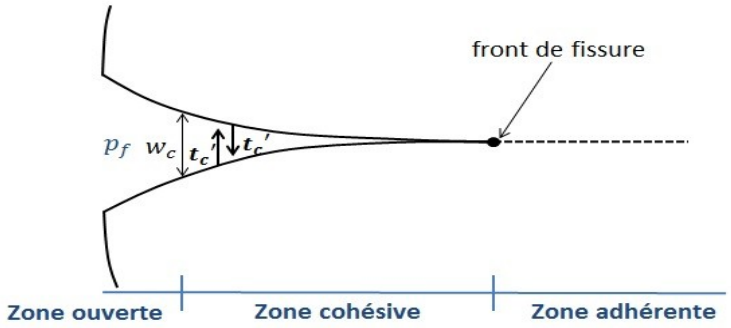


Figure 3.1.2-1: Répartition des contraintes au niveau de la discontinuité

La loi de comportement utilisée pour les lois cohésives prend la forme d'une relation adoucissante entre la contrainte cohésive $\boldsymbol{t_c}'$ et le saut de déplacement $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ au niveau des lèvres de la discontinuité.
Ainsi on pose :

$$\boldsymbol{t_c}' = \frac{\partial \psi}{\partial [\![\boldsymbol{u}]\!]}$$

avec ψ l'énergie de surface, dont l'expression dépend de la loi cohésive utilisée.

La loi cohésive adoptée pour les éléments XFEM hydromécaniques est la loi CZM_LIN_MIX détaillée dans [R7.02.19]. Il s'agit d'une loi cohésive non régularisée (donc avec une pente initiale infinie). σ_c est la contrainte critique à partir de laquelle l'endommagement commence dans la zone cohésive. $G_c=\frac{\sigma_c w_c}{2}$ correspond à la quantité d'énergie à fournir pour rompre totalement une unité de surface.

-
-

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

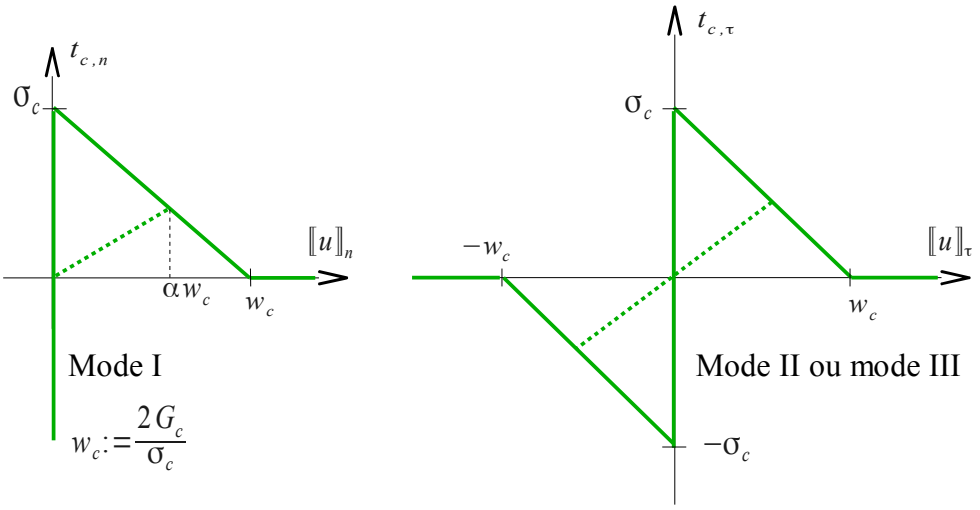


Figure 3.1.2-2 : Loi cohésive mixte.

3.1.3 Conditions aux limites pour la mécanique

L'écriture des conditions aux limites pour la mécanique sur la frontière du domaine Ω et au niveau de l'interface s'écrivent :

Conditions aux limites pour la mécanique

- $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ sur Γ_u (déplacements imposés)
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$ sur Γ_t (efforts surfaciques imposés)
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n_c^1} = \boldsymbol{t_c^1}$ sur Γ_1 (efforts surfaciques cohésifs imposés)
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n_c^2} = \boldsymbol{t_c^2}$ sur Γ_2 (efforts surfaciques cohésifs imposés)

3.2 É quations pour l'hydrodynamique

3.2.1 Équation de conservation de la masse (cas du massif)

Dans le cas du massif l'équation de conservation de la masse se met sous la forme :

$$\frac{\partial m_w}{\partial t} + Div(\boldsymbol{M}) = 0$$

avec :

- m_w les apports massiques (par unité de volume) exprimé s en $kg.m^{-3}$,
- $\boldsymbol{M}$ les flux massiques exprimés en $kg.m^{-2}.s^{-1}$.

3.2.2 Équation de conservation de la masse (cas de l'interface)

Dans le cas de l'interface l'équation de conservation de la masse se met sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Div(\boldsymbol{W}) = 0$$

avec :

- w les apports massiques (par unité de surface) dans la fissure exprimés en $kg.m^{-2}$,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $\boldsymbol{W}$ les flux massique s dans la fissure exprimés en $kg.m^{-1}.s^{-1}$,

3.2.3 Conditions aux limites pour l'hydrodynamique

L'écriture des conditions aux limites pour l'hydrodynamique sur la frontière du domaine Ω et au niveau de l'interface permet d'obtenir :

Conditions aux limites pour l'hydrodynamique

- $p = 0$ sur Γ_p (pression imposées)
- $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n} = M_{\text{ext}}$ sur Γ_F (pour le massif)
- $\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n_c} = W_{\text{ext}}$ sur Γ_f (pour la discontinuité)
- $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n_c^1} = q_1$ sur Γ_1 (égalité des flux massif/discontinuité)
- $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n_c^2} = q_2$ sur Γ_2 (égalité des flux massif/discontinuité)

Une condition aux limites supplémentaire à prendre en compte est la continuité de la pression p_f au niveau de chacune des lèvres de l'interface. Cette condition est nécessaire du fait de la très faible épaisseur de l'interface. Elle se traduit par la relation linéaire suivante :

- $p^{\text{inf}} = p_f$ sur Γ_1
- $p^{\text{sup}} = p_f$ sur Γ_2

avec :
- p^{sup} la pression de fluide au-dessus de l'interface (champ enrichi par XFEM),
- p^{inf} la pression de fluide en-dessous de l'interface (champ enrichi par XFEM).

3.3 Équations du modèle poro-mécanique

Dans cette partie on ne fait que rappeler les équations utiles du modèle poro-mécanique développé dans la documentation [R7.01.11].

3.3.1 Expression des apports massiques

- Cas du massif

Les apports massiques peuvent être mis sous la forme (avec $S_{lq}=1$) :

$$m_w = \rho\varphi\left(1+\varepsilon_v\right)$$

avec :
- ρ, φ respectivement la masse volumique de l'eau (en $kg.m^{-3}$) , la variable de porosité eulérienne,
- $\varepsilon_v = Tr\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = Tr\left(\nabla_s \boldsymbol{u}\right)$ la déformation volumique (où Tr est l'application linéaire trace).

- Cas de l'interface

Les apports massiques peuvent se mettre sous la forme :

$$w = \rho[\![\boldsymbol{u}]\!].\boldsymbol{n_c}$$

avec :
- ρ respectivement la masse volumique de l'eau,
- $[\![\boldsymbol{u}]\!].\boldsymbol{n_c}$ l'ouverture normale de la discontinuité (en m) .

3.3.2 Expression des flux massiques

- Cas du massif

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le flux massique dans le massif suit la loi de Darcy. Ainsi on pose :

$$\boldsymbol{M}=\lambda\rho\left(-\nabla p+\rho\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{m}}\right)$$

avec $\lambda=\frac{K^{\text{int}}}{\mu}$ l a mobilité du liquide où K^{int} est la perméabilité intrinsèque du massif (en m^2) et μ la viscosité dynamique du fluide (en $Pa.s$).

Remarque :

L' expression de la mobilité fait intervenir en réalité la perméabilité relative du fluide $k_w^{\text{rel}}(S_{\text{w}})$ (qui est une fonction de la saturation en eau et est donnée par la loi de Mualem/Van Genuchten [1 0]) c'est-à-dire $\lambda=\frac{K^{\text{int}}k_w^{\text{rel}}}{\mu}$. É tant donné que le milieu est saturé ($S_{\text{w}}=1$) , la perméabilité relative à l'eau est donc égale à 1 .

- Cas de l'interface

Le flux massique dans la discontinuité peut être écrit en fonction de la loi cubique [11] (on néglige les effets de la pesanteur). Ainsi on pose :

$$\boldsymbol{W}=-\frac{\rho(\llbracket\boldsymbol{u}\rrbracket.n_c)^3}{12\mu}\nabla p_f$$

avec μ la viscosité dynamique du fluide (en $Pa.s$) .

3.3.3 Evolution de la variable de porosité

L'évolution de la variable de porosité (eulérienne) caractérisant le massif est donnée dans le cas saturé isotherme par :

$$d\varphi=(b-\varphi)\left(d\varepsilon_v+\frac{dp}{K_s}\right)$$

avec K_s le module de compressibilité de la matrice solide (en Pa) et b le coefficient de Biot.

3.3.4 Evolution de la masse volumique du fluide

- Cas du massif

L'évolution de la masse volumique du fluide dans le massif est donnée dans le cas saturé isotherme par :

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dp}{K_w}$$

avec K_w le coefficient de compressibilité du liquide (en Pa).

- Cas de l'interface

L'évolution de la masse volumique du fluide au niveau de l'interface est donnée dans le cas saturé isotherme par :

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dp_f}{K_w}$$

3.3.5 Dérivée des apports massiques

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Étant donné que la différentielle des apports massiques intervient dans l'expression de l'opérateur tangent associé au système linéarisé (voir § 6), son expression est rappelée ici dans le cas saturé isotherme.

- Cas du massif
  Tout d'abord la différentielle des apports massiques peut s'écrire :

$$dm_w = \rho\varphi d\,\varepsilon_v + \rho(1+\varepsilon_v)d\,\varphi + \varphi(1+\varepsilon_v)\,d\rho$$

  Compte tenu de l'hypothèse des petites perturbations, par souci de simplification, on suppose que $(1+\varepsilon_v)\approx 1$. Au final (en remplaçant $d\,\varphi$ et $d\,\rho$ par leurs expressions) :

$$d\,m_w = \rho b\,d\,\varepsilon_v + \left(\left(\frac{\rho(b-\varphi)}{K_s} + \frac{\rho\varphi}{K_w}\right)\right)dp$$

- Cas de l'interface
  La différentielle des apports massiques s'écrit :

$$dw = \rho d\left(\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n_c}\right) + \left(\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n_c}\right)\rho\,\frac{d\,p_f}{K_w}$$

3.3.6 Dérivée des flux massiques

Étant donné que la différentielle des flux massiques intervient dans l'expression de l'opérateur tangent associé au système linéarisé (voir § 6) son expression est rappelée ici dans le cas saturé isotherme.

