Modélisation du couplage fluage/plasticité pour le béton

Résumé

Il s'agit d'un modèle de couplage entre les comportements modélisant le fluage, de type GRANGER et les modèles de plasticité, soit généraux (loi de Von Mises à écrouissage isotrope), soit spécifiques au béton, de type BETON_DOUBLE_DP, implanté dans l'algorithme de résolution général de DYNA/STAT_NON_LINE. Le couplage est réalisé par un chaînage de la résolution des équations des deux modèles au cours d'un algorithme itératif, qui aura lieu en chaque point de Gauss, à chaque itération. Il s'agit donc d'un couplage "fort", puisque les équations de la loi de fluage et de la loi de plasticité sont satisfaites rigoureusement à chaque instant.

Ce chaînage permet de s'affranchir du développement complet d'une véritable résolution couplée fluage/plasticité, en utilisant les modèles existants, et sans intervenir dans leur résolution, mais présente l'inconvénient d'un coût de calcul plus élevé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Introduction....3
2 Principe du couplage fluage/plasticité....3
3 Mise en équations....4
3.1 Formulation du fluage de Granger dans Code_Aster (Rappel)....4
3.2 Formulation du couplage fluage/plasticité en 1D....5
4 Algorithme d'intégration du couplage fluage/plasticité....7
4.1 Algorithme aux points de Gauss....7
4.2 Organigramme général....8
4.3 Traitement des variables internes....8
4.4 Gestion des comportements et prise en compte du redécoupage du pas de temps....9
4.4.1 Critère de convergence....9
4.4.2 Incrément de déformation de fluage....9
4.4.3 Incrément de déformation plastique....10
5 Bibliographie....11
6 Description des versions du document....11
7 ANNEXE : convergence de la méthode de couplage....12
7.1 Notations et hypothèses....12
7.2 Écriture du problème incrémental global sous la forme d'une minimisation....13
7.3 Convergence de l'algorithme....14
7.4 Calcul de l'opérateur tangent....17

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Il s'agit d'un modèle de couplage entre les comportements modélisant le fluage, de type GRANGER et les modèles béton modélisant les phénomènes de plasticité, soit généraux (Von Mises), soit spécifiques au béton, de type BETON_DOUBLE_DP, implanté dans l'algorithme de résolution général de STAT_NON_LINE [R5.03.01] .

On utilise les modèles existants avec pour objectif de chaîner la résolution des équations internes des deux modèles au cours d'un algorithme itératif, qui a lieu en chaque point de Gauss, à chaque itération. Il s'agit donc d'un couplage "fort", puisque les équations d'équilibre interne du fluage et de la plasticité sont satisfaites rigoureusement à chaque instant.

Ce chaînage permet de s'affranchir du développement complet d'une véritable résolution couplée fluage/plasticité, mais présente l'inconvénient d'un coût de calcul plus élevé. En effet, en chaque point de Gauss, et à chaque itération, il faut a priori résoudre plusieurs fois les équations d'équilibre de la plasticité et celles du fluage, jusqu'à obtenir l'équilibre entre le fluage et la plasticité. Mais, cela permet de coupler une loi de fluage, avec n'importe quelle loi de plasticité, pour un coût de développement modéré. D'autre part, dans le cas de la loi BETON_DOUBLE_DP, en traction post-pic, la courbe d'écrouissage est linéaire, et l'algorithme de résolution local converge en une seule itération. Le coût de calcul reste donc limité.

Les couplages disponibles par ce procédé sont, dans la version de Code_Aster relative à ce document :

- pour la loi de fluage : GRANGER_FP, GRANGER_FP_V, GRANGER_FP_INDT
- pour la loi de plasticité : ELAS, VMIS_ISOT_LINE, VMIS_ISOT_TRAC, VMIS_ISOT_PUIS, ROUSS_PR, BETON_DOUBLE_DP

Remarque : le couplage entre la loi de fluage BETON_UMLV_FP et les loi d 'endommagement MAZARS et ENDO_ISOT_BETON est en fait une loi de comportement écrite spécifiquement pour prendre en compte le couplage entre ces deux modèles, ce qui ne relève pas du principe décrit dans ce document. Ce couplage est décrit dans R7.01.06.

2 Principe du couplage fluage/plasticité

Le couplage est réalisé lors de la résolution interne au point de Gauss dans le cadre d'un algorithme itératif dans lequel sont chaînés les calculs de fluage et de plasticité.

Pour réaliser un tel couplage, on intègre à la résolution locale des opérateurs STAT_NON_LINE DYNA_NON_LINE un module permettant de calculer successivement à partir du même état initial (contraintes et variables internes, déformations et incréments de déformations) la résolution du fluage et de la plasticité. Le principe est le suivant : lors de la résolution au point de Gauss, à partir de l'état initial en contraintes, variables internes et déformations, on effectue un calcul de fluage. L'incrément de déformation de fluage calculé lors de la résolution du fluage est ensuite déduit de l'incrément de déformation totale, et fourni en argument de la résolution de la plasticité. La résolution de la plasticité est effectuée, à partir du même état initial en contraintes, variables internes et déformations, excepté l'incrément de déformation totale, auquel on a ôté l'incrément de déformation de fluage. Lorsque l'incrément de déformation plastique a été calculé, après résolution de la plasticité, on peut corriger la valeur de la déformation en entrée du calcul de fluage, et réitérer le calcul chaîné fluage/plasticité, jusqu'à obtenir la convergence de la solution, c'est-à-dire la stabilité des contraintes et des déformations de fluage et de plasticité.

Les contraintes calculées à l'aide des équations du fluage ne sont a priori pas identiques à celles des équations de plasticité. Leur égalité n'est pas formellement écrite dans les équations. Mais lorsque l'équilibre fluage/plasticité est atteint, on peut montrer que les contraintes en sortie du fluage sont bien égales aux contraintes en sortie de la plasticité (c.f. paragraphe 3.2).

