Loi de comportement de LAIGLE

Résumé :

Le modèle rhéologique de Laigle permet d'analyser le comportement mécanique des roches. Le développement de ce modèle de comportement a été initié suite à la difficulté d'appréhender correctement la réponse du massif lors de l'excavation d'une cavité souterraine, dans le but :

- de définir le besoin et la nature des soutènements éventuels à mettre en œuvre ;
- de déterminer l'étendue du terrain autour d'un ouvrage influencée par le creusement.

La mise en œuvre de ce modèle élastoplastique a été principalement focalisée sur la simulation du comportement post-pic de la roche. On suppose, dans cette optique, qu'il n'y a pas d'écrouissage de la roche préalablement à la rupture de celle-ci. Cela se traduit par un comportement élastique linéaire jusqu'au pic de résistance (il peut néanmoins y avoir endommagement de la roche alors que le matériau n'est pas encore en rupture). Le critère de plasticité défini est de type Hoek et Brown généralisé et rend compte de l'influence du niveau de contrainte sur la résistance au cisaillement. Le radoucissement du matériau est associé à une diminution progressive des propriétés de cohésion et d'angle de frottement accompagnée d'un changement de volume. Il est piloté par la déformation déviatoire plastique cumulée considérée comme seule variable d'écrouissage.

Pour faciliter l'intégration de ce modèle dans *Code_Aster*, la loi initialement développée dans le formalisme des contraintes principales a été réécrite avec des invariants de contraintes sur une base du modèle Cambou-Jafari-Sidoroff (CJS). La formulation numérique est implicite par rapport au critère et explicite par rapport à la direction d'écoulement.

La convention de signe utilisée pour la formulation des équations, dans le cadre de cette note, est celle de la mécanique des milieux continus.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....4
1.1 Généralités....4
1.2 Paramètres du modèle....5
2 Introduction....6
2.1 Phénoménologie du comportement des sols....6
2.2 Contexte d'étude et hypothèses simplificatrices du modèle....7
3 Le modèle continu....8
3.1 Comportement élastique....8
3.2 Critère de plasticité....8
3.2.1 Surface de charge....8
3.2.1.1 Expression du critère de Laigle en contraintes majeures et mineures....8
3.2.1.2 Expression générale....8
3.2.1.3 Allure des seuils....9
3.2.2 Écrouissage....9
3.2.3 Loi de dilatance....10
3.2.3.1 Écriture généralisée....10
3.2.3.2 Détermination de l'intersection du critère intermédiaire et du critère ultime....11
3.2.4 Écoulement plastique....12
4 Calcul des dérivées....13
4.1 Dérivée du critère....13
4.1.1 Dérivée par rapport aux contraintes....13
4.1.1.1 Dérivée intermédiaire par rapport au déviateur....13
4.1.1.2 Dérivée intermédiaire par rapport aux contraintes....14
4.1.1.3 Expression finale de la dérivée du critère par rapport aux contraintes....14
4.1.2 Dérivée par rapport à la variable d'écrouissage....14
4.2 Dérivée totale du critère par rapport au multiplicateur plastique....15
4.3 Dérivées des paramètres par rapport à la variable d'écrouissage....15
5 Opérateur tangent en vitesse....17
6 Traitement numérique adapté aux modèles non réguliers....18
6.1 La projection au sommet du cône....18
6.1.1 Définition de l'angle de projection....18
6.1.2 Existence de la projection....19
6.1.3 Règles de projection....23
6.1.3.1 Cas où le paramètre de dilatance est négatif....23
6.1.3.2 Cas où le paramètre de dilatance est positif....23
6.1.3.3 Interprétation graphique....23
6.1.3.4 Équations d'écoulement....24
6.2 Redécoupage local du pas de temps....24

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Les variables internes....25
7.1 V1 : la déformation déviatoire plastique cumulée....25
7.2 V2 : la déformation volumique plastique cumulée....25
7.3 V3 : les domaines de comportement de la roche....25
7.4 V4 : l'état de plastification....26
8 Présentation détaillée de l'algorithme....26
8.1 Calcul de la solution élastique....26
8.2 Calcul du critère élastique....26
8.3 Algorithme....27
9 Variante sur l'expression du critère de plasticité....30
9.1 Formulation générale....30
9.2 Allure des seuils....30
10 Fonctionnalités et vérification....32
11 Bibliographie....32
12 Description des versions du document....32
Annexe 1 Recalage du critère sur le triaxial en compression....33
Annexe 2 Normalisation de Q....34
Annexe 3 Encadrement de l'angle de projection....35

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

1.1 Généralités

σ désigne le tenseur des contraintes effectives en petites perturbations, noté sous la forme du vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \end{pmatrix}$$

On note :

$I_1 = \mathrm{tr}(\sigma)$	premier invariant des contraintes
$\boldsymbol{s} = \sigma - \frac{I_1}{3}\boldsymbol{I}$	tenseur des contraintes déviatoires
$s_{11} = \sqrt{\boldsymbol{s}.\boldsymbol{s}}$	deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoires
σ_1	contrainte principale majeure
σ_3	contrainte principale mineure
$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{Tr(\varepsilon)}{3}\boldsymbol{I}$	déviateur des déformations
$\varepsilon_v = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$	déformation volumique
$\cos(3\theta) = 2^{1/2}3^{3/2}\frac{det(\boldsymbol{s})}{s_{II}^3}$	θ étant l'angle de Lode
$\gamma^p = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}^p e_{ij}^p}$	déformations déviatoriques plastiques cumulées
$\mathbf{n}$	normale de l'hypersurface de déformation
$\mathbf{G}$	fonction pilotant l'évolution des déformations plastiques et décrivant la direction d'écoulement
$\tilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{G} - \frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{G})}{3}\boldsymbol{I}$	déviateur de $\mathbf{G}$
$G = Tr(\boldsymbol{G})$	trace de $\mathbf{G}$
$\tilde{G}_{II} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{G}}.\tilde{\boldsymbol{G}}}$	norme de $\tilde{\mathbf{G}}$
ψ	angle de dilatance
φ	angle de frottement
f	surface de charge

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.2 Paramètres du modèle

Notation	Description
m	Pente du critère dans le plan (p',q) pour les très fortes contraintes (fonction de la nature minéralogique de la roche)
s	Cohésion du milieu. Représentatif de l'endommagement de la roche.
a	Caractérisation de la concavité du critère, fonction du niveau d'altération de la roche. Il définit l'influence de la composante de dilatance dans le comportement aux grandes déformations.
γ_{ult}	Déformation déviatoire plastique correspondant au critère ultime
γ_e	Déformation déviatoire plastique correspondant à la disparition complète de cohésion
m_{ult}	Valeur de m du critère ultime atteinte en γ_{ult}
m_e	Valeur de m du critère intermédiaire atteinte en γ_e
a_e	Valeur de a du critère intermédiaire atteinte en γ_e
m_{pic}	Valeur de m du critère de pic atteinte au pic de contrainte
a_{pic}	Valeur de a du critère de pic atteinte au pic de contrainte
η	Exposant régulant l'écrouissage
σ_c	Résistance à la compression simple
γ	Premier paramètre réglant la dilatance
ζ	Second paramètre réglant la dilatance
γ_{cjs}	Paramètre de forme du critère de plasticité dans le plan déviatoire
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
σ_{p1}	Intersection du critère intermédiaire et du critère de pic
σ_{p2}	Intersection du critère intermédiaire et du critère ultime
PA	Pression atmosphérique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

L'objet de cette note est de présenter le modèle rhéologique pour analyser le comportement mécanique des roches, adapté à la simulation des ouvrages souterrains, introduit dans *Code_Aster* et développé par le CIH [bib1]. La finalité de ce modèle est de pouvoir être mis en œuvre, de manière rapide et industrielle afin de répondre aux principales interrogations que se pose l'ingénieur lors de l'analyse et de la conception d'une cavité souterraine. La loi rhéologique doit pour cela rester relativement simple, aussi bien lors de l'identification des paramètres que dans sa mise en œuvre et lors de l'interprétation des résultats.

2.1 Phénoménologie du comportement des sols

Une des particularités d'une roche, par rapport à un sol, est que son comportement mécanique est, sur une plage de contrainte importante, piloté par la cohésion. Cette cohésion est associée à une cimentation du milieu, induite au cours de l'histoire géologique du massif, et est essentiellement de nature épitaxique. Au contraire, la résistance d'un sol est plus particulièrement régie par le terme de frottement et/ou de dilatance. La cohésion, d'origine essentiellement capillaire, n'a alors une influence que pour de très faibles états de contraintes de confinement.

Cette distinction entre un sol et une roche est importante car elle oriente le choix et les hypothèses de base du modèle de comportement.