- Cas du massif
  La différentielle des flux massiques dans le cas du massif s'écrit :

$$d\,\boldsymbol{M} = \left(\frac{\boldsymbol{M}}{\rho} + \rho\lambda\,\boldsymbol{F^m}\right)\rho\,\frac{d\,p}{K_w} + \frac{\boldsymbol{M}}{\lambda}d\,\lambda - \rho\lambda\,d\left(\nabla\,p\right)$$

- Cas de l'interface
  La différentielle des flux massiques dans le cas de l'interface s'écrit :

$$d\,\boldsymbol{W} = \left(\frac{\boldsymbol{W}}{\rho}\right)\rho\,\frac{d\,p}{K_w} - \frac{\rho}{12\mu}\nabla\,p_f\left(3\left(\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n_c}\right)^2\right)d\left(\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n_c}\right) - \frac{\rho\left(\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{n_c}\right)^3}{12\mu}d\left(\nabla\,p_f\right)$$

4 Formulation variationnelle

Avant de donner l'expression des formulations variationnelles des équations d'équilibre présentées ci-dessus, nous allons donner la définition des espaces d'approximation des champs de déplacements, de pressions (du massif et de l'interface), des flux q_1 et q_2 et des multiplicateurs de Lagrange λ, μ et du saut de déplacement w utiles pour le modèle de zone cohésive :

- l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles sur la frontière du domaine Ω est tel que :

$$U_0 = \{u^* \in H_1(\Omega) / u^* \text{ discontinu à travers } \Gamma_c, u^* = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- l'espace des champs de pression admissibles sur la frontière du domaine Ω est tel que :

$$P_0=\{ p^* \in H_1(\Omega) / \, p^* \text{ discontinue à travers } \Gamma_c, p^*=0 \text{ sur } \Gamma_p \}$$

- l'espace des inconnues q_1 et q_2 est tel que :

$$Q_1=\{q_1^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c) / q_1^* \in \Gamma_1\} \text{ et } Q_2=\{q_2^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c) / q_2^* \in \Gamma_2\}$$

- l'espace des inconnues de pression p_f est tel que :

$$F_0=\{p_f^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c) / \, p_f^* \text{ continue sur } \Gamma_c\}$$

- l'espace des inconnues des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ et du saut de déplacement $\boldsymbol{w}$ est tel que :

$$L_0=\{\lambda^* \in H^{-1/2}(\Gamma_c) / \lambda^* \text{ continue sur } \Gamma_c\}$$

4.1 Formulation faible du problème mécanique

Comme expliqué dans [R7.02.19], dans le cadre de la formulation de type « mortier » pour le modèle de zone cohésive, le saut de déplacement $\boldsymbol{w}$ est introduit comme une nouvelle inconnue du problème, qui ne sera pas discrétisé comme $[\![\boldsymbol{u}]\!]$ mais en sera une projection sur un espace réduit $\boldsymbol{M}_h$ (voir § 5.2.2). L'énergie totale du problème s'écrit alors :

$$E(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w})=\frac{1}{2}\int_\Omega \epsilon(\boldsymbol{u}) : C : \epsilon(\boldsymbol{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u} \, d\Gamma_t + \int_{\Gamma_c} \Pi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma_c$$

$\Pi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda})$ est la densité d'énergie de surface et $\boldsymbol{t}$ les efforts surfaciques imposés sur Γ_t . Le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ sera discrétisé sur le même espace que $\boldsymbol{w}$ (confer [R7.02.19]).

La solution du problème continu consiste en une minimisation sous contraintes d'égalité $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) = \underset{\boldsymbol{w}^*=[\![\boldsymbol{u}^*]\!]}{argmin} E(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{w}^*)$. Nous pouvons écrire le Lagrangien associé comme :

$$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})=\frac{1}{2}\int_\Omega \epsilon(\boldsymbol{u}) : C : \epsilon(\boldsymbol{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u} \, d\Gamma_t + \int_{\Gamma_c} \Pi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu} \cdot ([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{w}) d\Gamma_c$$

Le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\mu}$ sera également discrétisé sur l'espace réduit $\boldsymbol{M}_h$ .L'écriture des conditions d'optimalité de ce Lagrangien conduit à la formulation variationnelle suivante :

Équation d'équilibre
$$\forall \boldsymbol{u}^* \in U_0, \int_\Omega \sigma(\boldsymbol{u}) : \epsilon(\boldsymbol{u}^*) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}^* d\Gamma_t + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu} \cdot [\![\boldsymbol{u}^*]\!] d\Gamma_c = 0$$

Projection du saut de déplacement
$$\forall \boldsymbol{\mu}^* \in L_0, \int_{\Gamma_c} ([\![\boldsymbol{u}]\!] - \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{\mu}^* d\Gamma_c = 0$$

Expression de la force cohésive
$$\forall \boldsymbol{w}^* \in L_0, - \int_{\Gamma_c} [\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{t}_c(\boldsymbol{\lambda} + r\boldsymbol{w})] \cdot \boldsymbol{w}^* d\Gamma_c = 0$$

Loi d'interface
$$\forall \boldsymbol{\lambda}^* \in L_0, - \int_{\Gamma_c} \frac{[\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{t}_c(\boldsymbol{\lambda} + r\boldsymbol{w})]}{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}^* d\Gamma_c = 0$$

r est le paramètre d'augmentation (confer [R7.02.19]). Rappelons que :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^{'}-bp\mathbf{1}$
- $\boldsymbol{t_c}=\boldsymbol{t_c}^{'}-p_f\boldsymbol{n}$

4.2 Formulations faibles du problème hydrodynamique

4.2.1 Formulation faible pour le massif

La formulation faible de l'équation de conservation de la masse dans le cas du massif s'écrit :

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \frac{\partial m_w}{\partial t} p^* d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\nabla} p^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_F} M_{\text{ext}} p^* d\Gamma_F - \int_{\Gamma_1} q_1 p^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} q_2 p^* d\Gamma_2\end{aligned} \quad \forall\, p^* \in P_0$$

avec M_{ext} les flux normaux imposés sur la partie Γ_F de $\partial\Omega$.

4.2.2 Formulation faible pour l'interface

La formulation faible de l'équation de conservation de la masse dans le cas de l'interface s'écrit :

$$\begin{aligned}&-\int_{\Gamma_c} \frac{\partial w}{\partial t} p_f^* d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\nabla} p_f^* d\Gamma_c \\ &= \int_{\Gamma_f} W_{\text{ext}} p_f^* d\Gamma_f + \int_{\Gamma_1} q_1 p_f^* d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} q_2 p_f^* d\Gamma_2\end{aligned} \quad \forall\, p_f^* \in F_0$$

avec W_{ext} les flux normaux imposés sur la partie Γ_f de Γ_c.

La formulation faible de la condition de continuité de la pression p_f au niveau de l'interface s'écrit :

$$\int_{\Gamma_1}\left(p^{\sup}-p_f\right)q_1^* d\Gamma_1 = 0 \quad \forall\, q_1^* \in Q_1$$

$$\int_{\Gamma_2}\left(p^{\inf}-p_f\right)q_2^* d\Gamma_2 = 0 \quad \forall\, q_2^* \in Q_2$$

Remarque :

La condition de continuité de la pression p_f au niveau de chacune des lèvres de l'interface met en jeu deux relations linéaires du type $p^{\sup}-p_f=0$ sur Γ_1 et $p^{\inf}-p_f=0$ sur Γ_2. Dans Code_Aster, afin de gérer ce type de relation (qui est en fait une condition aux limites et non une équation d'équilibre, telle l'équation de conservation de la masse), nous avons recours à l'introduction de champs de multiplicateurs de Lagrange. En l'occurrence, les multiplicateurs (que l'on nomme dans la suite multiplicateurs de Lagrange hydrauliques) mis en jeu dans ces deux formulations variationnelles sont en fait les flux virtuels q_1^* et q_2^*.

5 Discrétisation du problème

5.1 Discrétisation temporelle

Les équations de conservation de la masse dans le cas du massif et de l'interface font intervenir explicitement dans leurs formulations la variable temporelle t. Afin de discrétiser ces équations, nous utilisons un θ-schéma.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En terme de notation une variable indicée par un $+$ est une variable prise en fin de pas de temps et une variable indicée par un $-$ est une variable prise en début de pas de temps qui est *a priori* connue. On pose $\Delta t = t^+ - t^-$.

5.1.1 Discrétisation de l'équation mécanique

La discrétisation en temps des équations pour la mécanique ne fait pas intervenir de θ-schéma. Elles sont exprimées à l'instant $+$ (c'est à dire après la phase de prédiction) et s'écrivent :

Équation d'équilibre
$$\forall \boldsymbol{u}^* \in U_0, \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{u}) : \epsilon(\boldsymbol{u}^*)\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t}^+ \cdot \boldsymbol{u}^*\, d\Gamma_t + \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\mu}^+ \cdot [\![\boldsymbol{u}^*]\!]\, d\Gamma_c = 0$$

Projection du saut de déplacement
$$\forall \boldsymbol{\mu}^* \in L_0, \int_{\Gamma_c} \left([\![\boldsymbol{u}^+]\!] - \boldsymbol{w}^+\right) \cdot \boldsymbol{\mu}^*\, d\Gamma_c = 0$$

Expression de la force cohésive
$$\forall \boldsymbol{w}^* \in L_0, -\int_{\Gamma_c} \left[\boldsymbol{\mu}^+ - \boldsymbol{t}_c^+(\boldsymbol{\lambda}^+ + r\,\boldsymbol{w}^+)\right] \cdot \boldsymbol{w}^*\, d\Gamma_c = 0$$

Loi d'interface
$$\forall \boldsymbol{\lambda}^* \in L_0, -\int_{\Gamma_c} \frac{\left[\boldsymbol{\lambda}^+ - \boldsymbol{t}_c^+(\boldsymbol{\lambda}^+ + r\,\boldsymbol{w}^+)\right]}{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}^*\, d\Gamma_c = 0$$

5.1.2 Discrétisation des équations de l'hydrodynamique

5.1.2.1 Cas du massif

La discrétisation en temps de l'équation de conservation de la masse à l'aide d'un θ-schéma s'écrit :

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \frac{m_w^+ - m_w^-}{\Delta t} p^*\, d\Omega \;+\; \theta \int_\Omega \boldsymbol{M}^+ \cdot \nabla p^*\, d\Omega \;+\; (1-\theta)\int_\Omega \boldsymbol{M}^- \cdot \nabla p^*\, d\Omega \\ &= \theta \int_{\Gamma_F} M_{ext}^+ p^*\, d\Gamma_F \;+\; (1-\theta)\int_{\Gamma_F} M_{ext}^- p^*\, d\Gamma_F \;-\; \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p^*\, d\Gamma_1 \qquad \forall p^* \in P_0 \\ &-\; (1-\theta)\int_{\Gamma_1} q_1^- p^*\, d\Gamma_1 \;-\; \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p^*\, d\Gamma_2 \;-\; (1-\theta)\int_{\Gamma_2} q_2^- p^*\, d\Gamma_2 \end{aligned}$$

5.1.2.2 Cas de l'interface

La discrétisation en temps de l'équation de conservation de la masse à l'aide d'un θ-schéma s'écrit :

$$\begin{aligned} &-\int_{\Gamma_c} \frac{w^+ - w^-}{\Delta t} p_f^*\, d\Gamma_c \;+\; \theta \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W}^+ \cdot \nabla p_f^*\, d\Gamma_c \;+\; (1-\theta)\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{W}^- \cdot \nabla p_f^*\, d\Gamma_c \\ &= \theta \int_{\Gamma_f} W_{ext}^+ p_f^*\, d\Gamma_f + (1-\theta)\int_{\Gamma_f} W_{ext}^- p_f^*\, d\Gamma_f + \theta \int_{\Gamma_1} q_1^+ p_f^*\, d\Gamma_1 \qquad \forall p_f^* \in F_0 \\ &+\; (1-\theta)\int_{\Gamma_1} q_1^- p_f^*\, d\Gamma_1 + \theta \int_{\Gamma_2} q_2^+ p_f^*\, d\Gamma_2 \\ &+\; (1-\theta)\int_{\Gamma_2} q_2^- p_f^*\, d\Gamma_2 \end{aligned}$$

5.1.3 Discrétisation des équations du modèle poro-mécanique

Les équations présentées dans cette partie correspondent aux équations du § 3.3 exprimées de manière incrémentale. On développe ces équations car elles sont affectées par la discrétisation avec XFEM.