Comme le couplage est résolu par chaînage des résolutions du fluage et de la plasticité au cours d'un algorithme itératif, ceci permettant un coût de développement informatique faible, le calcul de la matrice tangente est effectué exclusivement à partir du modèle de plasticité, sans tenir compte du fluage ou du

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

couplage fluage/plasticité, par mesure de simplification. Les déformations de fluage constituent alors un chargement pour le calcul de plasticité. Cela suppose que l'évolution du fluage est plus lente que l'évolution de la plasticité.

Cette simplification, d'autant plus pertinente que le pas de calcul est judicieusement choisi, permet de converger vers la solution (globale) avec un nombre d'itérations globales légèrement plus important que dans le cas où la matrice tangente est calculée de façon exacte, mais n'altère en rien le résultat du calcul (convergé).

3 Mise en équations

3.1 Formulation du fluage de *Granger* dans *Code_Aster* (Rappel)

Nous présentons succinctement dans ce paragraphe la modélisation du fluage dans *Code_Aster*, suivant le modèle de *Granger*. Pour plus de détail, on se reportera à [R7.01.01 et V6.04.142].
L'expression de la déformation de fluage appliquée à un matériau viscoélastique linéaire, en appliquant le Principe de superposition de Boltzmann pour un historique de chargement non constant $\sigma(t)$, peut s'écrire en 1D :

$$\varepsilon_{fl}(t)=\int_{\tau=0}^{t} f(t-\tau)\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}d\tau = f * \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$*$ représente le produit de convolution

$J(t,t_c)=f(t-t_c)$ est la fonction de fluage, fonction croissante de $(t-t_c)$ et nulle pour $(t-t_c)$ négatif.
On peut montrer que tout corps viscoélastique linéaire peut être modélisé par un groupement en série de modèles de Kelvin et que la fonction de fluage peut alors se mettre sous la forme :

$$f(t)=\sum_{s=1}^{r} J_s\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_s}\right)\right)$$

τ_s et J_s sont des coefficients positifs et identifiés sur les courbes expérimentales de fluage.

On utilise un groupement en série de modèles de Kelvin dont les coefficients sont identifiés à partir de courbes de fluages expérimentales. On montre en pratique qu'on reproduit les courbes de fluage de béton avec satisfaction avec une série de 8 modèles.

On utilise donc la fonction de fluage suivante : $J(t,t_c)=\sum_{s=1}^{s=8} J_s\left(1-\exp\left(-\frac{t-t_c}{\tau_s}\right)\right)$

ce qui conduit à l'expression :

$$\varepsilon_{fl}(t)=\int_{\tau=0}^{t}\left[\sum_{s=1}^{s=8} J_s\left(1-\exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_s}\right)\right)\right]\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}d\tau$$

En dérivant cette expression dans le cas d'un seul modèle de Kelvin (*s=1*), on obtient aisément l'équation suivante : $\tau_s \dot{\varepsilon}_{fl}(t)+\varepsilon_{fl}(t)=J_s\sigma(t)$

qui peut s'écrire aussi : $\sigma(t)=\frac{\tau_s}{J_s}\dot{\varepsilon}_{fl}(t)+\frac{1}{J_s}\varepsilon_{fl}(t)$

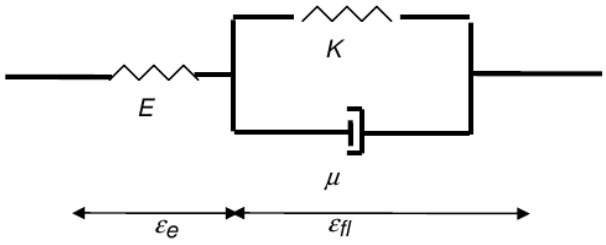
soit encore : $\sigma(t)=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}(t)+K\,\varepsilon_{fl}(t)$ avec $\mu=\frac{\tau_s}{J_s}$ et $K=\frac{1}{J_s}$

On peut étendre cette formulation au cas du développement en série de 8 modèles de Kelvin (ou plus), moyennant quelques développements mathématiques, ce qui donne :

$$\sigma(t)=\sum_{s=1}^{s=8}\left[K_s\,\varepsilon_{fl}^{s}(t)+m_s\,\dot{\varepsilon}_{fl}^{s}(t)\right]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

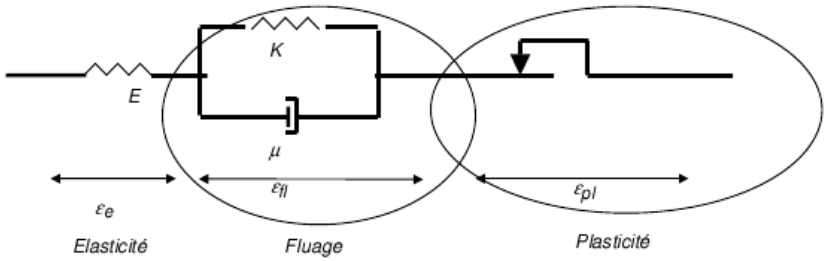
Le modèle rhéologique du fluage est représenté sur la figure ci-dessous, dans le cas d'un unique modèle de Kelvin :



Pour simplifier la présentation du couplage dans le paragraphe qui suit, on ne tient compte que du premier terme de la décomposition en série de Kelvin, et on écrit : $\sigma(t)=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}(t)+K\,\varepsilon_{fl}(t)$
De plus, pour la présentation, on suppose μ et K constants, c'est-à-dire $\mu=\mu^{-}$ et $K=K^{-}$.

3.2 Formulation du couplage fluage/plasticité en 1D

Le couplage fluage/plasticité correspond au modèle rhéologique ci-dessous, où le fluage, caractérisé par les coefficients K et μ (raideur et viscosité), et la plasticité sont modélisés en série.