Les principaux phénomènes rhéologiques associés à ce contexte sont les suivants :

- Dans le domaine des petites déformations, la réponse d'une roche, en particulier sous de faibles états de confinement, peut être assimilée à un comportement élastique linéaire, faiblement dépendant de l'état des contraintes. Les non-linéarités du comportement sont susceptibles d'apparaître préalablement au pic de résistance, dans le cas des roches tendres, pour un niveau de contrainte de l'ordre de 70 à 80% de la valeur maximale. Ce seuil diminue avec l'accroissement de la pression moyenne pour quasiment s'annuler lorsque la contrainte de surconsolidation est atteinte (cap-model). Sous de très faibles contraintes de confinement représentatives de celles régnant à proximité des ouvrages souterrains, ces non-linéarités sont généralement faibles, d'autant plus que la cimentation est importante, et donc le niveau de surconsolidation de la roche élevé.

- La dilatance (augmentation de volume) s'initie lorsque les non-linéarités apparaissent sur la courbe contrainte-déformation. Cette dilatance s'accroît jusqu'à ce qu'il y ait localisation au sein de l'échantillon. A ce moment, le taux de dilatance (ou l'angle de dilatance ψ) est maximal, pour ensuite progressivement décroître et s'annuler aux très grandes déformations.

- Le pic de résistance est atteint pour des contraintes décrivant un critère de rupture, généralement courbe dans le plan de Mohr ou dans le plan des contraintes principales majeures et mineures. L'hypothèse d'un critère linéaire de Mohr-Coulomb n'est donc qu'une hypothèse simplificatrice, ayant tendance, pour de faibles contraintes de confinement, à majorer la cohésion du milieu.

- Une fois la résistance maximale atteinte, la résistance de la roche diminue. Ce radoucissement post-pic est d'autant plus rapide et important (en intensité) que la contrainte de confinement est faible. Cette décroissance est liée à un endommagement plus ou moins localisé de la roche, en fonction du niveau de confinement. Quelle que soit cette contrainte, au-delà du pic, **la roche ne peut plus être considérée comme continue**. Son comportement est alors piloté par les conditions de déformation et de résistance au niveau de la zone de localisation des déformations.

- L'apparition d'une ou plusieurs discontinuités cinématiques au sein de la roche est associée à une perte de la cohésion. Le comportement post-pic est alors régi par les conditions de frottement et de dilatance le long des plans de discontinuité ou au sein d'une bande de localisation des déformations. Il ressort de ce raisonnement que pour de très grandes déformations, le comportement de la roche assimilée à une « structure », est uniquement frottant, et est caractérisé par un angle de frottement ultime ϕ. Cet angle est une donnée intrinsèque du matériau, fonction des minéraux constitutifs de la roche. Il ne dépend donc pas directement des conditions de cohésion, et il peut surtout être considéré comme indépendant des dimensions de l'échantillon.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- Lorsque le comportement devient uniquement frottant, il n'est associé à aucune déformation volumique. La dilatance s'est donc annulée, et n'existe plus aux grandes déformations.

- L'évolution entre la résistance de pic et l'état critique correspondant aux grandes déformations, est plus ou moins progressive en fonction de l'état des contraintes appliquées. Pour un état de confinement nul (compression simple), le comportement est uniquement piloté par la cohésion, et la rupture se traduit par une perte immédiate et brutale de toute résistance. Le radoucissement sera plus progressif au fur et à mesure que la contrainte de confinement augmentera, pour devenir inexistant au-delà d'une certaine contrainte de confinement limitant les domaines de comportement ductiles et fragiles.

2.2 Contexte d'étude et hypothèses simplificatrices du modèle

La volonté de développer un modèle aisé à mettre en œuvre s'accompagne nécessairement de simplifications, issues d'un compromis entre les objectifs attendus, les conditions d'utilisation du modèle (qualité des données d'entrée, délais et coût disponible…) et les moyens mis en œuvre pour assurer ces développements. Ces compromis sont essentiellement les suivants :

- **Un comportement élastique linéaire** jusqu'au pic de résistance. Ceci revient à supposer qu'il n'y a pas d'écrouissage de la roche préalablement à la rupture de celle-ci.

- **Seul un critère de rupture en cisaillement est retenu**. Ceci signifie que si la roche est écrasée de manière isotrope, le comportement reste élastique, et qu'il n'y a pas endommagement et écrouissage du matériau sous ce type de chemin. Durant les phases d'excavation d'un ouvrage souterrain avec mise en œuvre d'un soutènement léger, la pression moyenne dans le massif situé à proximité ne peut que diminuer (ou rester constante dans le cas idéal d'une cavité circulaire soumise à une sollicitation isotrope, pour un comportement élastique linéaire). La plastification sous contrainte isotrope, que l'on peut retrouver sur un Cap-Model ou sur une loi de type Cam-Clay ne nous a pas semblé indispensable compte tenu des objectifs recherchés, et dans le cas d'une sollicitation isotherme et à court terme.

Lors du développement de ce modèle, nous nous sommes volontairement focalisés sur l'étude et la simulation du comportement post-pic de la roche. Dans ce domaine de comportement, la résistance du matériau est supposée pilotée, en fonction de l'état des contraintes et du niveau d'endommagement de la roche, par la cohésion, la dilatance ou le frottement.

La cohésion définit la résistance du matériau tant que celui-ci reste continue. Elle est active jusqu'au pic de résistance, et n'a que peu d'influence sur le comportement radoucissant, à moins que la cohésion soit représentative d'une « colle » ductile (cas des sols injectés par gel de silicates,…).

Au fur et à mesure que la cohésion se détériore par endommagement, la dilatance augmente, pour atteindre sa valeur maximale lors de la perte de continuité du milieu. A ce moment, sous l'effet du cisaillement de la discontinuité induite, cette dilatance se dégrade progressivement et lentement. La rhéologie de la roche évolue alors vers un comportement purement frottant.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Le modèle continu

3.1 Comportement élastique

Le comportement élastique est piloté par une loi linéaire, avec un module constant indépendant de l'état de contraintes. Les 2 paramètres caractérisant ce comportement sont le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson ν .

$$\dot{\boldsymbol{s}}=2\mu\left(\dot{\boldsymbol{e}}-\dot{\boldsymbol{e}}^{p}\right) \qquad \text{éq 3.1-1}$$

$$\dot{\boldsymbol{I}}_1=3\mathrm{K}\left(\dot{\varepsilon}_{\nu}-\dot{\varepsilon}_{\nu}^{p}\right) \qquad \text{éq 3.1-2}$$

3.2 Critère de plasticité

La formulation adoptée est celle de [bib2].

3.2.1 Surface de charge

3.2.1.1 Expression du critère de Laigle en contraintes majeures et mineures

$$f=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left[\left(|\sigma_1-\sigma_3|\right)\frac{1}{a\left(\gamma^p\right)}-(\sigma_c)\frac{1}{a\left(\gamma^p\right)}\left(\frac{m\left(\gamma^p\right)}{\sigma_c}(-\sigma_3)+s(\gamma^p)\right)\right] \qquad \text{éq 3.2.1.1-1}$$

3.2.1.2 Expression générale

On transforme l'expression précédente en fonction du premier invariant et du déviateur des contraintes, par un recalage du critère sur un triaxial en compression, pour obtenir :

$$f=\left(\frac{g\left(\boldsymbol{s}\right)}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a\left(\gamma^p\right)}}-u\left(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p\right)\leq 0 \qquad \text{éq 3.2.1.2-1}$$

avec :

$$h\left(\theta\right)=\left(1+\gamma_{\mathrm{cjs}}\cos(3\,\theta)\right)^{1/6}=\left(1+\gamma_{\mathrm{cjs}}\sqrt{54}\,\frac{det\left(\boldsymbol{s}\right)}{s_{II}^3}\right)^{1/6} \qquad \text{éq 3.2.1.2-2}$$

$$\left|\begin{array}{l} h_c^0=h\left(\theta=\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(1-\gamma_{\mathrm{cjs}}\right)^{1/6} \\ h_t^0=\left(1+\gamma_{\mathrm{cjs}}\right)^{1/6} \end{array}\right.$$

$$g\left(\boldsymbol{s}\right)=s_{II}\,h(\theta) \qquad \text{éq 3.2.1.2-3}$$

$$u(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p)=-\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{\sqrt{6}\,\sigma_c}\frac{g\left(\boldsymbol{s}\right)}{h_c^0}-\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{3\,\sigma_c}I_1+s(\gamma^p).k(\gamma^p) \qquad \text{éq 3.2.1.2-4}$$