5.1.3.1 Cas des apports massiques

- Cas du massif

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les apports massiques s'écrivent alors de manière incrémentale :

$$m_w^+ - m_w^- = \rho^+ \varphi^+ \left(1+\varepsilon_v^+\right) - \rho^- \varphi^- \left(1+\varepsilon_v^-\right)$$

- Cas de l'interface
  Les apports massiques s'écrivent alors de manière incrémentale :

$$w^+ - w^- = \rho^+ \left(\left[\!\left[\boldsymbol{u}\right]\!\right]\cdot \boldsymbol{n_c}\right)^+ - \rho^- \left(\left[\!\left[\boldsymbol{u}\right]\!\right]\cdot \boldsymbol{n_c}\right)^-$$

5.2 Discrétisation avec XFEM

5.2.1 Représentation de l'élément HM-XFEM et ddls associés

Pour représenter l'élément HM-XFEM, nous avons choisi d'utiliser des éléments quadratiques qui peuvent être soit des quadrangles à 8 nœuds (QUAD8) soit des triangles à 6 nœuds (TRIA6), soit des hexaèdres à 20 nœuds (HEXA20), soit des pentaèdres à 15 nœuds (PENTA15), soit des pyramides à 13 nœuds (PYRA13), soit des tétraèdres à 10 nœuds (TETRA10). Nous considérons que tout élément du maillage traversé par l'interface est du type HM-XFEM. Cet élément baigne autour d'éléments HM non enrichis. Il s'agit de ceux utilisés classiquement pour les modélisations HM.

La Figure 5.2.1-1 représente l'élément HM-XFEM avec une maille QUAD8.

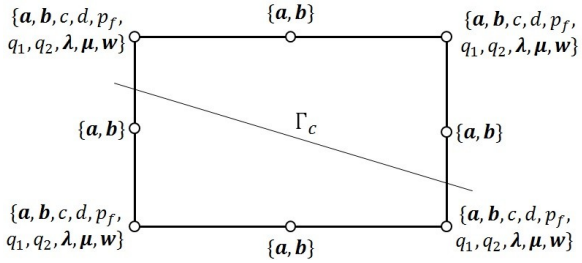


Figure 5.2.1-1 : Représentation de l'élément HM-XFEM avec des QUAD8

Sur chacune des figures présentées précédemment, les listes en chaque nœud de l'élément contiennent les degrés de liberté (ddls) associés à chaque catégorie de nœuds (nœuds sommets ou nœuds milieux).

Les degrés de liberté :

- $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont associés respectivement à la partie classique et enrichie de l'approximation du champ de déplacements $\boldsymbol{u}^h$,
- c et d sont associés respectivement à la partie classique et enrichie de l'approximation du champ de pression dans le massif p^h,
- p_f sont associés à l'approximation du champ de pression p_f^h au niveau de l'interface,
- q_1 et q_2 sont associés à l'approximation des champs de multiplicateurs de Lagrange hydrauliques q_1^h et q_2^h.
- $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{w}$ sont respectivement associés à l'approximation des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}^h$ et $\boldsymbol{\mu}^h$ et du saut de déplacement $\boldsymbol{w}^h$.

Les éléments hydromécaniques présents dans *Code_Aster* utilisent une « interpolation mixte », afin de réduire les oscillations de la solution numérique [14]. Le champ des déplacements est ainsi interpolé de manière quadratique tandis que le champ de pression de pore est interpolé de manière linéaire. Les degrés de liberté c et d ne sont donc portés que par les nœuds sommets tandis que les degrés de liberté $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont portés à la fois par les nœuds milieux et les nœuds sommets. En

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ce qui concerne les champs associés à la discontinuités : p_f^h, q_1^h, q_2^h, $\boldsymbol{\lambda}^h$, $\boldsymbol{\mu}^h$ et $\boldsymbol{w}^h$, les degrés de libertés sont portés uniquement par les nœuds sommets. En sus, leur espace d'approximation est réduit (voir § 5.2.2) afin de respecter la condition de stabilité LBB [8,9]. Cette condition impose en effet une hiérarchie entre les espaces d'approximation, sans quoi on observe l'apparition d'oscillations et la non unicité de la solution du problème couplé.

Par ailleurs il est important de noter que les éléments HM-XFEM qui partagent des nœuds sommets avec les éléments HM classiques, doivent subir un traitement supplémentaire. Il faut en effet mettre à zéro les degrés de libertés enrichis (pour les champs de pression dans le massif et de déplacements) mais également mettre à zéro les degrés de libertés p_f, q_1, q_2, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{w}$ au niveau des nœuds sommets en commun entre ces deux types d'élément. La procédure d'élimination utilisée est celle décrite dans le § 4.4 de la documentation [R5.03.54].

Sur la Figure 5.2.1-1 on résume les points problématiques associés à la cohabitation entre les éléments HM-XFEM et les éléments HM classiques.

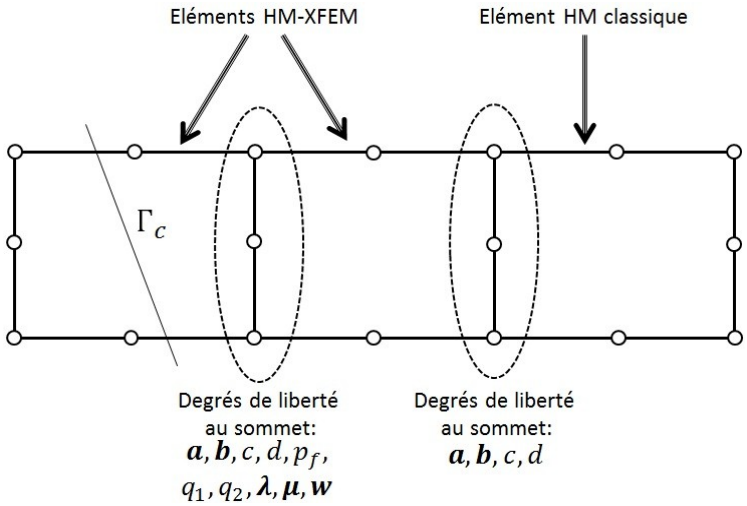


Figure 5.2.1-1: Cohabitation de l'élément HM-XFEM avec l'élément HM classique

5.2.2 Espace réduit pour la discrétisation des champs associés à la discontinuité

Pour une description détaillée de la discrétisation des inconnues de contact (et a fortiori de toutes les inconnues associées à la discontinuité), le lecteur peut se référer à la documentation [R5.03.54], §5. En bref, les composantes initiales du multiplicateur sont définies sur les nœuds sommets K des éléments parents intersectés (voir fig. 5.2.2-1). L'implémentation de tels éléments de contact est détaillée en [R5.03.54], §4. On impose ensuite des relations d'égalité entre certaines de ces composantes initiales afin d'aboutir à un nombre plus faible N_λ de degrés de liberté effectivement indépendants. Ces relations sont portées par certaines arêtes intersectées V, dites arêtes vitales : un degré de liberté I réellement indépendant est partagé par un groupe de nœuds de K (voir fig. 5.2.2-1), ce qui produit une fonction de forme de contact étendue $\psi_I := \sum_{i \in I} N_i$ (voir fig. 5.2.2-1).

L'algorithme de sélection de telles arêtes vitales, et donc de construction de l'espace réduit, est détaillé dans le documentation [R5.03.54], §6. Le champ de multiplicateurs est ensuite obtenu par interpolation sur les éléments parents et le multiplicateur discret est la trace de ce champ sur l'interface :

$$\boldsymbol{M}_h := \left\{ \sum_I \boldsymbol{\mu}_I \psi_I|_\Gamma, \boldsymbol{\mu}_I \in \mathbb{R}^d \right\}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

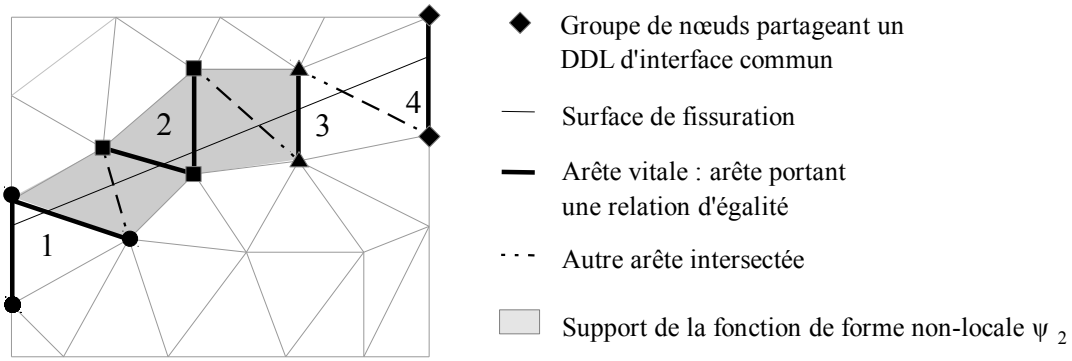


Figure 5.2.2-1 : Maillage non conforme à la fissure et espace réduit pour l'interface

Dans notre cas, les champs associés à la discontinuité sont non seulement les multiplicateurs de Lagrange λ,μ et le saut de déplacement w utiles pour la loi cohésive CZM_LIN_MIX mais également les champs hydrauliques associés à la discontinuité : la pression de fluide dans la discontinuité p_f , et les flux q_1 et q_2 . Ces champs sont tous discrétisés sur l'espace réduit $\boldsymbol{M}_h$.

5.2.3 Approximations des champs avec XFEM

L'approximation des champs en présence peut donc se mettre sous la forme (les champs tests utilisés dans les formes faibles des équations d'équilibre sont approximés de la même manière) :

- pour le champ de déplacements :

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{h}}(x)=\sum_{i=1}^{nn}\boldsymbol{a_i}\,\phi_i(x)+\sum_{j=1}^{nne}\boldsymbol{b_j}\,\phi_j(x)\,\widetilde{H}(lsn(x))$$

- pour le champ de pression dans le massif :

$$p^h(x)=\sum_{i=1}^{nns}c_i\,\psi_i(x)+\sum_{j=1}^{nnse}d_j\,\psi_j(x)\,\widetilde{H}(lsn(x))$$

- pour le champ de pression dans l'interface :

$$p_f^h(x)=\sum_{i=1}^{nnc}(p_f)_i\,\widetilde{\psi}_i(x)$$

- pour les champs de multiplicateurs de Lagrange hydrauliques :

$$q_1^h(x)=\sum_{i=1}^{nnc}(q_1)_i\,\widetilde{\psi}_i(x)$$

$$q_2^h(x)=\sum_{i=1}^{nnc}(q_2)_i\,\widetilde{\psi}_i(x)$$

- pour les champs de multiplicateurs de Lagrange et le saut de déplacement utiles pour le modèle de zone cohésive :

$$\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{h}}(x)=\sum_{i=1}^{nnc}\boldsymbol{\lambda}_i\,\widetilde{\psi}_i(x)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{h}}(x)=\sum_{i=1}^{nnc}\boldsymbol{\mu}_i\,\widetilde{\psi}_i(x)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{h}}(x)=\sum_{i=1}^{nnc}\boldsymbol{w}_i\,\widetilde{\psi}_i(x)$$

avec :

- lsn la *level set* normale dont l'iso-zéro représente l'interface. Pour plus de précisions sur l'utilisation des *level set* avec XFEM dans *Code_Aster*, le lecteur pourra se reporter à la documentation [R7.02.13],
- $\widetilde{H}$ la fonction discontinue au travers de la discontinuité repérée par $lsn(x)=0$ (confer [R7.02.12])
- $\phi_i(x)$ les fonctions de forme de l'élément quadratique utilisées pour l'interpolation du champ de déplacements,
- $\psi_i(x)$ les fonction de forme de l'élément parent linéaire utilisées pour l'interpolation du champ de pression dans le massif.
- $\widetilde{\psi}_i(x)$ les fonctions de forme linéaires utilisées pour l'interpolation des champs associés à la discontinuité. Elles diffèrent des fonctions de forme de l'élément parent linéaire $\psi_i(x)$ dans le cas où des nœuds sommets de l'élément parent linéaire n'appartiennent à aucune arête intersectée par la discontinuité (voir § 5.4 et [R5.03.54] pour plus de détails). Cette situation n'apparaît que pour les éléments non simpliciaux.
- nn l'ensemble des nœuds du maillage et nne l'ensemble des nœuds enrichis du maillage.
- nn l'ensemble des nœuds sommets du maillage et nne l'ensemble des nœuds sommets enrichis du maillage.
- nnc les nœuds sommets appartenant à une arête intersectée par la discontinuité Γ_c.