Les équations régissant le fluage sont les suivantes :

$$\sigma=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}+K\,\varepsilon_{fl}$$
$$\varepsilon=\varepsilon_{e}+\varepsilon_{fl}$$
$$\sigma=E\,e_{\varepsilon}$$

que l'on peut écrire à l'instant courant (l'exposant '-' désignant l'instant précédent) :

$$\varepsilon=\varepsilon_{e}+\varepsilon_{fl}=\varepsilon^{-}+\Delta\varepsilon_{e}+\Delta\varepsilon_{fl}$$
$$\sigma=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}+K\,\varepsilon_{fl}=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}+K\left[\varepsilon-\varepsilon_{e}\right]$$
$$\sigma=E\,\varepsilon_{e}$$

L'équation régissant le modèle de plasticité est la suivante :

$$\sigma=E\left[\varepsilon-\varepsilon_{pl}\right]$$

Ce qui conduit, dans le cas du couplage fluage/plasticité, au système d'équations suivant :

$$\varepsilon=\varepsilon_{e}+\varepsilon_{fl}+\varepsilon_{pl}=\varepsilon^{-}+\Delta\varepsilon_{e}+\Delta\varepsilon_{fl}+\Delta\varepsilon_{pl}$$
$$\sigma=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}+K\,\varepsilon_{fl}=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}+K\left[\varepsilon-\varepsilon_{e}-\varepsilon_{pl}\right]$$
$$\sigma=E\,\varepsilon_{e}$$
$$\sigma=E\left[\varepsilon-\varepsilon_{pl}-\varepsilon_{fl}\right]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la résolution des équations de comportement au point de Gauss, dans les routines élémentaires de *Code_Aster*, l'égalité des contraintes issues du fluage et de la plasticité n'est pas formellement écrite, ce qui correspond en fait au système d'équations suivant (en notant σ_1 la contrainte issue de la résolution du fluage et σ_2 la contrainte issue de la résolution de la plasticité à l'instant courant) :

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_{fl}+\varepsilon_{pl}=\varepsilon^-+\Delta\varepsilon_e+\Delta\varepsilon_{fl}+\Delta\varepsilon_{pl}$$
$$\sigma_1=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}+K\,\varepsilon_{fl}=\mu\,\dot{\varepsilon}_{fl}+K\left[\varepsilon-\varepsilon_e-\varepsilon_{pl}\right]$$
$$\sigma_1=E\,\varepsilon_e$$
$$\sigma_2=E\left[\varepsilon-\varepsilon_{pl}-\varepsilon_{fl}\right]$$

Or, à l'équilibre du couplage fluage/plasticité, on a bien égalité de la déformation de fluage et de la déformation plastique dans les équations du modèle de fluage de Granger, et dans les équations de la plasticité, ce qui implique en modifiant l'équation régissant la plasticité :

$$\varepsilon_e=\varepsilon-\varepsilon_{pl}-\varepsilon_{fl}$$

puis $$\sigma_2=E\left[\varepsilon-\varepsilon_{pl}-\varepsilon_{fl}\right]=E\,\varepsilon_e$$

d'où $$\sigma_2=E\,\varepsilon_e=\sigma_1$$

soit l'égalité des contraintes calculées lors de la résolution du fluage, avec les contraintes calculées lors de la résolution de la plasticité : $\sigma_2=\sigma_1$

C'est la partition des déformations sous la forme $\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_{pl}+\varepsilon_{fl}$, et l'identité des modules d'Young des modèles de fluage et de plasticité qui sont à l'origine de ce résultat. En effet, le même module d'Young intervient dans le modèle de fluage et dans le modèle de plasticité, et conduit, avec l'identité de la déformation élastique, à l'égalité des contraintes.

Remarques : De façon plus générale, ce genre d'algorithme nécessite que les deux lois calculent de façon **identique** la contrainte élastique.

Sous cette hypothèse, une généralisation de ce couplage aux modèles dont les déformations visqueuses et plastiques sont additives est possible [1]. On écrira alors :

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \varepsilon_{fl}\end{pmatrix}=F_1\left(\varepsilon-\varepsilon_{pl};\sigma^-;\varepsilon^-_{pl},\ldots\right)$$
$$\begin{pmatrix}\sigma_2\\ \varepsilon_{pl}\end{pmatrix}=F_2\left(\varepsilon-\varepsilon_{fl};\sigma^-;\varepsilon^-_{fl},\ldots\right)$$

Une étude théorique de la convergence d'un tel modèle, sous l'hypothèse que les deux comportements s'inscrivent dans le cadre des milieux standards généralisés, est décrite en annexe.

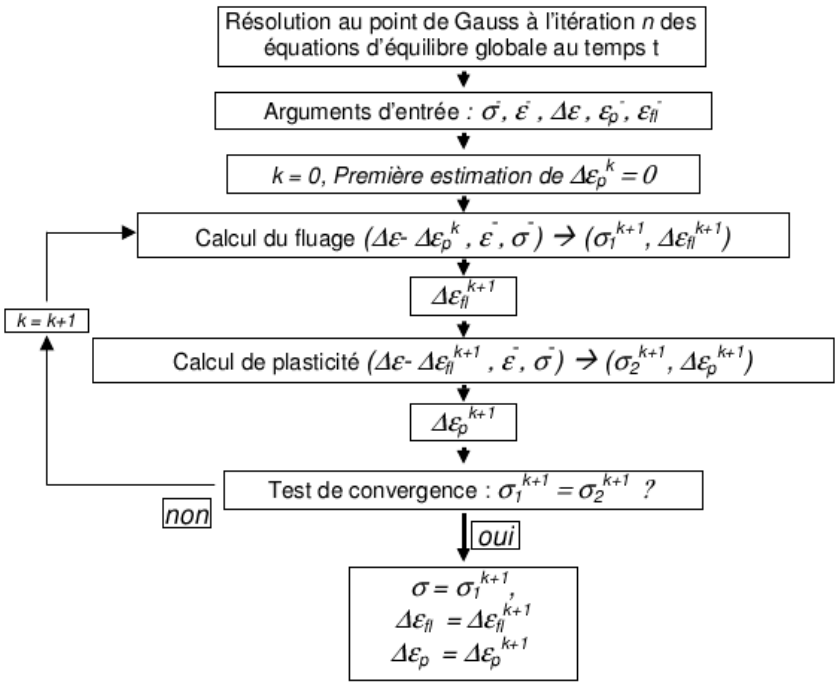
D'autres possibilités de couplage, concernant en particulier les lois d 'endommagement et de plasticité existent [7]. En particulier le couplage `BETON_UMLV_FP / ENDO_ISOT_BETON` est décrit dans [R7.01.06].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Algorithme d'intégration du couplage fluage/plasticité