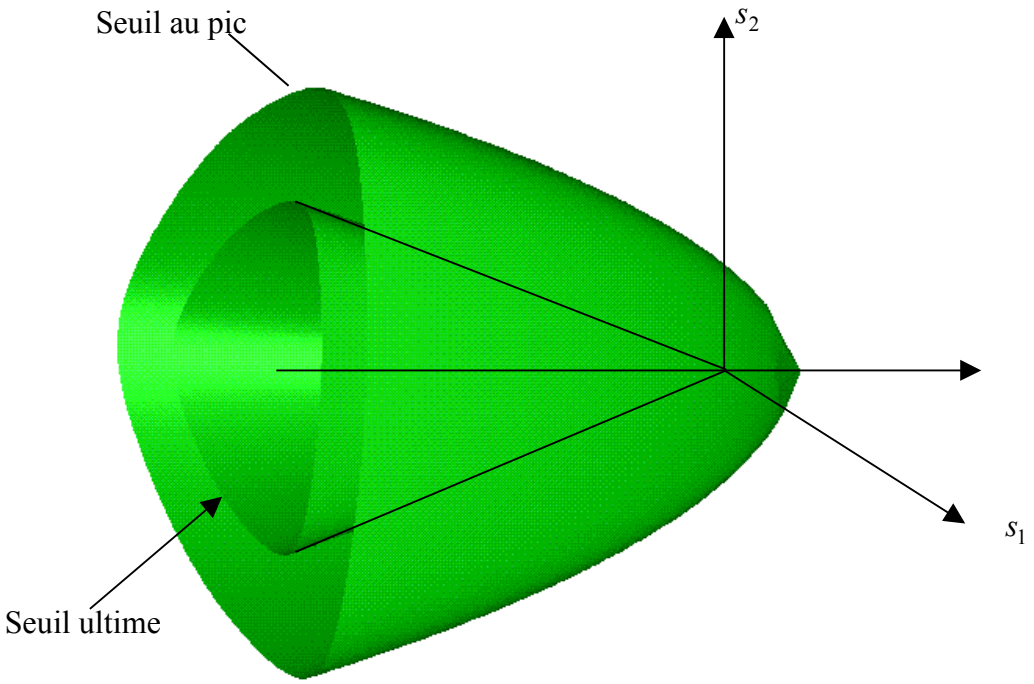
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :

- *On démontre [Annexe 1] l'équivalence des deux expressions*
- *On montre qu'une deuxième formulation du critère avec un recalage sur un triaxial en compression et en extension est possible mais nous ne la choisissons pas. Elle est toutefois présentée au chapitre [§9].*

3.2.1.3 Allure des seuils

On trace l'allure des seuils au critère de pic et au critère ultime.



3.2.2 Écrouissage

Pour traduire le radoucissement post-pic de la roche on définit des lois de variations des paramètres m, s et a du critère en fonction de la variable interne d'écrouissage γ^p (il s'agit de la déformation déviatoire plastique cumulée, proportionnelle au deuxième invariant du tenseur des déformations déviatoires, correspondant à la distorsion plastique).

$$s\left(\gamma^p\right)=\left(1-\frac{\gamma^p}{\gamma^e}\right) \quad \text{si } \gamma^p<\gamma_e$$
$$s\left(\gamma^p\right)=0 \quad \text{si } \gamma^p\geq\gamma_e \qquad \text{éq 3.2.2-1}$$

si $\gamma^p>\gamma_{ult}$ - $a=1$
$m=m_{ult}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Sinon

$$\Omega\left(\gamma^p\right)=\left(\frac{\gamma^p}{\gamma^e}\right)^{\eta}\frac{a_e-a_{\text{pic}}}{1-a_e}\frac{\gamma_{\text{ult}}-\gamma_e}{\gamma_{\text{ult}}-\gamma^p} \qquad \text{éq 3.2.2-2}$$

$$a\left(\gamma^p\right)=\frac{a_{\text{pic}}+\Omega\left(\gamma^p\right)}{1+\Omega\left(\gamma^p\right)} \qquad \text{éq 3.2.2-3}$$

$$m\left(\gamma^p\right)=\frac{\sigma_c}{\sigma_{\text{p1}}}\left[\left(m^{\text{pic}}\frac{\sigma_{\text{p1}}}{\sigma_c}+1\right)^{\frac{a_{\text{pic}}}{a\left(\gamma^p\right)}}-s\left(\gamma^p\right)\right] \quad \text{si } \gamma^p<\gamma_e$$

$$m\left(\gamma^p\right)=\frac{\sigma_c}{\sigma_{\text{p2}}}\left[\left(m_e\frac{\sigma_{\text{p2}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{a_{\text{pic}}}{a\left(\gamma^p\right)}}\right] \quad \text{si } \gamma^p\geq\gamma_e \qquad \text{éq 3.2.2-4}$$

$$k\left(\gamma^p\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2a\left(\gamma^p\right)}}. \qquad \text{éq 3.2.2-5}$$

Ces lois d'évolutions pour chacun des 3 paramètres sont dépendantes les unes des autres et respectent les conditions d'intersection des critères durant la phase d'écrouissage [bib1].

Remarque :

La condition de cohérence à respecter porte sur la continuité du paramètre m en γ_e :

$$\lim_{\gamma^p\to\gamma_e} m\left(\gamma^p\right)=\frac{\sigma_c}{\sigma_{\text{p1}}}\left[\left(m_{\text{pic}}\frac{\sigma_{\text{p1}}}{\sigma_c}+1\right)^{\frac{a_{\text{pic}}}{a\left(\gamma_p\right)}}-s\left(\gamma^p\right)\right]$$

soit :

$$m_e=\frac{\sigma_c}{\sigma^{\text{p1}}}\left(m_{\text{pic}}\frac{\sigma_{\text{p1}}}{\sigma_c}+1\right)^{\frac{a_{\text{pic}}}{a_e}} \qquad \textit{éq 3.2.2-6}$$

3.2.3 Loi de dilatance

3.2.3.1 Écriture généralisée

La loi de dilatance (on admet que la valeur de la dilatance est inversement proportionnelle à celle de la cohésion) peut être généralisée en écrivant :

$$\sin\psi=\sin\left(\psi\left(\alpha'\right)\right)=\gamma\frac{\alpha'-m_{\text{ult}}-1}{\zeta\alpha'+m_{\text{ult}}+1} \qquad \text{éq 3.2.3.1-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

avec :

$$\alpha' = \alpha'\left(I_{1,}\, g(\boldsymbol{s}), \sigma_{t0}\right) = \frac{\tilde{\sigma}_1 - \sigma_{t0}}{\tilde{\sigma}_3 - \sigma_{t0}} \qquad \text{éq 3.2.3.1-2}$$

$s_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} s_{II} \cos(\theta);\quad s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} s_{II} \cos(\theta + \frac{2\pi}{3});\quad s_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} s_{II} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3});$ où θ est l'angle de Lode

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + s_1;\quad \sigma_2 = \frac{I_1}{3} + s_2;\quad \sigma_3 = \frac{I_1}{3} + s_3;$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_1 = \sigma_i \text{ avec } i \text{ tel que } |\sigma_i| = \max\left(|\sigma_j|,\ j = 1,2,3\right) \\ \tilde{\sigma}_3 = \sigma_i \text{ avec } i \text{ tel que } |\sigma_i| = \max\left(|\sigma_j|,\ j = 1,2,3\right) \end{cases}$$

Remarque :

Une condition à respecter est que le rapport $\frac{\gamma}{\zeta}$ reste inférieur à 1. Dans le cas de roches dures très résistantes, soumises à des contraintes de confinement relativement faibles, la loi de dilatance peut ainsi tendre vers ce rapport. Si les deux paramètres sont unitaires on retrouve l'expression de la loi de Rowe décrivant la loi de dilatance pour des sols pulvérulents. Cette approche revient à conserver la même expression que pour une roche fortement endommagée, en assimilant l'effet de la cohésion à celui d'un confinement supplémentaire de valeur σ_{t0}.

Caractérisation de σ_{t0} en fonction des paramètres (a, m, s) caractérisant la roche

- Cas où $s(\gamma^p) = 0$

  Disparition de la cohésion, on pose $\sigma_{t0} = 0$

- Cas où $s(\gamma^p) \neq 0$

$$\sigma_{t0} = \sigma_{t0}\left(\Phi_{0,}\, C_0\right) = 2C_0 \sqrt{\frac{1 - \sin\Phi_0}{1 + \sin\Phi_0}} \qquad \text{éq 3.2.3.1-3}$$

  avec :

$$\begin{cases} \Phi_0 = \Phi_0(m, s, a) = 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{1 + \text{ams}^{a-1}}\right) - \frac{\pi}{2} \\ C_0 = C_0(m, s, a) = \frac{\sigma_c s^a}{\sqrt{1 + \text{ams}^{a-1}}} \end{cases}$$

3.2.3.2 Détermination de l'intersection du critère intermédiaire et du critère ultime

En écrivant la continuité de m en γ_{ult} on obtient la relation suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$m\left(\gamma_{\text{ult}}\right)=\frac{\sigma_c}{\sigma_{\text{p2}}}\left[\left(m_e\frac{\sigma_{\text{p2}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{a_e}{a(\gamma_{\text{ult}})}}\right]$$

$$m_{\text{ult}}=\frac{\sigma_c}{\sigma_{\text{p2}}}\left(m_e\frac{\sigma_{\text{p2}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{a_e}{a_{\text{ult}}}}$$

$$m_{\text{ult}}=m_e^{a_e}\left(\frac{\sigma_{\text{p2}}}{\sigma_c}\right)^{a_e-1}$$

$$\sigma_{\text{p2}}=\sigma_c\left(\frac{m_{\text{ult}}}{m_e^{a_e}}\right)^{\frac{1}{a_e-1}} \qquad \text{éq 3.2.3.2-1}$$