Remarque :

> *Comme nous pouvons le remarquer dans la définition des approximations des champs de déplacements et de pression du massif, l'enrichissement dû à la présence d'une pointe de fissure n'est pas pris en compte. Dans la formulation du problème mécanique, nous nous basons sur un modèle de zones cohésives régularisé. L'avantage d'un tel modèle (historiquement introduit par Barenblatt [12] afin d'améliorer la théorie de Griffith concernant les milieux fracturés [13]) est de palier le fait que les contraintes sont infinies en pointe de fissure. Par conséquent, l'enrichissement par fonctions singulières de l'approximation du champ de déplacements est inapproprié ici, mais tout à fait envisageable en ce qui concerne l'enrichissement de l'approximation du champ de pression dans le massif comme le suggère [7].*

5.3 Extension au cas multi-fissuré

5.3.1 Représentation de l'élément multi-fissuré HM-XFEM et ddls associés

Dans *Code_Aster*, les éléments XFEM peuvent supporter jusqu'à 4 fissures par élément (voir [R7.02.12]). Il est également possible d'avoir des fissures connectées. Ces fonctionnalités sont en particulier disponible pour les éléments HM-XFEM. A chaque fissure supplémentaire, on ajoute un jeu de degrés de liberté enrichis pour le champ des déplacement et de pression de pore ainsi qu'un jeu de degrés de liberté associé à la discontinuité supplémentaire. Sur la Figure 5.3.1-1, on représente un élément HM-XFEM QUAD8 intersecté par deux interfaces (non connectées à gauche et connectées à droite) ainsi que les degrés de liberté portés par chacun des nœuds.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

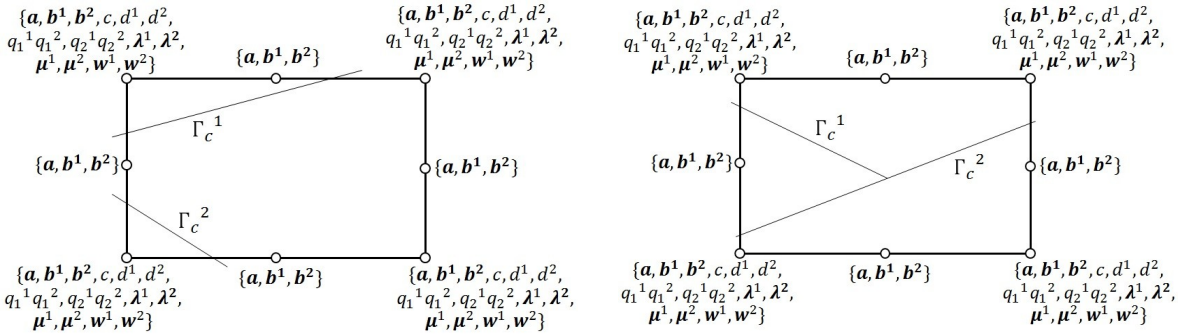


Figure 5.3.1-1 : Représentation d'un élément HM-XFEM QUAD8 intersecté par deux discontinuités non connectées (à gauche) et connectées (à droite)

5.3.2 Approximations des champs avec XFEM dans le cas multi-fissuré

Dans le cas où plusieurs fissures intersectent une même maille, pour chaque nœud, une correspondance est établie entre chaque interface et les degrés de libertés enrichis et d'interface (voir [R7.02.12]). Ainsi l'approximation des champs en présence peut se mettre sous la forme suivante :

- pour le champ de déplacements :

$$\boldsymbol{u^h}(x)=\sum_{i=1}^{nn} \boldsymbol{a_i}\,\phi_i(x) + \sum_{ifiss=1}^{nfiss}\sum_{j=1}^{nne} \boldsymbol{b_j^{\alpha(ifiss,j)}}\,\phi_j(x)\,\widetilde{H}\left(lsn_{ifiss}(x)\right)$$

- pour le champ de pression dans le massif :

$$p^h(x)=\sum_{i=1}^{nns} c_i\,\psi_i(x) + \sum_{ifiss}^{nfiss}\sum_{j=1}^{nnse} d_j^{\alpha(ifiss,j)}\,\psi_j(x)\,\widetilde{H}\left(lsn_{ifiss}(x)\right)$$

- pour les degrés de libertés d'interface, on a par exemple pour la pression de fluide p_f dans l'interface $ifiss$:

$$p_f^{h,ifiss}(x)=\sum_{i=1}^{nnc}\left(p_f^{\alpha(ifiss,i)}\right)_i\,\widetilde{\psi}_i(x)$$

avec :

- α la fonction qui à chaque interface associe le numéro de degré de liberté enrichi ou d'interface associé pour chaque nœud.

5.3.3 Jonction de fractures hydrauliques

Les champs associés à chaque interface sont donc discrétisés avec des jeux de degrés de liberté distincts. Les interfaces fonctionnent donc indépendamment, même si elles exercent leur influence l'une sur l'autre via la matrice poreuse. Dans le cas d'une jonction d'interface hydraulique, il convient cependant d'imposer une connexion hydraulique, afin de permettre les échanges de fluide au niveau de la jonction (voir Figure Figure 5.3.3-1) . A cette fin, on peut soit imposer la conservation de la masse au niveau de la jonction (loi des nœuds sur les flux W dans chaque branche de la jonction), soit imposer la continuité de la pression p_f dans les fissures au niveau de la jonction.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

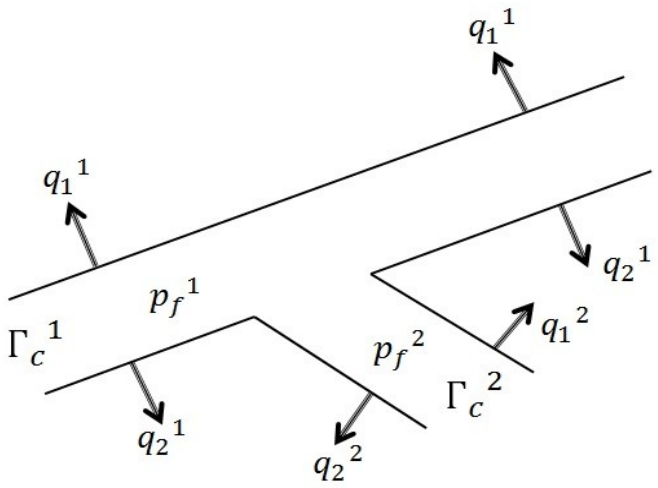
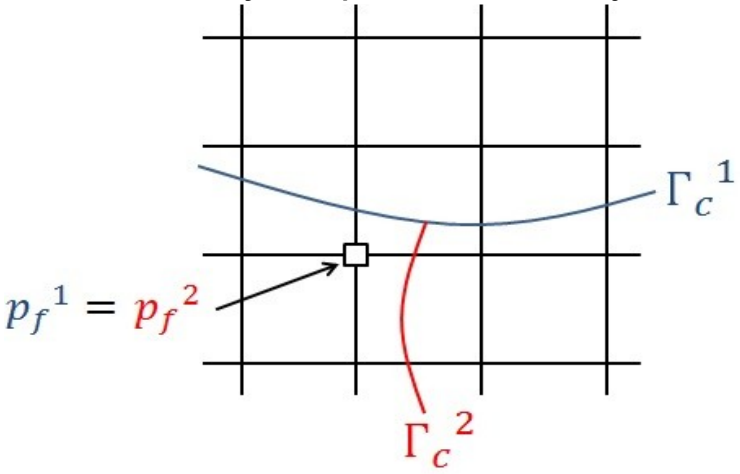


Figure 5.3.3-1: Jonction de fissure hydraulique

Etant donné l'espace d'approximation réduit dont nous disposons pour le champ p_f , il est préférable d'imposer la continuité de la pression p_f au niveau de la jonction, plutôt que d'imposer une égalité sur les flux W qui font intervenir le gradient de p_f . A cette fin, on identifie un nœud porteur du degré de liberté p_f à la fois pour la fissure principale et la fissure branchée et on impose l'égalité de ces deux degrés de liberté (voir Figure Figure 5.3.3-2).

Figure 5.3.3-2: Imposition de la continuité de la pression p_f dans les fissures hydrauliques au niveau d'une jonction.



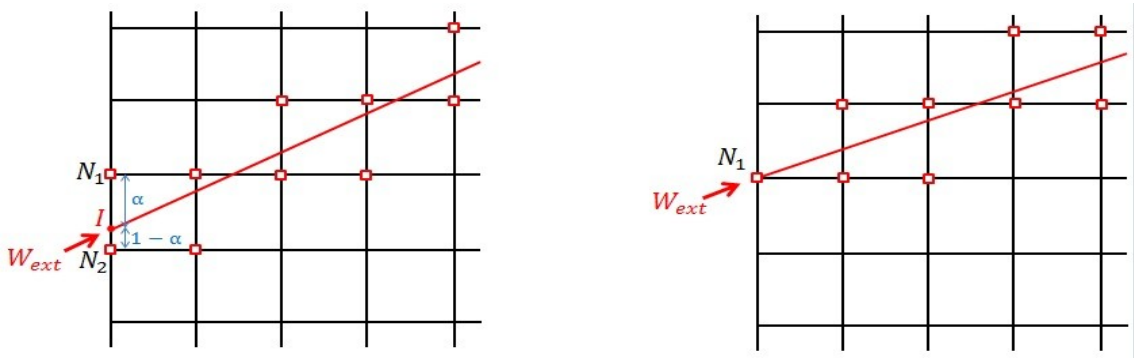
5.4 Imposition d'un flux dans une interface hydrauliques

En ce qui concerne les flux de fluide surfaciques injectés dans la matrice poreuse, l'intégration du second membre se fait naturellement sur le bord Γ_F sur lequel est imposé le flux M_{ext} (voir § 4.2.1), de dimension $ndim-1$ si la dimension du domaine Ω est $ndim$. En revanche, lorsqu'il s'agit d'imposer un flux de fluide directement dans la fracture, la dimension de l'embouchure Γ_f est $ndim-2$ si la dimension du domaine Ω est $ndim$. L'intégration du chargement flux W_{ext} requiert

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

donc plus d'attention. Intéressons nous dans un premier temps au cas où la dimension de Ω est 2. Le flux W_{ext} s'exprime alors en $kg.s^{-1}$ et Γ_f est réduit à un point. Rappelons que l'espace d'approximation des champs associés à l'interface cohésive comme p_f s'appuie uniquement sur les nœuds sommets des arêtes strictement intersectées par l'interface et sur les nœuds sur lesquels passe l'interface. Sur la Figure Figure 5.4-1, les nœuds effectivement porteurs du degré de liberté p_f sont marqués par des carrés blancs et rouges. L'intégration du terme $\int_{\Gamma_f} W_{ext} p_f^* d\Gamma_f$ se fera donc sur la restriction de cet espace d'approximation au bord du domaine. Dans le cas où l'interface cohésive est conforme au bord du domaine, on imposera directement W_{ext} sur le nœud N_1 (voir Figure 5.4-1 droite). Dans le cas non conforme, on devra déterminer la distance relative α entre l'embouchure I et les nœuds sommets de l'arête de bord intersectée N_1 et N_2 (voir Figure 5.4-1 gauche). On imposera alors $(1-\alpha)W_{ext}$ sur le nœud N_1 et αW_{ext} sur le nœud N_2.

Figure 5.4-1: Imposition d'un flux dans une fracture pour les modèles 2D plan dans le cas non conforme (à gauche) et dans le cas conforme (à droite).