4.1 Algorithme aux points de Gauss

Pour introduire le couplage fluage/plasticité dans *Code_Aster*, on adopte la démarche suivante : on utilise un algorithme itératif dans lequel, à chaque point de Gauss, on chaîne le fluage à la plasticité. On résout l'équation du fluage à chaque itération (k) à l'aide d'une valeur estimée de l'incrément de déformation plastique, que l'on ôte à l'incrément de déformation totale. On obtient ainsi une valeur estimée de l'incrément de déformation de fluage, que l'on ôte à la déformation totale pour la résolution de la plasticité à l'itération k. On obtient ainsi une nouvelle estimation de l'incrément de déformation plastique, qui permet d'effectuer le calcul du fluage à l'itération $k+1$.
On effectue de façon itérative le chaînage fluage/plasticité, jusqu'à obtenir une solution stable, c'est-à-dire une variation en valeur relative de la contrainte inférieure à un critère de convergence.

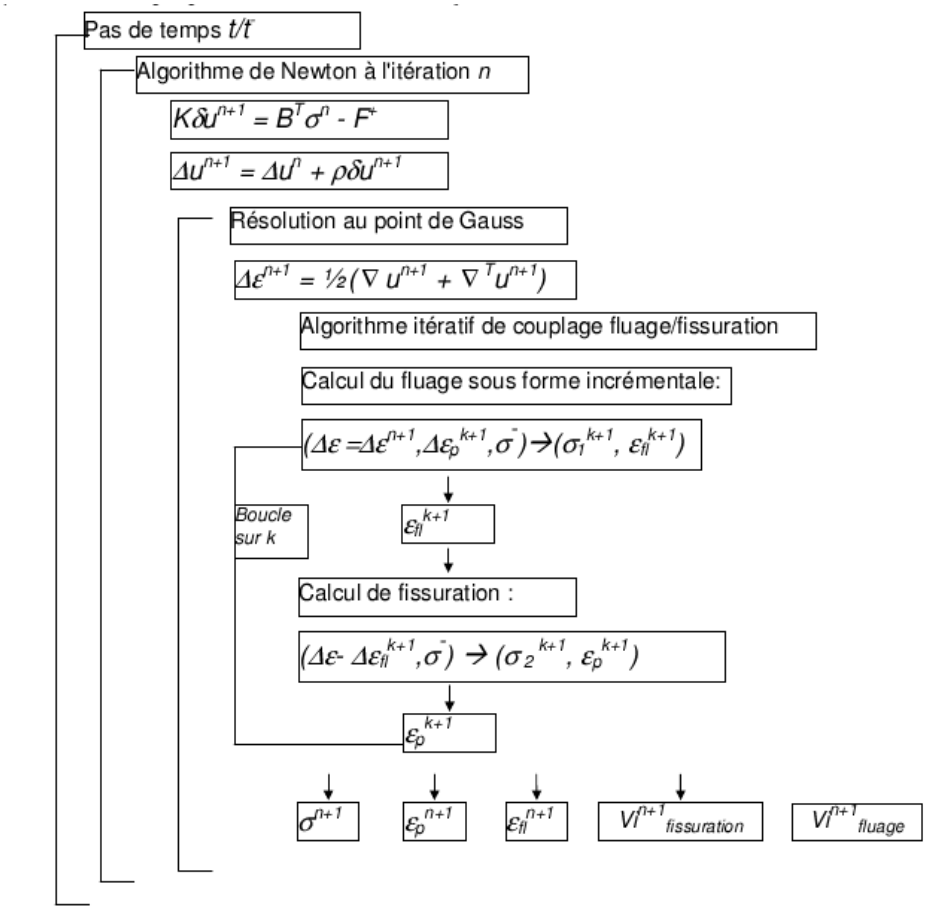


Dans la mesure où **la résolution du fluage dans *Code_Aster* est programmée de façon incrémentale**, la simplification consiste à remplacer $\Delta\varepsilon$ par $\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{pl}^k$ dans les arguments d'appel de la résolution du fluage. Il n'y a donc pas d'intervention à faire dans le module de résolution du fluage. Il en est de même de la résolution de la plasticité, où l'on remplace $\Delta\varepsilon$ par $\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{fl}^k$ dans les arguments d'appel de la résolution de la plasticité.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2 Organigramme général

On peut ébaucher l'organigramme de la résolution de la façon suivante :



Remarque : Vi désigne les variables internes

Le calcul de fluage n'a pour objectif que de fournir la déformation de fluage qui intervient comme un chargement supplémentaire du calcul de plasticité. Les contraintes calculées lors de la résolution du fluage ne sont ni stockées en mémoire, ni utilisées pour le calcul de plasticité. À l'équilibre fluage/plasticité, elles sont égales aux contraintes issues du calcul de plasticité.