3.2.4 Écoulement plastique

Le formalisme adopté est réécrit sur la base du modèle CJS [R7.01.13]. Quand les contraintes atteignent le bord du domaine de réversibilité, des déformations plastiques se développent. Pour les calculer, il existe une fonction potentielle pilotant l'évolution des déformations et définie par la relation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{\lambda}\boldsymbol{G}$ où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique et

$$\boldsymbol{G}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\,. \qquad \text{éq 3.2.4-1}$$

La fonction potentielle est obtenue à partir de la condition cinématique suivante :

$$\dot{\varepsilon}_{\nu}^{p}=-\beta'\frac{\boldsymbol{s}.\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}}}{s_{II}} \qquad \text{éq 3.2.4-2}$$

Le paramètre de dilatance β' se calcule à partir de l'angle de dilatance ψ (défini par [éq 3.2.3.1-1]) par la formule :

$$\beta'=\beta'\left(\psi\right)=-\frac{2\sqrt{6}\sin\left(\psi\right)}{3-\sin\left(\psi\right)} \qquad \textbf{éq 3.2.4-3}$$
$$\beta'=0 \text{ si } \gamma^p>\gamma_{\text{ult}}\left(1-10^{-3}\right)$$

Remarque :

β' est positif quand $\gamma^p=0$ et en compression, puis il devient négatif quand la plasticité se développe. Il est toujours négatif en traction

Il est alors possible de chercher à exprimer la condition cinématique [éq 3.2.4-2] à partir d'un tenseur $\mathbf{n}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{n}.\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}}=0 \qquad \text{éq 3.2.4-4}$$

Après décomposition de chaque terme en parties déviatoire et hydrostatique, on trouve l'expression :

$$\left(n_I s_{\text{ij}}+n_2\delta_{\text{ij}}\right).\left(\dot{e}_{\text{ij}}^{p}+\frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{\nu}^{p}\delta_{\text{ij}}\right)=n_1 s_{\text{ij}}\dot{e}_{\text{ij}}^{p}+n_2\dot{\varepsilon}_{\nu}^{p}=0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On en déduit la relation $\frac{n_1}{n_2}=\frac{\beta'}{s_{II}}$ qui, ajouté à la condition de normalisation du tenseur $\mathbf{n}$, conduit à l'expression :

$$\boldsymbol{n}=\frac{\beta,\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\boldsymbol{I}}{\sqrt{\beta'^2+3}} \qquad \text{éq 3.2.4-5}$$

La loi d'évolution de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ doit être telle que la condition cinématique soit satisfaite. Il est donc proposé de prendre la projection de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ sur $\mathbf{n}$ (normale de l'hypersurface de déformation), soit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{\lambda}\boldsymbol{G}=\dot{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right)$$

On en déduit également la condition portant sur la déformation volumique plastique :

$$\dot{\varepsilon}_v^p=\dot{\lambda}G \qquad \text{éq 3.2.4-6}$$

4 Calcul des dérivées

4.1 Dérivée du critère

4.1.1 Dérivée par rapport aux contraintes

4.1.1.1 Dérivée intermédiaire par rapport au déviateur

On part de : $\frac{\partial g}{\partial s_{ij}}=h(\theta)\frac{\partial s_{II}}{\partial s_{ij}}+s_{II}\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{ij}}$

où $\frac{\partial s_{II}}{\partial s_{ij}}$ et $\frac{\partial h(\theta)}{s_{ij}}$ sont respectivement donnés par :

$$\frac{s_{II}}{s_{ij}}=\frac{s_{ij}}{s_{II}}$$

$$\frac{\partial h(\theta)}{\partial s_{ij}}=\frac{1}{6h(\theta)_5}\frac{\partial}{\partial s_{ij}}\left(1+\gamma_{cjs}\sqrt{54}\frac{det(\underline{\underline{s}})}{s_{II}^3}\right)$$

$$=\frac{-\gamma_{cjs}\cos(3\theta)}{2h(\theta)^5 s_{II}^2}s_{ij}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{6h(\theta)^5 s_{II}^3}\left(\frac{\partial det(\underline{\underline{s}})}{\partial s_{ij}}\right)$$

Finalement :

$$\frac{\partial g}{\partial s_{ij}}=\frac{1}{h(\theta)^5}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\frac{s_{ij}}{s_{II}}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{6s_{II}^2}\left(\frac{\partial det(\underline{\underline{s}})}{\partial s_{ij}}\right)\right]$$

Et par conséquent :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial g}{\partial s_{ij}}=\frac{1}{h(\theta)^5}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{6s_{II}^2}\left(\frac{\partial det(\underline{\underline{s}})}{\partial s_{ij}}\right)\right] \quad \text{éq 4.1.1.1-1}$$

4.1.1.2 Dérivée intermédiaire par rapport aux contraintes

On pose par définition : $Q_{ij}=dev\left(\frac{\partial g}{\partial s_{ij}}\right)$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}=\frac{\partial g}{\partial s_{kl}}\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}=\left[dev\left(\frac{\partial g}{\partial s_{kl}}\right)+\frac{1}{3}\frac{\partial g}{\partial s_{mm}}\delta_{kl}\right]\left[\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}=Q_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}Q_{kl}\delta_{kl}+\frac{1}{3}\frac{\partial g}{\partial q_{mm}}\left[\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{kl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{kl}\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}=Q_{ij}$$

Il suffit alors de prendre la partie déviatorique de $\frac{\partial g}{\partial s_{ij}}$ pour obtenir :

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}=Q_{ij}=dev\left(\frac{\partial g}{\partial s_{ij}}\right)=\frac{1}{h(\theta)^5}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\frac{s_{ij}}{s_{II}}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{6s_{II}^2}dev\left(\frac{\partial det(\underline{\underline{s}})}{\partial s_{ij}}\right)\right]$$

Et par conséquent :

$$\boldsymbol{Q}=\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{h(\theta)^5}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{6s_{II}^2}dev\left(\frac{\partial det(\underline{\underline{s}})}{\partial s}\right)\right] \quad \text{éq 4.1.1.2-1}$$

4.1.1.3 Expression finale de la dérivée du critère par rapport aux contraintes

La dérivée du critère par rapport aux contraintes est alors :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}=\frac{1}{a(\gamma^p)}\frac{1}{\sigma_c h_c^0}^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}(g)\,r^{\frac{1-a(\gamma^p)}{a(\gamma^p)}}\boldsymbol{Q}-\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{éq 4.1.1.3-1}$$

avec

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=-\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{\sigma_c}\left(\frac{1}{\sqrt{6}h_c^0}\boldsymbol{Q}+\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\right) \quad \text{éq 4.1.1.3-2}$$

4.1.2 Dérivée par rapport à la variable d'écrouissage

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma^p}=-\left(\frac{1}{a(\gamma^p)}\right)^2\left(\frac{g(\boldsymbol{s})}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\log\left(\frac{g(\boldsymbol{s})}{\sigma_c h_c^0}\right).\frac{\partial a}{\partial \gamma^p}-\frac{\partial u}{\partial \gamma^p} \quad \text{éq 4.1.2-1}$$

avec

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma^p}=-\frac{1}{\sqrt{6}\sigma_c}\frac{\partial(km)}{\partial \gamma^p}(\gamma^p)\frac{g}{h_c^0}-\frac{1}{3\sigma_c}\frac{\partial(km)}{\partial \gamma^p}(\gamma^p)I_1+\frac{\partial(ks)}{\partial \gamma^p}(\gamma^p) \quad \text{éq 4.1.2-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.2 Dérivée totale du critère par rapport au multiplicateur plastique

Considérons la fonction :

$$f^{i}(\Delta\lambda)=f\left(\boldsymbol{s}^{e}-2\mu\Delta\lambda\tilde{\boldsymbol{G}},\boldsymbol{I}_{1}^{e}-3K\Delta\lambda G,\gamma^{p}+\Delta\lambda\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{\mathrm{II}}\right) \quad \text{éq 4.2-1}$$

Où $\mathbf{G}$ est un tenseur fixe indépendant de . $\Delta\lambda$ C'est de cette fonction dont nous cherchons le zéro pour trouver l'état de contrainte :

$$\frac{\partial f^{*}}{\partial\Delta\lambda}=-\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}.\left(2\mu\tilde{\boldsymbol{G}}+KG\boldsymbol{I}\right)+\frac{\partial f}{\partial\gamma^{p}}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{\mathrm{II}} \quad \text{éq 4.2-2}$$