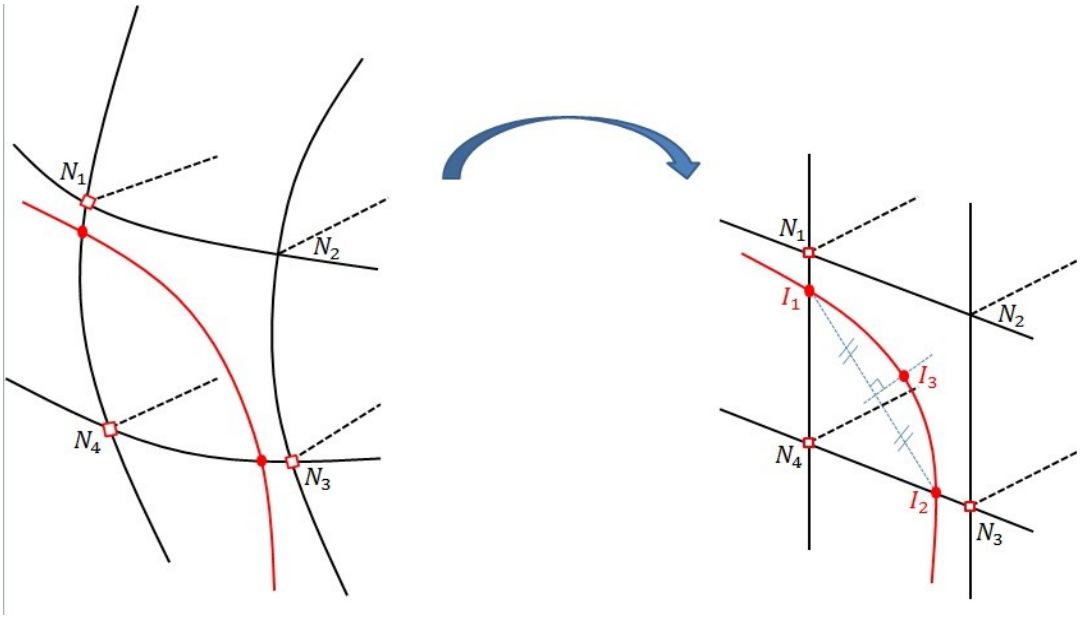
Dans le cas où la dimension de Ω est 3, le flux W_{ext} s'exprime en $kg.m^{-1}.s^{-1}$ et Γ_f est une courbe. Afin d'intégrer le terme $\int_{\Gamma_f} W_{ext} p_f^* d\Gamma_f$, il est nécessaire de disposer d'un support qui approxime la courbe Γ_f. A cette fin, on reconstruit une approximation de l'interface sur le bord du domaine comme une chaîne de segments à 3 nœuds. Dans chaque face de bord, l'interface Γ_c est discrétisée par un segment à 3 nœuds. Pour ce faire, on utilise la même procédure que pour la création des sous éléments d'intégration XFEM (voir [R7.02.12]). Les faces de bord intersectées par Γ_c sont basculées dans l'espace de référence (voir Figure 5.4-2). On détermine alors les intersections I_1 et I_2 avec les arêtes de la face qui vont constituer les nœuds extrémités du segment à 3 nœuds. Puis on détermine la position du nœud milieu I_3 sur la médiatrice du segment $[I_1 I_2]$. On obtient alors une approximation quadratique de l'interface au bord du domaine Ω. On est alors à même d'évaluer $\int_{\Gamma_f} W_{ext} p_f^* d\Gamma_f$ en effectuant une intégration sur la chaîne des segments à 3 nœuds qui approximent Γ_f. Il faut cependant bien prendre garde à l'espace d'approximation de p_f sur les faces intersectées. Comme rappelé précédemment, l'espace d'approximation du champ p_f s'appuie uniquement sur les nœuds sommets des arêtes strictement intersectées par la discontinuité et les nœuds sur lesquels passe la discontinuité. Sur la Figure Figure 5.4-2, seuls les nœuds N_1, N_3 et N_4 de la face quadrangle de bord portent le degré de liberté p_f. Afin de satisfaire tout de même la partition de l'unité dans la face quadrangle, on utilise des fonctions de forme modifiées pour le champ p_f :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\widetilde{\psi}_{N_1} = \psi_{N_1} + \frac{\psi_{N_2}}{3}$$
$$\widetilde{\psi}_{N_2} = 0$$
$$\widetilde{\psi}_{N_3} = \psi_{N_3} + \frac{\psi_{N_2}}{3}$$
$$\widetilde{\psi}_{N_4} = \psi_{N_4} + \frac{\psi_{N_2}}{3}$$

avec ψ les fonctions de forme de l'élément parent linéaire et $\widetilde{\psi}$ les fonctions de forme modifiées pour s'adapter à l'espace d'approximation du champ p_f .

Figure 5.4-2: Imposition d'un flux dans une fracture pour les modèles 3D



6 Résolution du problème couplé

6.1 Linéarisation du problème couplé

6.1.1 Linéarisation par la méthode de Newton-Raphson

Le problème couplé étant non linéaire (la non linéarité du problème est due aux termes de masse des formulations variationnelles des équations de conservation de la masse pour le massif et pour l'interface et aux termes cohésifs pour la mécanique) nous procédons à sa linéarisation à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

Soit $\boldsymbol{F}$ le système non linéaire associé aux formulations variationnelles des équations de conservation de la masse (pour le massif et pour l'interface), de l'équation d'équilibre mécanique et de la condition de continuité de la pression p_f au niveau de l'interface. Soit $\boldsymbol{x^k}$ le vecteur des inconnues nodales à l'itération de Newton k tel que :

$$\boldsymbol{x^k} = \{\boldsymbol{u^k}\ \ p^k\ \ p_f^k\ \ q_1^k\ \ q_2^k\ \ \boldsymbol{\lambda}\ \ \boldsymbol{\mu}\ \ \boldsymbol{w}\}^T$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

A l'itération $k+1$ (le vecteur des inconnues nodales $\boldsymbol{x}^{k+1}$ n'est pas connu) on pose :

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{k+1})=\boldsymbol{0}$$

Afin de pouvoir déterminer $\boldsymbol{x}^{k+1}$, nous avons recours à un développement de Taylor de $\boldsymbol{F}$ (qui est une fonction vectorielle supposée continue et dérivable) au voisinage de $\boldsymbol{x}^{k}$ (alors connu à l'itération $k+1$). Ainsi le système linéaire à l'itération $k+1$ s'écrit :

$$-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{k}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{k})}{\partial \boldsymbol{x}^{k}}\cdot\delta\boldsymbol{x}^{k}$$

avec $\delta\boldsymbol{x}^{k}=\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^{k}$ l'incrément des valeurs des inconnues nodales entre deux itérations successives (qui est une inconnue à l'itération $k+1$), $\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{k})}{\partial \boldsymbol{x}^{k}}$ la matrice tangente et $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{k})$ le second membre. Ces deux derniers termes sont connus à l'itération $k+1$ et sont fonctions de $\boldsymbol{x}^{k}$.

6.1.2 É criture intégrale du problème linéarisé

Dans la suite on considère que les inconnues sont notées avec un δ et les champs tests avec une $*$ en exposant.

Le système linéaire à l'itération de Newton $k+1$ s'écrit (pour un pas de temps) :

- équation d'équilibre mécanique
  $\forall \boldsymbol{u}^{*}\in U_0$:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}'^{+}(\delta\boldsymbol{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{*})\,d\Omega-\int_\Omega b\,\delta p\,(\mathbf{1}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{*}))\,d\Omega-\int_\Omega \rho^{+} b\,\boldsymbol{F}^{m+}\,Tr(\nabla(\delta\boldsymbol{u}))\,\boldsymbol{u}^{*}\,d\Omega\\&-\int_\Omega\left(\frac{\rho^{+}(b-\varphi^{+})}{K_s}+\frac{\rho^{+}\varphi^{+}}{K_w}\right)\delta p\,\boldsymbol{F}^{m+}\boldsymbol{u}^{*}\,d\Omega+\int_{\Gamma_c}\delta\boldsymbol{\mu}\cdot[\![\boldsymbol{u}^{*}]\!]\,d\Gamma_c\\&=-\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}'^{+}(\boldsymbol{u}):\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{*})\,d\Omega+\int_\Omega b\,p^{+}(\mathbf{1}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^{*}))\,d\Omega+\int_\Omega r^{+}\boldsymbol{F}^{m+}\boldsymbol{u}^{*}\,d\Omega+\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{t}^{+}\boldsymbol{u}^{*}\,d\Gamma_t\\&-\int_{\Gamma_c}\boldsymbol{\mu}\cdot[\![\boldsymbol{u}^{*}]\!]\,d\Gamma_c\end{aligned}$$

- projection du saut de déplacement
  $\forall \boldsymbol{\mu}^{*}\in L_0$:

$$\int_{\Gamma_c}([\![\delta\boldsymbol{u}]\!]-\delta\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{\mu}^{*}\,d\Gamma_c=-\int_{\Gamma_c}([\![\boldsymbol{u}]\!]-\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{\mu}^{*}\,d\Gamma_c$$

- contrainte cohésives
  $\forall \boldsymbol{w}^{*}\in L_0$:

$$\begin{aligned}&-\int_{\Gamma_c}\left[\delta\boldsymbol{\mu}-\frac{\partial\boldsymbol{t}'_c}{\partial(\boldsymbol{\lambda}+r\boldsymbol{w})}\cdot(\delta\boldsymbol{\lambda}+r\,\delta\boldsymbol{w})\right]\cdot\boldsymbol{w}^{*}\,d\Gamma_c-\int_{\Gamma_c}\delta p_f\boldsymbol{n}_c\cdot\boldsymbol{w}^{*}\,d\Gamma_c\\&=\int_{\Gamma_c}\left[\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{t}'_c(\boldsymbol{\lambda}+r\boldsymbol{w})+p_f\boldsymbol{n}_c\right]\cdot\boldsymbol{w}^{*}\,d\Gamma_c\end{aligned}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- loi d'interface
  $\forall \boldsymbol{\lambda}^* \in L_0$:

$$-\int_{\Gamma_c}\left[\frac{\delta\boldsymbol{\lambda}}{r}-\frac{\partial \boldsymbol{t}'_c}{\partial(\boldsymbol{\lambda}+r\boldsymbol{w})}\cdot\left(\frac{\delta\boldsymbol{\lambda}}{r}+\delta\boldsymbol{w}\right)\right]\cdot\boldsymbol{\lambda}^* d\Gamma_c$$
$$=\int_{\Gamma_c}\frac{\left[\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{t}'_c(\boldsymbol{\lambda}+r\boldsymbol{w})\right]}{r}\cdot\boldsymbol{\lambda}^* d\Gamma_c$$

- équation de conservation de la masse (cas du massif)
  Ainsi $\forall p^* \in P_0$:

$$-\int_\Omega \rho^+ b\, Tr(\nabla(\delta\boldsymbol{u}))p^* d\Omega-\int_\Omega\left(\left(\frac{\rho^+(b-\varphi^+)}{K_s}+\frac{\rho^+\varphi^+}{K_w}\right)\delta p\right)p^* d\Omega+$$
$$\Delta t\theta\left[\int_\Omega\left(\lambda^+\left(-\nabla p^+ + \rho^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)+\lambda^+\rho^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)\frac{\rho^+}{K_w}\delta p\nabla p^* d\Omega\right]+$$
$$\Delta t\theta\left[\int_\Omega\rho^+\left(-\nabla p^+ + \rho^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)\frac{\partial\lambda^+}{\partial p^+}\delta p\nabla p^* d\Omega-\int_\Omega\rho^+\lambda^+\nabla(\delta p)\nabla p^* d\Omega\right]+$$
$$\Delta t\theta\left[\int_\Omega\rho^+\left(-\nabla p^+ + \rho^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)\frac{\partial\lambda^+}{\partial\varepsilon_v^+}Tr(\nabla(\delta\boldsymbol{u}))\nabla p^* d\Omega\right]$$
$$+\Delta t\theta\int_{\Gamma_1}\delta q_1 p^* d\Gamma_1+\Delta t\theta\int_{\Gamma_2}\delta q_2 p^* d\Gamma_2=\int_\Omega\left(m_w^+-m_w^-\right)p^* d\Omega$$
$$-\Delta t\theta\int_\Omega\boldsymbol{M}^+\nabla p^* d\Omega-\Delta t(1-\theta)\int_\Omega\boldsymbol{M}^-\nabla p^* d\Omega$$
$$+\Delta t\theta\int_{\Gamma_F}M_{\text{ext}}^+ p^* d\Gamma_F+\Delta t(1-\theta)\int_{\Gamma_F}M_{\text{ext}}^- p^* d\Gamma_F$$
$$-\Delta t\theta\int_{\Gamma_1}q_1^+ p^* d\Gamma_1-\Delta t(1-\theta)\int_{\Gamma_1}q_1^- p^* d\Gamma_1$$
$$-\Delta t\theta\int_{\Gamma_2}q_2^+ p^* d\Gamma_2-\Delta t(1-\theta)\int_{\Gamma_2}q_2^- p^* d\Gamma_2$$