Les variables internes du calcul du fluage sont par contre conservées d'une itération à l'autre car le calcul de fluage à l'itération n nécessite la connaissance des variables internes à l'itération $n-1$. Ces variables permettent aussi de calculer à chaque pas de temps, la déformation de fluage dont l'incrément est utilisé pour le calcul de plasticité. Il en est de même des variables internes du modèle plasticité.

4.3 Traitement des variables internes

La résolution simultanée des deux modèles, fluage et plasticité, nécessite un traitement particulier des variables internes, analogue à ce qui est fait dans l'environnement THM (cf [R7.01.10]) : la dimension du tableau des variables internes est la somme des nombres de variables de chaque modèle. Elles sont transmises aux routines de niveau inférieur les informations nécessaires pour récupérer ces variables à chaque instant de calcul.

Pour le cumul de deux lois mécaniques couplées, le nombre total de variables internes est stocké dans la carte de comportement, ainsi que le nom des lois.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les variables internes des différentes lois se succèdent dans le tableau des variables internes : en premier celle qui concernent le fluage, puis celle relatives à la plasticité.

4.4 Gestion des comportements et prise en compte du redécoupage du pas de temps

Le chaînage des lois de comportement nécessite le calcul de l'incrément de déformation de fluage à partir des variables internes du modèle, qui est ensuite ôté de l'incrément de déformation totale avant appel d'une autre loi. On ne peut donc pas permuter les comportements.

La première loi à coupler doit être une loi de fluage de type GRANGER_FP (loi de *Granger*) ou GRANGER_FP_V (loi de *Granger* avec vieillissement) ou GRANGER_FP_INDT (loi de *Granger* indépendant de la température). L'ordre des lois de comportement défini par l'utilisateur doit respecter cette logique.

La seconde loi doit être une loi de mécanique non linéaire, de type BETON_DOUBLE_DP, ou d'une façon plus générale, une loi élastique ELAS, ou élasto-plastique VMIS_ISOT_*.

Le nombre de lois du couplage est limité à deux, la première étant une loi de fluage, et le non respect de ces choix de modélisation conduit à un arrêt « Fatal ».

Le module de résolution du comportement couplé fluage/plasticité se présente comme une nouvelle loi.

Actuellement, la loi de fluage n'est pas intégrée au redécoupage automatique du pas de temps de *Code_Aster*, du fait d'une résolution explicite, contrairement aux lois de plasticité. Lors de la résolution du couplage, la loi de plasticité bénéficie du redécoupage automatique du pas de temps, suivant les mêmes conventions que le redécoupage appliqué aux lois de plasticité non couplées (redécoupage systématique ou uniquement en cas de non convergence, ou pas de redécoupage).

4.4.1 Critère de convergence

Le chaînage fluage/plasticité est réalisé dans une boucle, dans le module de couplage, jusqu'à convergence de la solution. Lorsque l'incrément de déformation de fluage et l'incrément de déformation de plasticité sont stables d'une itération à l'autre, les contraintes issues du calcul de fluage sont égales aux contraintes issues du calcul de plasticité. On pourrait établir un critère de convergence en déformation, mais il est plus logique que le critère de convergence soit calculé à partir des contraintes, qui constituent l'argument de sortie des calculs élémentaires aux points de Gauss (avec les variables internes).
Finalement, le critère de convergence du couplage est de la forme :

$$\frac{\|\sigma_1\|-\|\sigma_2\|}{|\sigma_1|} < \text{tolérance}$$

en notant σ_1 la contrainte issue de la résolution du fluage et σ_2 la contrainte issue de la résolution de la plasticité à l'instant courant. Il s'agit donc d'un critère relatif en contrainte.

Le nombre maximal d'itérations de couplage fluage/plasticité est défini par le paramètre donnant le nombre maximal d'itérations de la résolution locale ITER_INTE_MAXI. De même, le critère de convergence du couplage, défini par le résidu relatif en contrainte est défini par le résidu maximal des résolutions locales RESI_INTE_RELA. Ces deux paramètres permettent donc de gérer la convergence de chacune des deux lois locales, et la convergence du couplage.

4.4.2 Incrément de déformation de fluage

Le calcul de l'incrément de déformation de fluage est calculé dans le module de résolution du couplage. En effet, il n'est pas stocké dans les variables internes.
A partir des variables internes correspondant au fluage, on peut recalculer de façon simple, la déformation de fluage aux instants courant et précédent, et ainsi en déduire l'incrément de déformation de fluage à ôter à

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

l'incrément de déformation totale. (On se reportera à la documentation de référence de la relation de comportement de Granger, pour de plus amples informations [R7.01.01 et V6.04.142]).
Dans le cadre d'une expression monodimensionnelle, la déformation de fluage du modèle de Granger est la suivante :

$$\varepsilon_{fl}^{1D}(t_n)=\sum_{s=1}^{8}\varepsilon_{fl}^{s}(t_n) \;=J\cdot A_n^0-\sum_{s=1}^{8}A_n^s \qquad \text{avec } J=\sum_s J_s$$

et

$$\begin{cases} A_{n+1}^0=A_n^0+\Delta(S)_{n+1} \\ A_{n+1}^s=A_n^s\cdot\exp(-\dfrac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s})+\Delta(S)_{n+1}\cdot\dfrac{\tau_s}{\Delta t_{n+1}}\cdot J_s\cdot(1-\exp-\dfrac{\Delta t_{n+1}}{\tau_s}) \end{cases}$$

où $S=\sigma\,.\,h\,.\,\dfrac{T-248}{45}$

Δt_n représente l'incrément de temps entre les instants t_n et t_{n+1}.

J_s et τ_S sont des coefficients de la décomposition en série de modèle de Kelvin.