4.3 Dérivées des paramètres par rapport à la variable d'écrouissage

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial\gamma^{p}}=-\dfrac{1}{\gamma_{e}} & si\ \gamma^{p}<\gamma_{e}\\ \dfrac{\partial s}{\partial\gamma^{p}}=0 & si\ \gamma^{p}\geq\gamma_{e}\end{cases} \quad \text{éq 4.3-1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m}{\partial s}=-\dfrac{\sigma_{c}}{\sigma_{\mathrm{p1}}} & si\ \gamma^{p}<\gamma_{e}\\ \dfrac{\partial m}{\partial s}=0 & si\ \gamma^{p}\geq\gamma_{e}\end{cases} \quad \text{éq 4.3-2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m}{\partial a}=-\dfrac{\sigma_{c}}{\sigma_{\mathrm{p1}}}\log\left(m_{\mathrm{pic}}\dfrac{\sigma_{\mathrm{p1}}}{\sigma_{c}}+1\right)\dfrac{a_{\mathrm{pic}}}{a^{2}}\left(m_{\mathrm{pic}}\dfrac{\sigma_{\mathrm{p1}}}{\sigma_{c}}+1\right)^{\frac{a_{\mathrm{pic}}}{a}} & \mathrm{si}\ \gamma^{p}<\gamma_{e}\\ \dfrac{\partial m}{\partial a}=-\dfrac{\sigma_{c}}{\sigma_{\mathrm{p2}}}\log\left(m_{e}\dfrac{\sigma_{\mathrm{p2}}}{\sigma_{c}}\right)\dfrac{a_{e}}{a^{2}}\left(m_{e}\dfrac{\sigma_{\mathrm{p2}}}{\sigma_{c}}\right)^{\frac{a_{\mathrm{pic}}}{a}} & \mathrm{si}\ \gamma^{p}<\gamma_{e}\end{cases} \quad \text{éq 4.3-3}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma^{p}}=\frac{\left(\gamma_{\mathrm{ult}}-\gamma_{e}\right)}{\left(\gamma_{e}\right)^{\eta}}\frac{a_{e}-a_{\mathrm{pic}}}{1-a_{e}}\left(\frac{\eta}{\gamma_{\mathrm{ult}}-\gamma^{p}}\left(\gamma^{p}\right)^{\eta-1}+\left(\gamma^{p}\right)^{\eta}\frac{1}{\left(\gamma_{\mathrm{ult}}-\gamma^{p}\right)^{2}}\right) \quad \text{éq 4.3-4}$$

$$\frac{\partial a}{\partial\boldsymbol{\Omega}}=\frac{1-a_{\mathrm{pic}}}{\left(1+\Omega\right)^{2}} \quad \text{éq 4.3-5}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m}{\partial\gamma^{p}}=\dfrac{\partial m}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial\gamma^{p}}+\dfrac{\partial m}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial\gamma^{p}} & \mathrm{si}\ \gamma^{p}<\gamma_{e}\\ \dfrac{\partial m}{\partial\gamma^{p}}=\dfrac{\partial m}{\partial a}\dfrac{\partial a}{\partial\gamma^{p}} & \mathrm{si}\ \gamma_{\mathrm{ult}}\left(1-10^{-3}\right)>\gamma^{p}\geq\gamma_{e}\\ \dfrac{\partial m}{\partial\gamma^{p}}=0 & \mathrm{si}\ \gamma_{\mathrm{ult}}\left(1-10^{-3}\right)<\gamma^{p}\end{cases} \quad \text{éq 4.3-6}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial k}{\partial \gamma^p} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2a}} \log\left(\frac{2}{3}\right) \frac{1}{2a^2} \frac{\partial a}{\partial \gamma^p} \quad \gamma_{ult}\left(1-10^{-3}\right) > \gamma^p$$

$$\frac{\partial k}{\partial \gamma^p} = 0 \quad \text{sinon}$$

éq 4.3-7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Opérateur tangent en vitesse

La condition

$$\dot{f}=0 \qquad \text{éq 5-1}$$

s'écrit :

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial \gamma^{p}}\dot{\gamma}^{p}=0$$

A partir de l'expression de la déformation déviatorique plastique cumulée et $\gamma^{p}=\sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}^{p}e_{ij}^{p}}$ de la relation $\dot{\boldsymbol{e}}^{p}=\dot{\lambda}\,\tilde{\boldsymbol{G}}$, on trouve alors la condition :

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial \gamma^{p}}\sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\lambda}\,\tilde{G}_{II}=0$$

Ce qui nous donne pour le multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial f}{\partial \gamma^{p}}\tilde{G}_{II}}$$

En considérant alors la relation contraintes/déformations :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}=\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}G_{kl}$$

et en la reportant dans l'expression de $\dot{\lambda}$ on peut écrire :

$$\dot{\lambda}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}G_{kl}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial f}{\partial \gamma^{p}}\tilde{G}_{II}}$$

Soit :

$$\dot{\lambda}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial f}{\partial \gamma^{p}}\tilde{G}_{II}-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}G_{kl}} \qquad \text{éq 5-2}$$

En reportant ce résultat dans l'expression de $\dot{\sigma}_{ij}$ on trouve :

$$\dot{\sigma}_{ab}=D_{abcd}\left(\dot{\varepsilon}_{cd}+\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial f}{\partial \gamma^{p}}\tilde{G}_{II}-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}G_{kl}}G_{cd}\right) \qquad \text{éq 5-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Traitement numérique adapté aux modèles non réguliers

La loi d'évolution du mécanisme plastique, définie au chapitre [§3], doit satisfaire la condition cinématique [éq 3.2.4-2]. La projection proposée sur la normale de l'hypersurface de déformation peut conduire à une « non-solution » qui se traduit par un échec du traitement numérique (voir l'interprétation graphique du chapitre [§6.1.3.3]). On propose dans ce chapitre de définir des règles de projection permettant de gérer les modèles dits « non-réguliers » en leur imposant une projection dite « au sommet du cône ».

De plus, comme pour d'autres relations de comportement, on ajoute la possibilité de découper localement (aux points de Gauss) le pas de temps pour faciliter l'intégration numérique.

6.1 La projection au sommet du cône

6.1.1 Définition de l'angle de projection

On se place dans ce chapitre dans le cadre d'accroissement fini. Les équations traduisant le comportement élastique s'écrivent :

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}^{-}+2\mu\left(\Delta\boldsymbol{e}-\Delta\boldsymbol{r}^{p}\right)=\boldsymbol{s}^{e}-2\mu\,\Delta\boldsymbol{e}^{p} \qquad \text{éq 6.1.1-1}$$

$$I_1=I_1^{-}+3\mathrm{K}\left(\Delta\varepsilon_{\nu}-\Delta\varepsilon_{\nu}^{p}\right)=I_1^{e}-\Delta\varepsilon_{\nu}^{p} \qquad \text{éq 6.1.1-2}$$

On peut également exprimer la condition cinématique à partir du tenseur $\mathbf{n}$ (cf paragraphe [§3.2.4]) :

$$\boldsymbol{n}.\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}=0 \qquad \text{éq 6.1.1-3}$$

En reportant les deux équations traduisant le comportement élastique dans l'expression précédente on trouve :

$$\Delta\boldsymbol{e}^{p}=\frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{s}^{e}-\boldsymbol{s}\right) \qquad \text{éq 6.1.1-4}$$

$$\Delta\varepsilon_{\nu}^{p}=\frac{1}{3\mathrm{K}}\left(I_1^{e}-I_1\right) \qquad \text{éq 6.1.1-5}$$

On exprime alors la condition cinématique par la relation suivante :

$$\boldsymbol{n}.\left(\frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{s}^{e}-\boldsymbol{s}\right)+\frac{1}{3\mathrm{K}}\left(\frac{1}{3\mathrm{K}}\left(I_1^{e}-I_1\right)\boldsymbol{I}\right)\right)=0 \text{ avec } \boldsymbol{n}=\frac{\beta'\frac{\boldsymbol{s}}{s_{\mathrm{II}}}+\boldsymbol{I}}{\sqrt{\beta'^{2}+3}}$$

Soit en combinant les deux relations précédentes où $\mathbf{n}$ désigne la normale de l'hypersurface de déformation :

$$\frac{1}{2\mu}\frac{\beta'\frac{\boldsymbol{s}}{s_{\mathrm{II}}}+\boldsymbol{I}}{\sqrt{\beta'^{2}+3}}\left(\boldsymbol{s}^{e}-\boldsymbol{s}\right)+\frac{1}{9\mathrm{K}}\left(I_1^{e}-I_1\right).\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{n}\right)=0$$

$$\frac{1}{2\mu}\beta'\frac{\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{s}^{e}-\boldsymbol{s}\right)}{s_{\mathrm{II}}}+\frac{1}{3\mathrm{K}}\left(I_1^{e}-I_1\right)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette dernière équation définit le point $(I_1, \mathbf{s})$ comme une projection du point $(I_1^e, \mathbf{s}^e)$ sur le critère. Le point (I_1, s_{II}) sera la projection oblique du point (I_1^e, s_{II}^e), projection dont la direction varie avec θ. On peut en donner la représentation graphique du chapitre [§6.1.3.3].