- équation de conservation de la masse (cas de l'interface)
  Ainsi $\forall p_f^* \in F_0$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma_c}\rho^{+}\,\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c}\,p_f^{*}\,d\Gamma_c-\int_{\Gamma_c}\left(\frac{\rho^{+}[\![\boldsymbol{u}^{+}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c}}{K_w}\,\delta p_f\right)p_f^{*}\,d\Gamma_c\\
&+\Delta t\,\theta\left[\int_{\Gamma_c}-\frac{\rho^{+}\nabla p_f^{+}}{12\mu}\left(3\left([\![\boldsymbol{u}^{+}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^2\right)\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c}\nabla p_f^{*}\,d\Gamma_c\right]\\
&+\Delta t\,\theta\left[\int_{\Gamma_c}-\frac{\left([\![\boldsymbol{u}^{+}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^3\nabla p_f^{+}}{12\mu}\frac{\rho^{+}}{K_w}\,\delta p_f\nabla p_f^{*}\,d\Gamma_c\right]\\
&+\Delta t\,\theta\left[\int_{\Gamma_c}-\frac{\rho^{+}\left([\![\boldsymbol{u}^{+}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c}\right)^3}{12\mu}\nabla\left(\delta p_f\right)\nabla p_f^{*}\,d\Gamma_c\right]\\
&-\Delta t\,\theta\left[\int_{\Gamma_1}\delta q_1\,p_f^{*}\,d\Gamma_1\right]-\Delta t\,\theta\left[\int_{\Gamma_2}\delta q_2\,p_f^{*}\,d\Gamma_2\right]\\
&=\int_{\Gamma_c}\left(w^{+}-w^{-}\right)p_f^{*}\,d\Gamma_c-\Delta t\,\theta\int_{\Gamma_c}\boldsymbol{W}^{+}\nabla p_f^{*}\,d\Gamma_c-\Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_c}\boldsymbol{W}^{-}\nabla p_f^{*}\,d\Gamma_c\\
&+\Delta t\,\theta\left[\int_{\Gamma_1}q_1^{+}p_f^{*}\,d\Gamma_1\right]+\Delta t\left(1-\theta\right)\left[\int_{\Gamma_1}q_1^{-}p_f^{*}\,d\Gamma_1\right]\\
&+\Delta t\,\theta\left[\int_{\Gamma_2}q_2^{+}p_f^{*}\,d\Gamma_2\right]+\Delta t\left(1-\theta\right)\left[\int_{\Gamma_2}q_2^{-}p_f^{*}\,d\Gamma_2\right]\\
&+\Delta t\,\theta\int_{\Gamma_f}W_{ext}^{+}p_f^{*}\,d\Gamma_f+\Delta t\left(1-\theta\right)\int_{\Gamma_f}W_{ext}^{-}p_f^{*}\,d\Gamma_f
\end{aligned}
$$

- équation de continuité de la pression p_f au niveau de l'interface

  Ainsi $\forall q_1^{*}\in Q_1$ et $\forall q_2^{*}\in Q_2$

$$\int_{\Gamma_1}\delta p^{inf}q_1^{*}\,d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\delta p_f q_1^{*}\,d\Gamma_1=-\int_{\Gamma_1}\left(p^{inf}-p_f\right)q_1^{*}\,d\Gamma_1 \text{ sur } \Gamma_1$$

$$\int_{\Gamma_2}\delta p^{\sup}q_2^{*}\,d\Gamma_2-\int_{\Gamma_2}\delta p_f q_2^{*}\,d\Gamma_2=-\int_{\Gamma_2}\left(p^{\sup}-p_f\right)q_2^{*}\,d\Gamma_2 \text{ sur } \Gamma_2$$

6.2 Écriture des termes élémentaires avec XFEM

6.2.1 Écriture sous forme matricielle du problème couplé

Le système d'équations précédemment discrétisé à l'itération de Newton $k+1$ peut se mettre sous la forme (où $\delta\boldsymbol{u}$, δp , δp_f , δq_1 , δq_2 , $\delta\boldsymbol{\lambda}$, $\delta\boldsymbol{\mu}$ et $\delta\boldsymbol{w}$ sont les inconnues du problème à résoudre) :

Équilibre mécanique	$\{\boldsymbol{u}^{*}\}\left[K_{meca}^{1}\right](\delta\boldsymbol{u})+\{\boldsymbol{u}^{*}\}\left[K_{meca}^{2}\right](\delta p)+\{\boldsymbol{u}^{*}\}[A](\delta\boldsymbol{u})+\{\boldsymbol{u}^{*}\}[B](\delta p)+\{[\![\boldsymbol{u}]\!]^{*}\}\left[C^{1}\right]\{\delta\boldsymbol{\mu}\}=\{\boldsymbol{u}^{*}\}(L_{meca})+\{[\![\boldsymbol{u}]\!]^{*}\}(L^{1})$
Projection du saut de déplacement	$\{\boldsymbol{\mu}^{*}\}\left[K^{\mu u}\right](\delta\boldsymbol{u})+\{\boldsymbol{\mu}^{*}\}\left[-K^{w\mu}\right]^{T}(\delta w)=\{\boldsymbol{\mu}^{*}\}(L_u)-\{\boldsymbol{\mu}^{*}\}(L_w)$
Contrainte cohésive	$\{\boldsymbol{w}^{*}\}\left[-K^{w\mu}\right](\delta\boldsymbol{\mu})+\{\boldsymbol{w}^{*}\}\left[D^{ww}\right](\delta w)+\{\boldsymbol{w}^{*}\}\left[K^{wp}\right](\delta p_f)+\{\boldsymbol{w}^{*}\}\left[D^{\lambda w}\right]^{T}(\delta\boldsymbol{\lambda})=-\{\boldsymbol{w}^{*}\}(L_{\mu}^{2})+\{\boldsymbol{w}^{*}\}(L_{cohe}^{1})+\{\boldsymbol{w}^{*}\}(L_p)$
Loi d'interface	$\{\boldsymbol{\lambda}^{*}\}\left[D^{\lambda w}\right](\delta w)+\{\boldsymbol{\lambda}^{*}\}\left[D^{\lambda\lambda}\right](\delta\boldsymbol{\lambda})=-\{\boldsymbol{\lambda}^{*}\}(L_{\mu}^{1})+\{\boldsymbol{\lambda}^{*}\}(L_{cohe}^{2})$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Conservation de la masse (cas du massif)

$$\{p^*\}[M^1_{hydro}](\delta \boldsymbol{u}) + \{p^*\}[M^2_{hydro}](\delta p) + \Delta t\theta\{p^*\}[K^1_{hydro}](\delta p) + \Delta t\theta\{p^*\}[K^2_{hydro}](\delta p) + \Delta t\theta\{p^*\}[K^3_{hydro}](\delta p) + \Delta t\theta\{p^*\}[K^4_{hydro}](\delta \boldsymbol{u}) + \Delta t\theta\{p^*\}[E^1](\delta q_1) + \Delta t\theta\{p^*\}[E^2](\delta q_2 = \{p^*\}(L^1_{hydro}) + \Delta t\{p^*\}(L^2_{hydro})_\theta + \Delta t\{p^*\}(L^3_{hydro})_\theta + \Delta t\{p^*\}(L^4_{hydro})_\theta + \Delta t\{p^*\}(L^5_{hydro})_\theta$$

Conservation de la masse (cas de l'interface)

$$\{p^*_f\}[W^1_{hydro}](\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]) + \{p^*_f\}[W^2_{hydro}](\delta p_f) + \Delta t\theta\{p^*_f\}[H^1_{hydro}](\delta[\!\![\Delta t\theta\{p^*_f\}[H^2_{hydro}](\delta p_f) + \Delta t\theta\{p^*_f\}[H^3_{hydro}](\delta p_f) + \Delta t\theta\{p^*_f\}[D^1](\delta q_1) + \Delta t\theta\{p^*_f\}[D^2](\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]) \Delta t\theta\{p^*_f\}[D^3](\delta q_2) + \Delta t\theta\{p^*_f\}[D^4](\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]) = \{p^*_f\}(L^6_{hydro}) + \Delta t\{p^*_f\}(L^7_{hydro})_\theta + \Delta t\{p^*_f\}(L^8_{hydro})_\theta + \Delta t\{p^*_f\}(L^9_{hydro})_\theta + \Delta t\{p^*_f\}(L^{10}_{hydro})_\theta$$

Continuité de la pression

$$\{q^*_1\}[D^1](\delta p) + \{q^*_1\}[D^2](\delta p_f) = \{q^*_1\}(J^1_{cont})$$

$$\{q^*_2\}[D^3](\delta p) + \{q^*_2\}[D^4](\delta p_f) = \{q^*_2\}(J^2_{cont})$$

K^1_{meca} est la matrice élémentaire de rigidité mécanique classiquement rencontrée en mécanique,

K^2_{meca} est due à la décomposition du tenseur des contraintes du massif (hypothèse des contraintes effectives),

A et B sont dues à la prise en compte des apports massiques dans l'expression de la masse volumique homogénéisée intervenant dans l'expression des efforts volumiques sur Ω ,

C^1 est la matrice élémentaire de rigidité pour l'interface,

$K^{\mu u}$ et $K^{w\mu}$ sont des matrices discrétisant les opérateurs « mortier », la dernière gérant également le changement de base.

K^{wp} est une matrice élémentaire de rigidité pour l'interface,

Les matrices D sont toutes diagonales par blocs : pour I et J deux DDL de Lagrange distincts, elles vérifient $D_{IJ}=0$,

M^1_{hydro} et M^2_{hydro} sont les matrices élémentaires de masse dans le cas du massif pour l'hydrodynamique,

W^1_{hydro} et W^2_{hydro} sont les matrices élémentaires de masse dans le cas de l'interface pour l'hydrodynamique ,

K^1_{hydro} , K^2_{hydro} , K^3_{hydro} et K^4_{hydro} sont les matrices de rigidité élémentaires pour l'hydrodynamique dans le cas du massif,

H^1_{hydro} , H^2_{hydro} et H^3_{hydro} sont les matrices de rigidité élémentaires pour l'hydrodynamique dans le cas de l'interface,

E^1 et E^2 sont les matrices d'échanges dans le cas du massif,

D^1 et D^2 sont les matrices d'échanges dans le cas de l'interface,

F^1 , F^2 , F^3 et F^4 sont les matrices de continuité de la pression au niveau de l'interface,

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L_{meca} est le second membre des forces de volumes et surfaciques appliquées sur le domaine et sur sa frontière,
L^1 est le second membre pour l'interface,

L_u , L_w et L_p sont des seconds membres pour la projection du saut des déplacements,
L_{μ}^2 , et L_{cohe}^1 sont des seconds membres pour la contrainte cohésive,
L_{μ}^1 et L_{cohe}^2 sont des seconds membres pour la loi d'interface,
L_{hydro}^i avec $i \in [\![1,5]\!]$ les seconds membres dus aux apports massiques et aux flux dans le cas du massif pour l'hydrodynamique,
L_{hydro}^i avec $i \in [\![6,10]\!]$ les seconds membres dus aux apports massiques et aux flux dans le cas de l'interface pour l'hydrodynamique,
J_{hydro}^1 et J_{hydro}^2 les seconds membres dus aux échanges sur Γ_1 et Γ_2 .