Les coefficients $J\cdot A_n^0$ et A_n^s $_{(s=1,8)}$ sont en fait des tenseurs de même dimension que le tenseur de déformation, dont les différentes composantes sont stockées comme variables internes du modèle.
En 3D, l'hypothèse classique consiste à supposer l'existence d'un coefficient de Poisson de fluage, constant et égal au coefficient de Poisson élastique. Ce coefficient de Poisson de fluage n'est pas pris en compte dans la formulation 1D : $\varepsilon_{fl}^{1D}(t_n)=J\cdot A_n^0$ - $\sum_{s=1}^{8}A_n^s$.
Il est donc nécessaire de multiplier le tenseur de déformation obtenu à partir des variables internes par la matrice :

$$H_0=\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}$$

pour obtenir la déformation de fluage 3D.

Soit $\varepsilon_{fl}(t_n)=H_0\,.\,\varepsilon_{fl}^{1D}(t_n)=H_0\cdot\left(J\cdot A_n^0-\sum_{s=1}^{8}A_n^s\right)$

(On a une formulation analogue en 2D).

On transmet alors comme incrément de déformation en entrée de la résolution de la plasticité, l'incrément de déformation totale, auquel on a ôté l'incrément de déformation de fluage calculé par différence des déformations de fluage aux instants courant et précédent.

4.4.3 Incrément de déformation plastique

Le calcul de l'incrément de déformation plastique est calculé dans le module de résolution du couplage. En effet, il n'est pas stocké dans les variables internes.

L'incrément de déformation plastique s'obtient simplement par retrait de l'incrément de déformation de fluage et de l'incrément de déformation élastique à l'incrément de déformation totale.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1) P. de Bonnières : Etude préliminaire pour l'EL 2000-135 : généralisation du concept KIT_DDI de couplage de lois de comportement. CR MMN 2001/010 du 15/01/2001

2) I. EKELAND, R. TEMAM. « Analyse convexe et problèmes variationnels » Bordas, Paris (1974)

3) D. G. LUENBERGER. « Introduction to linear and nonlinear programming » Addison-Wesley publishing company (1973)

4) P. MIALON. « Optimisation convexe » Cours de DEA. Tunis 1991.

5) P. MIALON. « Eléments d'analyse et de résolution numérique des relations de l'élasto-plasticité » EDF - Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches
Série C Mathématiques, Informatique, n°3, 1986, p. 57-89.

6) B. Cirée : Développement du couplage fluage/fissuration dans le *Code_Aster*© - Spécifications. Rapport CS SI/311-1/420AL0/RAP/00.019 Version 1.1

7) D.Markovic « plate-forme numérique des couplages élasto-plastiques endommageables » CR-AMA/07.049

6 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
8.4	C.CHAVANT, P.de BONNIERES EDF-R&D/AMA B. CIREE CS	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 ANNEXE : convergence de la méthode de couplage

7.1 Notations et hypothèses

Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons considérer deux lois de comportement $L1$ et $L2$ non linéaires, dissipatives associées à un même tenseur d'élasticité H. L'intégration de la loi Li consiste, à chaque point de Gauss, d'une part à calculer l'incrément de contrainte Ds et l'incrément de déformation anélastique $\Delta\varepsilon_{a_i}$ en fonction d'un incrément de déformation totale $\Delta\varepsilon$ et de grandeurs en début de pas de temps (connues) et d'autre part à calculer au point $\Delta\varepsilon$ la contribution à l'opérateur tangent $\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)_{\Delta\varepsilon}^{L_i}$.

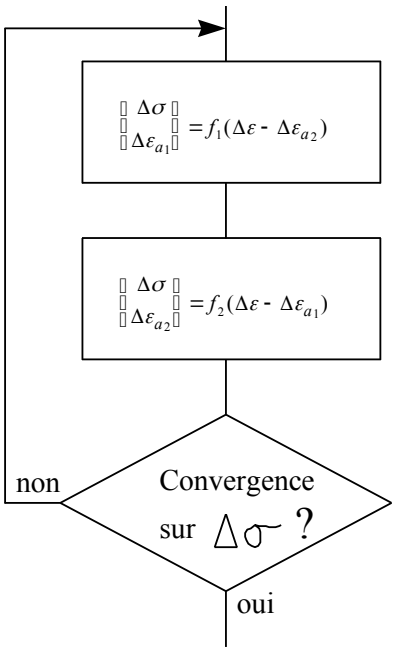
On peut décrire de façon synthétique le « problème incrémental local » que constitue l'intégration de la loi L_i en introduisant l'opérateur f_i défini par :

$$\begin{pmatrix}\Delta\sigma\\ \Delta\varepsilon_{a_i}\end{pmatrix}=f_i(\Delta\varepsilon)$$

On peut alors définir la loi de comportement L résultant du couplage de $L1$ et $L2$. Sa déformation anélastique ε_a vaut : $\varepsilon_a=\varepsilon_{a_1}+\varepsilon_{a_2}$ et la relation d'élasticité associée à L s'écrit :

$$\sigma=H(\varepsilon-\varepsilon_{a_1}-\varepsilon_{a_2})$$

L'intégration de la loi L s'effectue par les résolutions successives des « problèmes incrémentaux locaux » suivants (lois L_1 et L_2) dans une boucle jusqu'à convergence sur $\Delta\sigma$ (l'opérateur tangent $\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)_{\Delta\varepsilon}^{L}$ pour la loi L est calculé au paragraphe 3) :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'approche théorique de ce type de couplage comporte deux volets :

- L'étude de la convergence de la boucle ci-dessus
- L'étude de la possibilité de mettre le problème incrémental global (que constitue le calcul de structure avec la loi L) sous la forme d'un problème de minimisation ayant une solution unique.