La relation précédente peut alors être réécrite comme suit :

$$I_1^e - I_1 = -\beta' \frac{3K}{2\mu} \frac{\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)}{s_{II}} \qquad \text{éq 6.1.1-6}$$

On définit alors l'angle de projection φ_s par la relation :

$$\cos\varphi_s = \frac{\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)}{s_{II}\sqrt{\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)}} \qquad \text{éq 6.1.1-7}$$

En reportant la définition de l'angle φ_s dans la relation de projection on trouve la relation :

$$\frac{I_1^e - I_1}{\sqrt{\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)}} = -\beta' \frac{3K}{2\mu} \cos\varphi_s \qquad \text{éq 6.1.1-8}$$

6.1.2 Existence de la projection

Le principe de ce paragraphe est de discuter sur la question de l'existence de l'angle φ_s tel que la projection du point $\left(I_1^e, \boldsymbol{s}^e\right)$ appartienne toujours à la surface de charge. Cette problématique apparaît essentielle pour des projections autour du sommet de la surface de charge, autrement dit quand $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{0}$. On a par définition la relation :

$$\cos\varphi_s = \frac{\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)}{s_{II}\sqrt{\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)}} = \frac{\boldsymbol{s}.\left(\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right)}{s_{II}\left\|\boldsymbol{s}^e - \boldsymbol{s}\right\|} \qquad \text{éq 6.1.2-1}$$

En combinant cette équation avec l'expression : $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^e - 2\mu\,\Delta\boldsymbol{e}^p = \boldsymbol{s}^e - 2\mu\,\Delta\lambda\,\tilde{\boldsymbol{G}}$

On obtient :

$$\cos\varphi_s = \frac{\boldsymbol{s}.\tilde{\boldsymbol{G}}}{s_{II}\tilde{G}_{II}} \qquad \text{éq 6.1.2-2}$$

On cherche une estimation de $\cos\varphi_s$.

Étape 1 : estimation de $\frac{\mathbf{s}.\tilde{\mathbf{G}}}{s_{II}}$

On se place dans ce paragraphe sous les conditions : $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{0}$ et $f = 0$.

Par définition de $\tilde{\mathbf{G}}$ et de $\mathbf{G}$ on a : $\tilde{\boldsymbol{G}}.\boldsymbol{s} = \left(\boldsymbol{G} - \frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{G})}{3}\boldsymbol{I}\right).\boldsymbol{s} = \boldsymbol{G}.\boldsymbol{s} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right).\boldsymbol{s}$

Pour des soucis de simplification de calcul on ramène la résolution de f à la résolution de l'équation :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f=\left(\frac{g(\boldsymbol{s})}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}-u(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p)=0\Rightarrow f_2=\left(\frac{g(\boldsymbol{s})}{\sigma_c h_c^0}\right)-u(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p)^{a(\gamma^p)}=0 \qquad \text{éq 6.1.2.3}$$

Par dérivation de cette nouvelle fonction on trouve la relation :

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\left(\frac{1}{\sigma_c h_c^0}\right)\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-a(\gamma^p)u(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p)^{a(\gamma^p)-1}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\left(\frac{1}{\sigma_c h_c^0}\right)\boldsymbol{Q}-a(\gamma^p)u(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p)^{a(\gamma^p)-1}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

avec : $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=-\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{\sigma_c}\left(\frac{1}{\sqrt{6}h_c^0}\boldsymbol{Q}+\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\right)$

Qui donne après simplification :

$$\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=A\boldsymbol{Q}+B\boldsymbol{I} \qquad \text{éq 6.1.2.4}$$

Où :

$$\begin{cases} A=\dfrac{1}{\sigma_c h_c^0}\left(1+\dfrac{a(\gamma^p)m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{\sqrt{6}}u(\sigma,\gamma^p)^{a(\gamma^p)-1}\right) \\ B=\dfrac{a(\gamma^p)m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{3\sigma_c h_c^0}u(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p)^{a(\gamma^p)-1} \end{cases} \qquad \text{éq 6.1.2.5}$$

On a ainsi : $\frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.\boldsymbol{n}=(A\boldsymbol{Q}+b\boldsymbol{I})\frac{\beta'\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\boldsymbol{I}}{\sqrt{\beta'^2+3}}=\frac{\beta'}{\sqrt{\beta'^2+3}}\frac{A}{s_{II}}\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{s}+\frac{3B}{\sqrt{\beta'^2+3}}$

Et par voie de conséquence :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{G}}.\boldsymbol{s}&=\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right).\boldsymbol{s}\\ &=\left(A\boldsymbol{Q}+B\boldsymbol{I}-\left(\frac{\beta'}{\sqrt{\beta'^2+3}}\frac{A}{s_{II}}\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{s}+\frac{3B}{\sqrt{\beta'^2+3}}\right)\frac{\beta'\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\boldsymbol{I}}{\sqrt{\beta'^2+3}}\right)\\ &=\frac{3A}{\beta'^2+3}\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{s}-\frac{3B\beta'}{\beta'^2+3}s_{II}\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que :

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{G}}.\boldsymbol{s}}{s_{II}}=\frac{3A}{\beta'^2+3}\frac{\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{s}}{s_{II}}-\frac{3B\beta'}{\beta'^2+3} \qquad \text{éq 6.1.2.6}$$

Par définition de $\mathbf{Q}$ on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{s}=\mathrm{dev}\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{s}}\right).\boldsymbol{s}=\frac{1}{h(\theta)^5}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{6\,s_{II}^2}\mathrm{dev}()\right].\boldsymbol{s}$$

$$=\frac{1}{h(\theta)^5}\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)s_{II}$$

$$=h(\theta)\,s_{II}$$

On exprime finalement :

$$\frac{\tilde{\boldsymbol{G}}.\boldsymbol{s}}{s_{II}}=\frac{3A}{\beta'^2+3}h(\theta)-\frac{3\beta'}{\beta'^2+3}$$ éq 6.1.2.7

Quand $\boldsymbol{s}\to\boldsymbol{0}$ alors $u(\boldsymbol{\sigma},\gamma^p)\to 0$ et $A\to\frac{1}{\sigma_c h_c^0}, B\to 0$

Et donc :

Quand $\boldsymbol{s}\to\boldsymbol{0}$ alors $\frac{\tilde{\boldsymbol{G}}.\boldsymbol{s}}{s_{II}}\underset{\boldsymbol{s}\to\boldsymbol{0}}{\to}\frac{3h(\theta)}{\sigma_c h_c^0(\beta'^2+3)}$ éq 6.1.2.8

Étape 2 : estimation de $\widetilde{G}_{II}$

On se place dans ce paragraphe sous les conditions : $\boldsymbol{s}\to\boldsymbol{0}, A\to\frac{1}{\sigma_c h_c^0}, b\to 0$

$$\tilde{\boldsymbol{G}}=\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}-\left(\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sigma_c h_c^0}\boldsymbol{Q}+B\,\boldsymbol{I}-\left(\frac{\beta'}{\sqrt{\beta'^2+3}}\frac{1}{\sigma_c h_c^0 s_{II}}\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{s}+\frac{3B}{\sqrt{\beta'^2+3}}\right)\frac{\beta'\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\boldsymbol{I}}{\sqrt{\beta'^2+3}}\right)$$

$$\frac{1}{\sigma_c h_c^0}\boldsymbol{Q}-\frac{\beta'^2 h(\theta)}{(\beta'^2+3)\sigma_c h_c^0 s_{II}}\boldsymbol{s}$$

$$\tilde{G}_{II}^2\tilde{\boldsymbol{G}}.\tilde{\boldsymbol{G}}=\frac{Q_{II}^2}{(\sigma_c h_c^0)^2}+\frac{\beta'^4 h^2(\theta)s_{II}^2}{(\beta'^2+3)^2(\sigma_c h_c^0)_2 s_{II}^2}-2\frac{\beta'^2 h^2(\theta)}{(\beta'^2+3)(\sigma_c h_c^0)^2}$$

$$\frac{1}{\sigma_c h_c^{02}}\left(Q_{II}^2-\frac{\beta'^2(\beta'^2+6)h^2(\theta)}{(\beta'^2+3)^2}\right)$$

On démontre [Annexe 2] que :

$$Q_{II}^2=\frac{1}{h(\theta)^{10}}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)_2+\frac{\gamma_{cjs}^2}{4}+\gamma_{cjs}\cos(3\theta)\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\right]$$ éq 6.1.2.9

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et donc comme $h(\theta)=\left(1+\cos(3\theta)\right)^{1/6}$:

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}^{2}=\frac{1}{\sigma_c h_c^{22}}\left(\frac{1}{h(\theta)^{10}}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{h(\theta)^{6}}{2}\right)^{2}+\frac{\gamma_{\mathrm{cjs}}{}^{2}}{4}+\left(h(\theta)^{6}-1\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{h(\theta)^{6}}{2}\right)\right]-\frac{\beta'^{2}\left(\beta'^{2}+6\right)h^{2}(\theta)}{\left(\beta'^{2}+3\right)^{2}}\right)$$

$$\tilde{G}_{2}^{\mathrm{II}}=\frac{1}{\left(\sigma_c h_c^{0}\right)^{2}}\left(\frac{3\mathrm{h}(\theta)^{2}}{4}+\frac{1}{2h(\theta)^{4}}+\frac{\gamma_{\mathrm{cjs}}^{2}-1}{4\mathrm{h}(\theta)^{10}}-\frac{\beta'^{2}\left(\beta'^{2}+6\right)h^{2}(\theta)}{\beta'^{2}+3^{2}}\right)$$