Remarque :

Comme nous pouvons le remarquer dans l es expressions des matrices élémentaires définies ci- après , les quantités ρ^+ , φ^+ (fonctions des déplacements et de la pression), p^+ et $\boldsymbol{u}^+ (ou [\![\boldsymbol{u}^+]\!])$ sont laissées dans l'état (non discrétisées), car il s'agit de grandeurs obtenues au cours de l'itération de Newton précédente (pour le pas de temps courant $+$) . Elles sont donc a priori connues. Dans l'expression des matrices élémentaires (pour le cas mécanique et hydrodynamique) nous n'indiquerons pas volontairement le numéro de l'itération de Newton sur ces quantités pour éviter de surcharger les expressions.

6.2.2 Expression des matrices élémentaires pour la mécanique

La matrices élémentaire de rigidité mécanique à l'itération de Newton $k+1$ s'écrit :

$$\{\boldsymbol{u}^*\}\left[K_{meca}^1\right](\delta \boldsymbol{u}) = \int_\Omega (\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H}\,\boldsymbol{b_i^*}) \nabla \phi_i C_{ij} \nabla \phi_j (\delta \boldsymbol{a}_j + \widetilde{H}\,\delta \boldsymbol{b}_j)\, d\Omega$$

Les matrices élémentaires due à la décomposition du tenseur des contraintes du massif (hypothèse des contraintes effectives) s'écrit à l'itération de Newton $k+1$:

$$\{\boldsymbol{u}^*\}\left[K_{meca}^2\right](\delta p) = -\int_\Omega b(\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H}\,\boldsymbol{b_i^*}) \nabla \phi_i [\boldsymbol{Id}] \psi_j (\delta c_j + \widetilde{H}\,\delta d_j)\, d\Omega$$

La matrice A à l'itération de Newton $k+1$ s'écrit :

$$\{\boldsymbol{u}^*\}[A](\delta \boldsymbol{u}) = -\int_\Omega \rho^+ b(\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H}\,\boldsymbol{b_i^*}) \phi_i [\boldsymbol{Id}] \nabla \phi_j (\delta \boldsymbol{a}_j + \widetilde{H}\,\delta \boldsymbol{b}_j) \boldsymbol{F^{m+}}\, d\Omega$$

La matrice B à l'itération de Newton $k+1$ s'écrit :

$$\{\boldsymbol{u}^*\}[B](\delta p) = -\int_\Omega \left(\left(\frac{\rho^+ (b - \varphi^+)}{K_s} + \frac{\rho^+ \varphi^+}{K_w} \right) \right) (\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H}\,\boldsymbol{b_i^*}) \phi_i \psi_j (\delta c_j + \widetilde{H}\,\delta d_j) \boldsymbol{F^{m+}}\, d\Omega$$

La matrice associée à la projection du saut des déplacements à l'itération de Newton $k+1$ s'écrit :

$$\{[\![\boldsymbol{u}]\!]^*\}\left[C^1\right](\delta \boldsymbol{\mu}) = \int_{\Gamma_c} \left(2\widetilde{H}\,\boldsymbol{b_i^*}\right) \phi_i \widetilde{\psi}_j (\delta \boldsymbol{\mu_j})\, d\Gamma_c$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les composantes des inconnues $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont définies dans une base fixe $\left(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y, \boldsymbol{e}_Z\right)$, tandis que les composantes de $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ sont définies dans la base locale $\left(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2\right)$ à la surface fissurée Γ_c en chaque point $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c$, de sorte que :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \psi_I(\boldsymbol{x}) \left(w_{I,n} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) + w_{I,\tau 1} \boldsymbol{\tau}_1(\boldsymbol{x}) + w_{I,\tau 2} \boldsymbol{\tau}_2(\boldsymbol{x}) \right)$$

Une définition analogue vaut pour $\boldsymbol{\lambda}$. Pour un degré de liberté I de l'espace réduit (voir §5.2.2), il est possible de déterminer les composantes $t'^I_{c,n}, t'^I_{t,\tau 1}, t'^I_{c,\tau 2}$ de la force cohésive à partir de $\left(w_{I,n}, w_{I,\tau 1}, w_{I,\tau 2}\right)$, $\left(\lambda_{I,n}, \lambda_{I,\tau 1}, \lambda_{I,\tau 2}\right)$ et de la loi cohésive. Ces composantes ne sont pas destinées à être associées à une direction particulière I du degré de liberté, mais destinées à être reliées au sens faible à la contrainte globale $\boldsymbol{\mu}$ écrite en base fixe(confer [R7.02.19]).

$$\{\boldsymbol{u}\}^* \left[K^{\mu u}\right] (\delta \boldsymbol{\mu}) = \int_{\Gamma_c} \widetilde{\psi}_j \phi_i 2 \widetilde{H} \boldsymbol{b}_i^* \cdot (\delta \boldsymbol{\mu}_j) \, d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{w}\}^* \left[K^{w \mu}\right] (\delta \boldsymbol{\mu}) = \int_{\Gamma_c} \widetilde{\psi}_i \, \widetilde{\psi}_j \, \boldsymbol{w_j}^* \cdot \boldsymbol{Q} \cdot (\delta \boldsymbol{\mu}_J) \, d\Gamma_c$$ avec $\boldsymbol{Q}$ la matrice de changement de base orthonormale définie comme précédemment.

$$\{\boldsymbol{w}\}^* \left[K^{w p}\right] (\delta p_f) = \int_{\Gamma_c} \widetilde{\psi}_j \, \widetilde{\psi}_i \boldsymbol{w}_i^* \cdot (\delta p_f)_j \boldsymbol{n_c} \, d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{w}\}^* \left[D^{ww}\right] (\delta \boldsymbol{w}) = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{w_i^*} (\delta \boldsymbol{w_i}) r \frac{\partial \boldsymbol{t}'_c}{\partial (\boldsymbol{\lambda} + r \boldsymbol{w})} (\boldsymbol{\lambda_i} + r \boldsymbol{w_i}) \, \widetilde{\psi}_i^2 \, d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{\lambda}\}^* \left[D^{\lambda w}\right] (\delta \boldsymbol{w}) = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda_i^*} (\delta \boldsymbol{w_i}) \frac{\partial \boldsymbol{t}'_c}{\partial (\boldsymbol{\lambda} + r \boldsymbol{w})} (\boldsymbol{\lambda_i} + r \boldsymbol{w_i}) \, \widetilde{\psi}_i^2 \, d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{\lambda}\}^* \left[D^{\lambda \lambda}\right] (\delta \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda_i^*} (\delta \boldsymbol{\lambda_i}) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \boldsymbol{t}'_c}{\partial (\boldsymbol{\lambda} + r \boldsymbol{w})} (\boldsymbol{\lambda_i} + r \boldsymbol{w_i}) - \boldsymbol{1} \right) \widetilde{\psi}_i^2 \, d\Gamma_c$$

6.2.3 Expression des seconds membres pour la mécanique

Dans les expressions des seconds membres présentés ici on indique le numéro de l'itération de Newton précédente k .

$$\{\boldsymbol{u}^*\}(L_{meca}) = -\int_\Omega (\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H} \boldsymbol{b_i^*}) \boldsymbol{\nabla} \phi_i \, (\boldsymbol{\sigma}'^+(\boldsymbol{u}))^k d\Omega + \int_\Omega b (\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H} \boldsymbol{b_i^*}) \boldsymbol{\nabla} \phi_i [\boldsymbol{Id}] (p^+)^k d\Omega$$
$$+ \int_\Omega (\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H} \boldsymbol{b_i^*}) \phi_i (r_0 + (m_w^+)^k) \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{m}+} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\boldsymbol{a_i^*} + \widetilde{H} \boldsymbol{b_i^*}) \phi_i \, (t^+)^k d\Gamma_t$$

$$\{[\![\boldsymbol{u}]\!]^*\}(L^1) = -\int_{\Gamma_c} \left(2 \widetilde{H} \boldsymbol{b_i^*}\right) \phi_i \, \widetilde{\psi}_j \, \boldsymbol{\mu_j^k} \, d\Gamma_c$$

$$\{u\}_i^* \left(L_\mu^1\right)_i = -\boldsymbol{b}_i^* \cdot \int_{\Gamma_c} 2 \, \phi_i \boldsymbol{\mu} \, d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{\mu}\}^* \left(L_u\right) = -\boldsymbol{\mu}_i^* \cdot \int_{\Gamma_c} \widetilde{\psi}_i [\![\boldsymbol{u}]\!] \, d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{w}\}^* \left(L_p\right) = -\boldsymbol{w}_i^* \cdot \int_{\Gamma_c} \widetilde{\psi}_i p_f \boldsymbol{n_c} \, d\Gamma_c$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\{\boldsymbol{\mu}\}^*\left(L_w\right)=-\boldsymbol{\mu}_i^*\cdot\int_{\Gamma_c}\widetilde{\psi}_i\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{w}\,d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{w}\}^*\left(L_{\mu}^2\right)=\boldsymbol{w}_i^*\cdot\int_{\Gamma_c}\widetilde{\psi}_i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{\mu}\,d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{w}\}^*\left(L_{coh}^1\right)=\boldsymbol{w_i^*}\cdot\boldsymbol{t}'_c(\boldsymbol{\lambda_i}+r\,\boldsymbol{w_i})\int_{\Gamma_c}\widetilde{\psi}_i d\Gamma_c$$

$$\{\boldsymbol{w}\}^*\left(L_{coh}^2\right)_I=\frac{\boldsymbol{w_i^*}}{r}\boldsymbol{t}'_c(\boldsymbol{\lambda_i}+r\,\boldsymbol{w_i})\int_{\Gamma_c}\widetilde{\psi}_I d\Gamma_c$$

6.2.4 Expression des matrices élémentaires pour l'hydrodynamique

6.2.4.1 Cas du massif

Les matrices élémentaires de masse à l'itération de Newton $k+1$ s'écrivent :

$$\{p^*\}\left[M_{hydro}^1\right](\delta\boldsymbol{u})=-\int_\Omega b\rho^+(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\,\psi_i[\boldsymbol{Id}]\nabla\phi_j(\delta\boldsymbol{a}_j+\widetilde{H}\,\delta\boldsymbol{b}_j)\,d\Omega$$

$$\{p^*\}\left[M_{hydro}^2\right](\delta p)=-\int_\Omega\left(\left(\frac{\rho^+(b-\varphi^+)}{K_s}+\frac{\rho^+\varphi^+}{K_w}\right)\right)(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\,\psi_i\,\psi_j(\delta c_j+\widetilde{H}\,\delta d_j)\,d\Omega$$

Les matrices élémentaires de rigidité à l'itération de Newton $k+1$ s'écrivent :

$$\{p^*\}[K_{hydro}^1](\delta p)=\int_\Omega\left(\lambda^+\left(-\nabla p^+\rho^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)+\rho^+\lambda^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)\frac{\rho^+}{K_w}(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\nabla\,\psi_i\,\psi_j(\delta c_j+\widetilde{H}\,\delta d_j)\,d\Omega$$

$$\{p^*\}[K_{hydro}^2](\delta p)=\int_\Omega\rho^+\left(-\nabla p^+\rho^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)\frac{\partial\lambda^+}{\partial p^+}(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\nabla\,\psi_i\,\psi_j(\delta c_j+\widetilde{H}\,\delta d_j)\,d\Omega$$

$$\{p^*\}[K_{hydro}^3](\delta p)=-\int_\Omega\rho^+\lambda^+(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\nabla\,\psi_i\nabla\,\psi_j(\delta c_j+\widetilde{H}\,\delta d_j)\,d\Omega$$

$$\{p^*\}[K_{hydro}^4](\delta\boldsymbol{u})=\int_\Omega\rho^+\left(-\nabla p^+\rho^+\boldsymbol{F}^{m+}\right)\frac{\partial\lambda^+}{\partial\varepsilon_v^+}(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\nabla\,\psi_i[\boldsymbol{Id}]\nabla\phi_j(\delta\boldsymbol{a_j}+\widetilde{H}\,\delta\boldsymbol{b_j})\,d\Omega$$