7.2 Écriture du problème incrémental global sous la forme d'une minimisation

Nous supposons que les deux lois de comportement L_1 et L_2 s'inscrivent dans le cadre des milieux standards généralisés. Dans ce cas, le « problème incrémental local » que constitue l'intégration de la loi L_i , décrit par l'égalité :

$$\begin{pmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\varepsilon_{a_i} \end{pmatrix} = f_i(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{a_j}) \qquad (E_i)$$

où $i \in \{1,2\}$ et $j = 3-i$, peut également s'écrire sous la forme :

$$\Delta\varepsilon_{a_i} = Arg\,\underset{e_i}{Min}\left[\phi(\varepsilon + \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_{a_j}, \varepsilon_{a_i} + \varepsilon_{a_j} + e_i) + G_i(e_i)\right] \qquad (P_i)$$

où φ est l'énergie de déformation élastique :

$$\varphi(\varepsilon, \varepsilon_a) = \frac{1}{2} H(\varepsilon - \varepsilon_a) : (\varepsilon - \varepsilon_a)$$

et où G_i est le « potentiel complémentaire » de la loi L_i . Nous définissons ci-dessous ce potentiel G_i à partir de f_i , part stockée de l'énergie libre et fonction des variables internes a_i , et du potentiel de dissipation D_i , fonction de la vitesse de déformation anélastique $\dot{\varepsilon}_{a_i}$ et des vitesses d'évolution des variables internes $\dot{\alpha}_i$. Avec une formulation incrémentale, on a :

$$G_i(e_i) = \underset{\Delta\alpha}{Min}\left[\varphi_i(\alpha_i + \Delta\alpha) + D_i(e_i, \Delta\alpha)\right]$$

Le vecteur a_i des variables internes de la loi L_i au début du pas de temps intervient donc comme paramètre dans l'expression de G_i . Pour chaque valeur de ce paramètre a_i , la fonction G_i est positive et convexe.

Remarque : S'il n'y a pas de variables internes, on a simplement $G_i = D_i$

On suppose de plus que l'un des deux potentiels complémentaires, G_1 ou G_2 , est strictement convexe et coercif.

En posant $\Delta\varepsilon_{a_1} = \bar{x}$, $\Delta\varepsilon_{a_2} = \bar{y}$ et $F(x,y) = \varphi(\varepsilon + \Delta\varepsilon, \varepsilon_{a_1} + \varepsilon_{a_2} + x + y)$, le système constitué par les équations (P_1) et (P_2) est équivalent à :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \bar{x} = Arg\ \underset{x}{Min}\left[F(x, \bar{y}) + G_1(x) \right] \\ \bar{y} = Arg\ \underset{y}{Min}\left[F(\bar{x}, y) + G_2(y) \right] \end{cases} \quad (S)$$

G_1 et G_2 étant convexes et F étant Gâteaux-différentiable convexe, on a d'après la propriété $P7$ de [4] (qui découle de la proposition 2.2 du chapitre II de [2]) :

$$(S) \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = Arg\ \underset{(x,y)}{Min}\left[F(x, y) + G_1(x) + G_2(y) \right]$$

Le fait de trouver une solution exacte au système constitué par les équations (E_1) et (E_2) est donc équivalent à trouver le minimum d'une fonction continue, coercive et strictement convexe. D'après la proposition 1.2 du chapitre II de [2], ce minimum existe et est unique.

La résolution locale de la loi L résultant du couplage de L_1 et L_2 est donc équivalente au problème de minimisation ci-dessus. Par conséquent, L est une loi de comportement standard généralisée avec j comme énergie de déformation élastique et G comme potentiel complémentaire, où G est défini par :

$$G(\dot{\varepsilon}_a) = G_1(\dot{\varepsilon}_{a_1}) + G_2(\dot{\varepsilon}_{a_2})$$

avec $\varepsilon_a = \varepsilon_{a_1} + \varepsilon_{a_2}$.

En procédant de la même manière que dans le §3 de [5], on peut donc mettre le problème incrémental global (que constitue le calcul de structure avec la loi L) sous la forme d'un problème de minimisation ayant une solution unique.

7.3 Convergence de l'algorithme

Il faut maintenant prouver que l'algorithme décrit ci-dessus converge bien.

On note $z_n = (x_n, y_n) = (\Delta\varepsilon_a^{n_1}, \Delta\varepsilon_a^{n_2})$ le résultat issu de l'itération n et on pose :

$$K(z) = K(x, y) = F(x, y) + G_1(x) + G_2(y)$$

On calcule z_{n+1} en fonction de z_n de la manière suivante :

$$x_{n+1} = Arg\ \underset{x}{Min}\, K(x, y_n)$$
$$y_{n+1} = Arg\ \underset{y}{Min}\, K(x_{n+1}, y)$$

On note :

$$\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = Arg\ \underset{(x,y)}{Min}\, K(x, y)$$

Pour montrer la convergence de la suite (z_n) vers $\bar{z}$, nous allons utiliser le théorème de convergence globale du §6.5 de[3].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On considère A l'algorithme qui à partir de z_0 donné engendre la suite (z_n) définie ci-dessus :

$z_{n+1}=A(z_n)$

L'ensemble solution Γ est constitué par le singleton { $\bar{z}$ }.

Vérifions les hypothèses de ce théorème :

H1 : tous les points z_n sont contenus dans un ensemble compact S.

On a par construction :

$$\forall n\in\mathbb{N}, K(z_n)\leq K(z_0)$$

Or, K est coercive donc $K(z)\underset{\|z\|\to+\infty}{\to}+\infty$ avec $\|z\|^2=x_{eq}^2+y_{eq}^2)$

Donc :
$\forall R>0$, $\exists M>0$, $\forall z$, $\|z\|>M\Rightarrow K(z)>R$
$\forall R>0$, $\exists M>0$, $\forall z$, $K(z)\leq R\Rightarrow\|z\|\leq M$

En prenant $R=K(z_0)$, on a donc :
$\forall n\in\mathbb{N},\|z_n\|\leq M$

Donc tous les points z_n sont contenus dans un ensemble borné, donc dans un compact puisque l'espace vectoriel est de dimension finie, donc l'hypothèse est satisfaite.