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}^{2}=\left(\frac{h(\theta)}{\sigma_c h_c^{0}}\right)^{2}\left[\frac{1}{2\mathrm{h}(\theta)^{6}}+\frac{\gamma_{\mathrm{cjs}}^{2}-1}{4h(\theta)^{12}}+\left(\frac{3}{\beta'^{2}+3}\right)^{2}-\frac{1}{4}\right]$$

Et par conséquent :

$$\tilde{G}_{\mathrm{II}}=\left(\frac{h(\theta)}{\sigma_c h_c^{0}}\right)\sqrt{\left(\frac{3}{\beta'^{2}+3}\right)^{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2\mathrm{h}(\theta)^{6}}+\frac{\gamma_{\mathrm{cjs}}^{2}-1}{4\mathrm{h}(\theta)^{12}}} \qquad \text{éq 6.1.2.10}$$

Étape 3 : estimation de $\cos(\varphi_s)$

On déduit des deux paragraphes précédent l'expression de l'angle de projection suivante :
Quand $s\to 0$ alors :

$$\cos\varphi_s \mathit{tward}\ \frac{3}{\left(\beta'^{2}+3\right)\sqrt{\frac{3}{\beta'^{2}+3}^{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2\left(1+\gamma_{\mathrm{cjs}}\cos(3\theta)\right)}+\frac{\gamma_{\mathrm{cjs}}^{2}-1}{4\left(1+\gamma_{\mathrm{cjs}}\cos(3\theta)\right)^{2}}}} \qquad \text{éq 6.1.2.11}$$

On remarque que φ_s dépend de l'angle de Lode θ , et que par voie de conséquence la limite de l'angle de projection quand $s\to 0$ n'existe pas. Cependant un encadrement de $\cos\varphi_s$ nous permet de déterminer une zone de projection au sommet à priori (démonstration de l'encadrement en [Annexe 3]) :

avec :

$$\cos\varphi_s^{\min}\le\cos\varphi_s\le\cos\varphi_s^{\max}$$

$$\begin{cases}\cos\varphi_s^{\min}=\dfrac{3}{\left(\beta'^{2}+3\right)\sqrt{\left(\dfrac{3}{\beta'^{2}+3}\right)^{2}+\dfrac{\gamma_{\mathrm{cjs}}{}^{2}}{4\left(1-\gamma_{\mathrm{cjs}}^{2}\right)}}}\\ \cos\varphi_s^{\max}=1\end{cases} \qquad \textbf{éq 6.1.2.12}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.1.3 Règles de projection

On appelle I_1^0 l'intersection du domaine de réversibilité avec l'axe hydrostatique. On obtient :

$$I_1^0=\frac{3\sigma_c.s\left(\gamma_p\right)}{m\left(\gamma_p\right)} \qquad \text{éq 6.1.3-1}$$

En reportant I_1^0 et l'encadrement de $\cos\varphi_s$, quand $\boldsymbol{s}\to\mathbf{0}$, dans la relation $\frac{I_1^e-I_1}{\sqrt{\left(\boldsymbol{s}^e-\boldsymbol{s}\right)\left(\boldsymbol{s}^e-\boldsymbol{s}\right)}}=-\beta'\frac{3K}{2\mu}\cos\varphi_s$, on en déduit les règles de projection suivantes en fonction du signe du paramètre de dilatance β' , et pour des valeurs de I_1^e et de s_{II}^e données.

6.1.3.1 Cas où le paramètre de dilatance est négatif

Si $\frac{I_1^e-I_1^0}{s_{II}^e}<-\beta'\frac{3K}{2\mu}\cos\varphi_s^{\min}$ alors la projection sera régulière ;

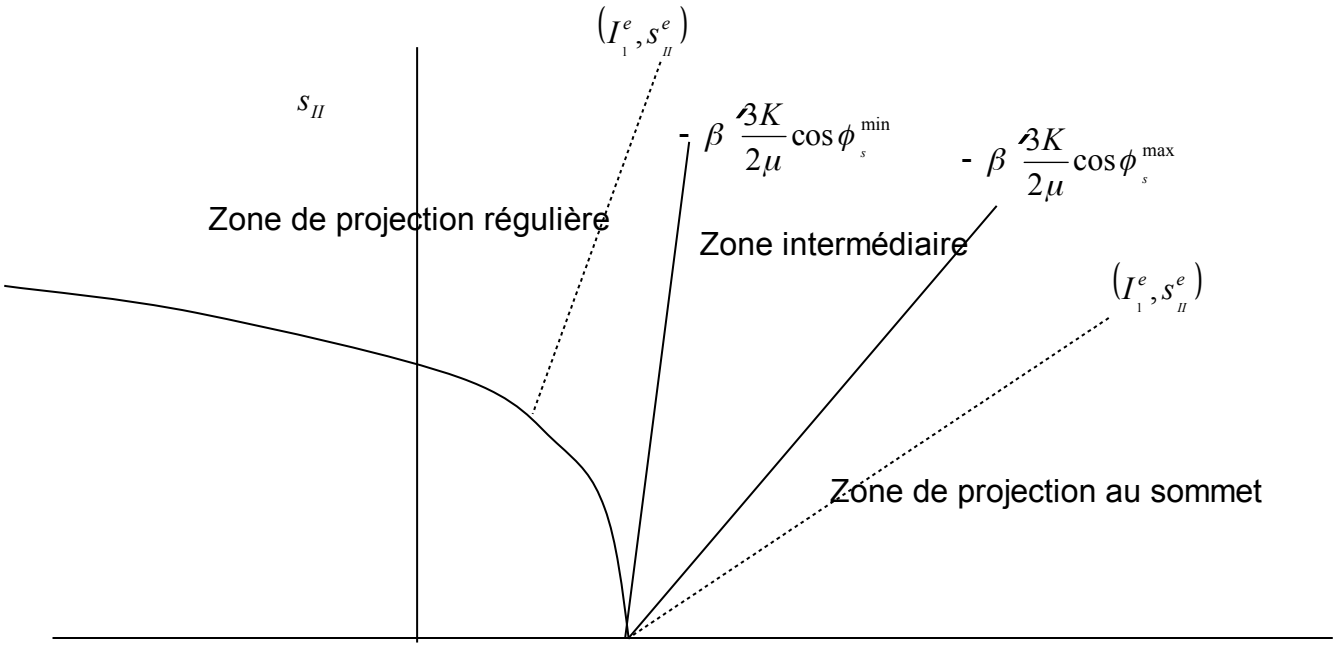
Si $\frac{I_1^e-I_1^0}{s_{II}^e}>-\beta'\frac{3K}{2\mu}\cos\varphi_s^{\max}$ alors la projection sera au sommet.

6.1.3.2 Cas où le paramètre de dilatance est positif

Si $\frac{I_1^e-I_1^0}{s_{II}^e}<-\beta'\frac{3K}{2\mu}\cos\varphi_s^{\max}$ alors la projection sera régulière ;

Si $\frac{I_1^e-I_1^0}{s_{II}^e}>-\beta'\frac{3K}{2\mu}\cos\varphi_s^{\min}$ alors la projection sera au sommet.

6.1.3.3 Interprétation graphique



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.1.3.4 Équations d'écoulement

Dans la zone intermédiaire on résout les équations correspondant à une projection régulière. Si cette résolution ne donne pas de solution on résout alors les équations d'écoulement de la projection au sommet.

Dans le cas de la projection au sommet on a les relations :

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0} \qquad \text{éq 6.1.3.4-1}$$

$$I_1^0=\frac{3\sigma_c.s\left(\gamma^p\right)}{m\left(\gamma^p\right)} \qquad \text{éq 6.1.3.4-2}$$

$$\Delta\gamma^p=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{2}{3}}s_{\mathrm{II}}^e \qquad \text{éq 6.1.3.4-3}$$

6.2 Redécoupage local du pas de temps

Comme pour d'autres relations de comportement (le modèle CJS par exemple) on a ajouté la possibilité pour le modèle de LAIGLE de redécouper localement (aux points de Gauss) le pas de temps afin de faciliter l'intégration numérique. Cette possibilité est gérée par l'opérande ITER_INTE_PAS du mot-clé CONVERGENCE de l'opérateur STAT_NON_LINE. Si la valeur de ITER_INTE_PAS (itepas) vaut 0,1 ou –1 il n'y a aucun redécoupage (remarque : 0 est la valeur par défaut). Si itepas est positif le redécoupage est systématique, s'il est négatif le redécoupage est pris en compte uniquement en cas de non convergence numérique.