Les matrices élémentaires d'échange pour le massif à l'itération de Newton $k+1$ s'écrivent :

$$\{p^*\}[E^1](\delta q_1)=\int_{\Gamma_1}(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\,\psi_i\widetilde{\psi}_j(\delta q_1)_j\,d\Gamma_1$$

$$\{p^*\}[E^2](\delta q_2)=\int_{\Gamma_2}(c_i^*+\widetilde{H}\,d_i^*)\,\psi_i\widetilde{\psi}_j(\delta q_2)_j\,d\Gamma_2$$

6.2.4.2 Cas de l'interface

Les matrices élémentaires de masse à l'itération de Newton $k+1$ s'écrivent :

$$\{p_f^*\}[W_{hydro}^1](\delta[\![\boldsymbol{u}]\!])=-\int_{\Gamma_c}\rho^+(p_f^*)_i\,\widetilde{\psi}_i\phi_j\left(2\widetilde{H}\,\delta\boldsymbol{b_j}\right)\boldsymbol{n_c}\,d\Gamma_c$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\{p_f^*\}[W_{hydro}^2](\delta p_f) = -\int_{\Gamma_c} \frac{\rho^+ [\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c}}{K_w}(p_f^*)_i \widetilde{\psi}_i \widetilde{\psi}_j (\delta p_f)_j d\Gamma_c$$

Les matrices élémentaires de rigidité à l'itération de Newton $k+1$ s'écrivent :

$$\{p_f^*\}[H_{hydro}^1](\delta[\![\boldsymbol{u}]\!]) = -\int_{\Gamma_c} \frac{\rho^+ \left(3([\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c})^2\right)\nabla p_f^+}{12\mu}(p_f^*)_i \nabla \widetilde{\psi}_i \phi_j \left(2\widetilde{H}\,\delta\boldsymbol{b_j}\right)\boldsymbol{n_c} d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}[H_{hydro}^2](\delta p_f) = -\int_{\Gamma_c} \frac{([\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c})^3 \nabla p_f^+}{12\mu}\frac{\rho^+}{K_w}(p_f^*)_i \nabla \widetilde{\psi}_i \widetilde{\psi}_j (\delta p_f)_j d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}[H_{hydro}^3](\delta p_f) = -\int_{\Gamma_c} \frac{\rho^+ ([\![\boldsymbol{u}]\!]\cdot\boldsymbol{n_c})^3}{12\mu}(p_f^*)_i \nabla \widetilde{\psi}_i \nabla \widetilde{\psi}_j (\delta p_f)_j d\Gamma_c$$

Les matrices élémentaires d'échange pour l'interface à l'itération de Newton $k+1$ s'écrivent :

$$\{p_f^*\}[D^1](\delta q_1) = -\int_{\Gamma_1} (p_f^*)_i \widetilde{\psi}_i \widetilde{\psi}_j (\delta q_1)_j d\Gamma_1$$

$$\{p_f^*\}[D^2](\delta q_2) = -\int_{\Gamma_2} (p_f^*)_i \widetilde{\psi}_i \widetilde{\psi}_j (\delta q_2)_j d\Gamma_2$$

6.2.4.3 Continuité de la pression

Les matrices élémentaires d'échange (pour l'équation de continuité de la pression au niveau de l'interface) à l'itération de Newton $k+1$ s'écrivent :

$$\{q_1^*\}[F^1](\delta p^{inf}) = \int_{\Gamma_1} (q_1^*)_i \widetilde{\psi}_i \psi_j (\delta c_j + \widetilde{H}\,\delta d_j) d\Gamma_1$$

$$\{q_1^*\}[F^2](\delta p_f) = -\int_{\Gamma_1} (q_1^*)_i \widetilde{\psi}_i \widetilde{\psi}_j (\delta p_f)_j d\Gamma_1$$

$$\{q_2^*\}[F^3](\delta p^{\sup}) = \int_{\Gamma_2} (q_2^*)_i \widetilde{\psi}_i \psi_j (\delta c_j + \widetilde{H}\,\delta d_j) d\Gamma_2$$

$$\{q_2^*\}[F^4](\delta p_f) = -\int_{\Gamma_2} (q_2^*)_i \widetilde{\psi}_i \widetilde{\psi}_j (\delta p_f)_j d\Gamma_2$$

Remarque :

Dans l'expression des matrices élémentaires définies dans cette partie, on peut constater la présence de deux « inconnues » supplémentaires , δp^{inf} et $\delta p^{\sup}$. Elles correspondent en fait à l'inconnue relative aux champs de pression δp définis respectivement sur Γ_1 (c'est-à-dire δp^{inf}) et sur Γ_2 (c'est-à-dire $\delta p^{\sup}$).

6.2.5 Expression des seconds membres élémentaires pour l'hydrodynamique

6.2.5.1 Cas du massif

Dans les expressions des seconds membres présentés ici on indique le numéro de l'itération de Newton précédente :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\{p^*\}(L^1_{hydro}) = \int_\Omega (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*)\, \psi_i \left((m_w^+)^k - (m_w^-)^k\right) d\Omega$$

$$\{p^*\}(L^2_{hydro})_\theta = -\theta \int_\Omega (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*) \nabla\, \psi_i (\boldsymbol{M}^+)^k d\Omega - (1-\theta) \int_\Omega (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*) \nabla\, \psi_i (\boldsymbol{M}^-)^k d\Omega$$

$$\{p^*\}(L^3_{hydro})_\theta = \theta \int_{\Gamma_F} (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*)\, \psi_i (M_{ext}^+)^k d\Gamma_F + (1-\theta) \int_{\Gamma_F} (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*)\, \psi_i (M_{ext}^-)^k d\Gamma_F$$

$$\{p^*\}(L^4_{hydro})_\theta = -\theta \int_{\Gamma_1} (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*)\, \psi_i (q_1^+)^k d\Gamma_1 - (1-\theta) \int_{\Gamma_1} (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*)\, \psi_i (q_1^-)^k d\Gamma_1$$

$$\{p^*\}(L^5_{hydro})_\theta = -\theta \int_{\Gamma_2} (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*)\, \psi_i (q_2^+)^k d\Gamma_2 - (1-\theta) \int_{\Gamma_2} (c_i^* + \widetilde{H}\, d_i^*)\, \psi_i (q_2^-)^k d\Gamma_2$$

6.2.5.2 Cas de l'interface

Dans les expressions des seconds membres présentés ici on indique le numéro de l'itération de Newton précédente.

$$\{p_f^*\}(L^6_{hydro}) = \int_{\Gamma_c} (p_f^*)_i\, \widetilde{\psi}_i \left((w^+)^k - (w^-)^k\right) d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}(L^7_{hydro})_\theta = -\theta \int_{\Gamma_c} (p_f^*)_i \nabla\, \widetilde{\psi}_i (\boldsymbol{W}^+)^k d\Gamma_c - (1-\theta) \int_{\Gamma_c} (p_f^*)_i \nabla\, \widetilde{\psi}_i (\boldsymbol{W}^-)^k d\Gamma_c$$

$$\{p_f^*\}(L^8_{hydro})_\theta = \theta \int_{\Gamma_f} (p_f^*)_i\, \widetilde{\psi}_i (W_{ext}^+)^k d\Gamma_f + (1-\theta) \int_{\Gamma_f} (p_f^*)_i\, \widetilde{\psi}_i (W_{ext}^-)^k d\Gamma_f$$

$$\{p_f^*\}(L^9_{hydro})_\theta = \theta \int_{\Gamma_1} (p_f^*)_i\, \widetilde{\psi}_i (q_1^+)^k d\Gamma_1 + (1-\theta) \int_{\Gamma_1} (p_f^*)_i\, \widetilde{\psi}_i (q_1^-)^k d\Gamma_1$$

$$\{p_f^*\}(L^{10}_{hydro})_\theta = \theta \int_{\Gamma_2} (p_f^*)_i\, \widetilde{\psi}_i (q_2^+)^k d\Gamma_2 + (1-\theta) \int_{\Gamma_2} (p_f^*)_i\, \widetilde{\psi}_i (q_2^-)^k d\Gamma_2$$

6.2.5.3 Continuité de la pression

Dans les expressions des seconds membres présentés ici (pour l'équation de continuité de la pression au niveau de l'interface), on indique le numéro de l'itération de Newton précédente.

$$\{q_1^*\}(J^1_{cont}) = -\int_{\Gamma_1} (q_1^*)_i\, \widetilde{\psi}_i \left((p^{inf})^k - (p_f^+)^k\right) d\Gamma_1$$

$$\{q_2^*\}(J^2_{cont}) = -\int_{\Gamma_1} (q_2^*)_i\, \widetilde{\psi}_i \left((p^{\sup})^k - (p_f^+)^k\right) d\Gamma_2$$

7 Bibliographie

[1] Dolbow. J., Moës. N., Belytschko. T. Discontinuous enrichement in finite elements with a partition of unity method. Finite Element in Analysis and Design. 36 (2000) 235-260.
[2] Belytschko. T., Black. T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45 (1999) 601-620.
[3] Moës. N., Doldbow. J., Belytschko. T. A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46 (1999) 131-150.
[4] Melenk.J.M, Babuška.I. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139 (1996) 289-314.
[5] Khoei. A.R., Haghighat. E. Extended finite element modeling of deformable porous media with arbitrary interfaces. Applied Mathematical Modeling, 35 (2011) 5426-5441.
[6] Khoei. A.R., Moallemi. S., Haghighat. E. Thermo-hydro-mechanical modeling of impermable discontinuity in saturated porous media with XFEM technique. Engineering Fracture Mechanics, 96 (2012) 701-723.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[7] Lecampion. B. An extended finite element method for hydraulic fracture problems. Communications in Numerical Methods in Engineering, 25 (2) 2009.
[8] Bathe.K.J, Brezzi.F. Stability of finite element mixed interpolations for contact problems. Rend. Mat. Acc. Lincei., 12 (9) : 167-183, 2001
[9] Babuška.I. The finite element method with lagrangian multipliers. Numerische Mathematik. 20 (3(179-192, 1973.
[10] Schaap. M.G, Van Genuchten M.Th. A Modified Mualem-van Genuchten Formulation for Improved Desciption of the Hydraulic Conductivity Near Saturation. Vadose Zone Journal, 5 (2006) 27-34.
[11] Witherspoon. P., Wang. J., Iwai. K., Gale. J. Validity of cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture. Water Resour. Res., 16 (6) 1980.
[12] Barenblatt. G. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Advances in Applied Mechanics. 7 (1962) 55-129.
[13] Homand. F., Duffaut. P., Manuel de mécanique des roches. Tome 1 : Les fondements, Les Presses de l'Ecole des Mines, Paris, 2000
[14] A. Ern et S. Meunier. A posteriori error analysis of eurler-galerkin approximations to coupled elliptic-parabolic problems. ESAIM : M2AN, 43:353-375, 2009
[15] M. Faivre, B. Paul, F. Golfier, R.Giot, P. Massin et D ? Colombo : 2D coupled HM-XFEM modeling with cohesive zone model and applications to fluid driven fracture network.

8 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
12	Maxime Faivre (ENSG)	Version initiale
13	Bertrand PAUL (IFPEN)	Version 2

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)