H2. Il existe une fonction de descente Z pour Γ et A

Z doit être continue et vérifier les deux propriétés suivantes :
. si $z\neq\bar{z}$, alors $Z(A(z))<Z(z)$
. si $z=\bar{z}$, alors $Z(A(z))\leq Z(z)$

On prend $Z=K$

K est bien continue et on a :

. $K(A(\bar{z}))=K(\bar{z})$

. Si $z\neq\bar{z}$, alors $A(z)=z'=(x',y')$ tel que :
$$x'=Arg\underset{x}{Min}\,K(x,y)$$
$$y'=Arg\underset{y}{Min}\,K(x',y)$$

Si on a $x'\neq x$, alors K étant continue, coercive et strictement convexe, le minimum x' est unique et on a $K(x',y)<K(x,y)$. Or, on a $K(x',y')\leq K(x',y)$ donc $K(z')<K(z)$.

Si on a $x'=x$, alors on a $y'\neq y$ (sinon, on aurait $z=\bar{z}$).

K étant continue, coercive et strictement convexe, le minimum y' est unique et on a :

$K(x',y')<K(x',y)et\,K(x',y)=K(x,y)$ donc $K(x',y')<K(x,y)$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On a donc dans les deux cas :

$$K(A(z))<K(z)$$

Il existe donc bien une fonction de descente pour Γ et A. L'hypothèse est satisfaite.

H3. L'algorithme A est fermé pour tout z n'appartenant pas à Γ

Pour vérifier cette troisième hypothèse, nous allons adopter la même méthode que celle utilisée au §7.8 de [3] pour montrer la convergence globale d'un algorithme de descente cyclique par coordonnée (cyclic coordinate descent algorithm).

Considérons les deux algorithmes suivants :

- C^1 qui à (x, y) associe l'ensemble des points (X, y) avec X quelconque
- C^2 qui à (x, y) associe l'ensemble des points (x, Y) avec Y quelconque

On considère par ailleurs M l'algorithme de minimisation sur chacun de ces deux ensembles (qui à un élément de l'ensemble associe le point réalisant le minimum sur l'ensemble). L'algorithme A est alors la composition de 4 algorithmes :

$$A = M\,C^2\,M\,C^1$$

Les algorithmes C^1 et C^2 sont continus et M est fermé. Comme tous les points sont contenus dans un ensemble compact S (cf la première hypothèse), on en déduit d'après le corollaire 1 du §6.5 de [3] que A est fermé, donc l'hypothèse est satisfaite.

Les trois hypothèses du théorème de convergence globale étant vérifiées, nous avons donc montré le résultat suivant :

La limite de toute sous-suite convergente de (z_n) est $\bar{z}$. (P)

Or, nous avons également montré que tous les points z_n sont contenus dans un compact S. Supposons que (z_n) ne converge pas vers $\bar{z}$, alors on a :

$$\exists \varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n=\psi(N)>N, \|z_n-\bar{z}\|>\varepsilon$$

On peut construire une sous-suite $(z_{b(n)})$ définie par :

$$b(0)=0$$
$$\forall n\in\mathbb{N}, \beta(n+1)=\psi(\beta(n))$$

On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}, \left\|z_{\beta(n)}-\bar{z}\right\|\leq M$

Or, l'ensemble $(S-B(\bar{z},e))$ est compact, donc la suite $(z_{b(n)})$ admet une sous-suite convergente qui d'après la propriété (P) ci-dessus converge vers $\bar{z}$, ce qui est absurde.

On obtient donc le résultat recherché :

La suite (z_n) converge vers $\bar{z}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.4 Calcul de l'opérateur tangent

En notant $\Delta\varepsilon$ l'incrément de déformation totale (en entrée pour la loi L résultant du couplage de L_1 et L_2), on peut calculer explicitement l'opérateur tangent de L évalué au point $\Delta\varepsilon$, opérateur que l'on note $\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}$:

$$\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}=\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_1}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_2}}\frac{\partial(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_2})}{\partial\Delta\varepsilon}$$

$$\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}=\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_1}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_2}}\left(H^{-1}\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}+\frac{\partial\Delta\varepsilon_{a_1}}{\partial\Delta\varepsilon}\right)\qquad(3.1)$$

où les $\Delta\varepsilon_{a_i}$ résultent de la convergence de la boucle décrite au paragraphe 7, avec $\Delta\varepsilon$ en entrée. Or, on a également, par symétrie sur les indices 1 et 2 :

$$\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}=\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_2}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_1}}\frac{\partial(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_1})}{\partial\Delta\varepsilon}$$

$$\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}=\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_2}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_1}}\left(I-\frac{\partial\Delta\varepsilon_{a_1}}{\partial\Delta\varepsilon}\right)$$

On peut donc calculer $\left(\frac{\partial\Delta\varepsilon_{a_1}}{\partial\Delta\varepsilon}\right)$: $\frac{\partial\Delta\varepsilon_{a_1}}{\partial\Delta\varepsilon}=I-\left[\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_2}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_1}}\right]^{-1}\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}$

En introduisant cette expression dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}=\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_1}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_2}}\left(H^{-1}\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}+I-\left[\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_2}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_1}}\right]^{-1}\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}\right)$$

D'où :

$$\left[I-\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_1}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_2}}\left(H^{-1}-\left[\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_2}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_1}}\right]^{-1}\right)\right]\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^L_{\Delta\varepsilon}=\left(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon}\right)^{L_1}_{\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon_{a_2}}$$

On a donc finalement :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon}\right)_{\Delta \varepsilon}^{L}=\left[\left[\left(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon}\right)_{\Delta \varepsilon-\Delta \varepsilon_{a_2}}^{L_1}\right]^{-1}+\left[\left(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon}\right)_{\Delta \varepsilon-\Delta \varepsilon_{a_1}}^{L_2}\right]^{-1}-H^{-1}\right]^{-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)