Le redécoupage consiste à réaliser l'intégration du mécanisme plastique avec un incrément de déformation dont les composantes correspondent aux composantes de l'incrément de déformation initial divisées par la valeur absolue de itepas (cf doc STAT_NON_LINE [U4.51.03]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Les variables internes

Pour la mise en œuvre informatique nous avons retenu les 4 variables internes suivantes :

7.1 V1 : la déformation déviatoire plastique cumulée

La variable d'écrouissage γ^p est proportionnelle au deuxième invariant du tenseur des déformations déviatoires.

$$\gamma^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}$$

avec $e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{\mathrm{tr}\left(\varepsilon_{ij}^p\right)}{3} \delta_{ij}$

7.2 V2 : la déformation volumique plastique cumulée

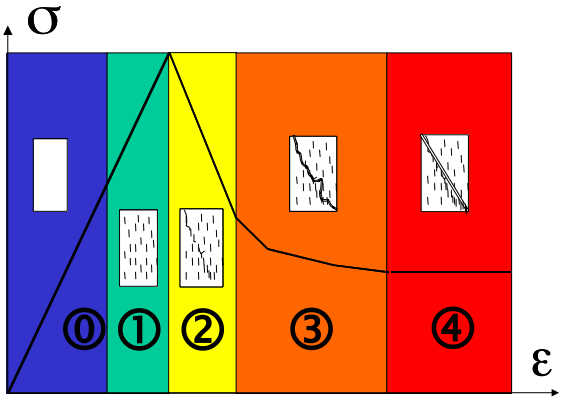
La déformation volumique plastique est définie par la relation présentée au paragraphe [§3.2.4] sur la loi d'évolution du mécanisme plastique : $\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} G$

7.3 V3 : les domaines de comportement de la roche

Cinq domaines de comportement, numérotés de 0 à 4 (cf. figure), sont identifiés pour permettre d'avoir une représentation relativement simple de l'état d'endommagement de la roche, depuis la roche intacte jusqu'à la roche à l'état résiduel. Ces domaines sont fonction de la déformation déviatoire plastique cumulée γ^p et de l'état de contrainte. Chaque incrément de numéro de domaine définit le passage dans un domaine d'endommagement supérieur.

- Si le déviateur est inférieur à 70% du déviateur de pic, alors le matériau est dans le domaine 0 ;
- Sinon :
  - Si $\gamma^p = 0$ alors le matériau est dans le domaine 1 ;
    1) Si $0 < \gamma^p < \gamma^e$ alors le matériau est dans le domaine 2 ;
  - Si $\gamma_e < \gamma^p < \gamma_{ult}$ alors le matériau est dans le domaine 3 ;
  - Si $\gamma^p > \gamma_{ult}$ alors le matériau est dans le domaine 4.

Domaine	Etat de la roche
0	Intacte
1	Endommagement pré-pic
2	Endommagement post-pic
3	Fissurée
4	Fracturée



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7.4 V4 : l'état de plastification

C'est un indicateur interne au *Code_Aster*. Il vaut 0 si le point de gauss est en charge élastique ou en décharge, et vaut 1 si le point de gauss est en charge plastique.

8 Présentation détaillée de l'algorithme

On retient une formulation implicite par rapport au critère et explicite par rapport à la direction d'écoulement : le critère devra être vérifié à la fin du pas, alors que la direction d'écoulement sera celle calculée au début du pas (et donc la valeur de la dilatance sera également celle calculée au début du pas de temps).

On se place en un point matériel, et on considère que sont donnés :

- Le tenseur d'accroissement des déformations $\Delta\varepsilon$ d'où l'on déduit Δe et ; $\Delta\varepsilon_v$
- Les contraintes au début du pas d $\boldsymbol{\sigma}^-$ 'où l'on déduit $\boldsymbol{s}^-$ et I_1^- ;
- Les valeurs des variables internes au début du pas de temps (seule la déformation plastique cumulée γ^{p^-} est nécessaire).

Il s'agit de calculer :

- Les contraintes en fin de pas de temps $\boldsymbol{\sigma}$;
- Les variables internes en fin du pas de temps (γ^p , ε_v^p , les domaines de comportement) ;
- Le comportement tangent en fin de pas : $\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$

8.1 Calcul de la solution élastique

$$\Delta\varepsilon^e=\Delta\varepsilon^- -\alpha\Delta T$$
$$\boldsymbol{s}^e=\boldsymbol{s}^- +2\mu\Delta\boldsymbol{e}$$
$$I_1^e=I_1^- +3K\Delta\varepsilon_v$$

8.2 Calcul du critère élastique

Calcul de $g^e=s_{II}^e h(\theta^e)$

Calcul de , $m^-=m(\gamma^{p^-})$ $s^-=s(\gamma^{p^-})$, $a^-=a(\gamma^{p^-})$ et $k^-=k(a^-)$

Calcul de $u^e=-\dfrac{m^-k^-}{\sqrt{6}\sigma_c}\dfrac{g^e}{h_c^0}-\dfrac{m^-k^-}{3\sigma_c}I_1^e+s^-.k^-$

Calcul de $f^e=\left(\dfrac{g^e}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a^-}}-u^e$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8.3 Algorithme

Si $f^e>0$

Calcul de :

$$I_1^{0-}=\frac{3\sigma_c.s^-}{m^-};\qquad g^-=g\left(\boldsymbol{s}^-\right)$$

$$\phi_0^-=\phi_0\left(m^-,s^-,a^-\right);\qquad C_0^-=C_0\left(m^-,s^-,a^-\right);\qquad \sigma_0^-=\sigma_{t0}\left(\phi_0^-,C_0^-\right)$$

$$\alpha'^-=\alpha'\left(I_1^-,g^-,\sigma_{t0}^-\right);\qquad \psi^-=\psi\left(\alpha'^-\right);\qquad \beta'^-=\beta'\left(\psi^-\right)$$

Calcul à priori de la projection au sommet

$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$; Calcul de $\gamma^p=\gamma^{p^-}+\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{2}{3}}s_{\mathrm{II}}^e=\gamma^{p^{\text{sommet}}}$ et de $I_1=\frac{3\sigma_c.s\left(\gamma^p\right)}{m\left(\gamma^p\right)}=I_1^{\text{sommet}}$.

Si $\begin{cases}\left(I_1^e-I_1^{\text{sommet}}\right)<-\frac{3K}{2\mu}\beta' s_n^e\cos\varphi_s^{\max};\ \text{si}\ \beta'^-<0\\ \left(I_1^e-I_1^{\text{sommet}}\right)<-\frac{3K}{2\mu}\beta' s_n^e\cos\varphi_s^{\min};\ \text{si}\ \beta'^-\geq 0\end{cases}$

La projection au sommet n'est pas retenue à priori. On calcule la solution régulière.

$$\boldsymbol{Q}^-=\begin{cases}\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{\sigma}^-\right)\text{si}\ \boldsymbol{\sigma}^-\neq 0\\ \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}}\right)\text{si}\ \boldsymbol{\sigma}^-=0\end{cases}\quad \boldsymbol{n}^f=\begin{cases}\boldsymbol{n}\left(\beta'^-,\boldsymbol{\sigma}^-\right)\text{si}\ \boldsymbol{\sigma}^-\neq 0\\ \boldsymbol{n}\left(\beta'^{\mathbf{e}},\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}}\right)\text{si}\ \boldsymbol{\sigma}^-=0\end{cases}\quad \boldsymbol{G}^f=\begin{cases}\boldsymbol{G}\left(\beta'^-,\boldsymbol{\sigma}^-\right)\text{si}\ \boldsymbol{\sigma}^-\neq 0\\ \boldsymbol{G}\left(\beta'^{\mathbf{e}},\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{e}}\right)\text{si}\ \boldsymbol{\sigma}^-=0\end{cases}$$

Si $\gamma^{p^-}=0$

Initialisation $\Delta\lambda^0=0;\gamma^{p^0}=\gamma^{p^-};\boldsymbol{s}^{\mathbf{0}}=\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{e}};I_1^0=I_1^e;f^0=f^e$

Et $\begin{cases}\Delta\gamma^{p^1}=\frac{1}{10}\max\left|\Delta\varepsilon_{ij}^e\right|\\ \delta\lambda^{p^1}=\frac{\Delta\gamma^{p^1}}{\tilde{G}_{\mathrm{II}}^{f_b}}\sqrt{\frac{2}{3}}\end{cases}$

Sinon

Calcul de l'accroissement du multiplicateur plastique $\Delta\lambda$ par Newton :

Initialisation $\Delta\lambda^0=0;\gamma^{p^0}=\gamma^{p^-};\boldsymbol{s}^{\mathbf{0}}=\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{e}};I_1^0=I_1^e;f^0=f^e$

$$\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial u^-}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=-\frac{m^-}{\sqrt{6}\sigma_c}\frac{k^-}{h_c^0}\boldsymbol{Q}^--k^-\frac{m^-}{3\sigma_c}\boldsymbol{I}$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial\gamma^p}=-\frac{1}{\sqrt{6}\sigma_c}\frac{\partial\left(km\right)}{\gamma^p}\left(\gamma^{p^-}\right)\frac{g^e}{h_c^0}-\frac{1}{3\sigma_c}\frac{\partial\left(km\right)}{\partial\gamma^p}\left(\gamma^{p^-}\right)I_1^e+\frac{\partial\left(ks\right)}{\partial\gamma^p}\left(\gamma^{p^-}\right)$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{a^-}\left(\frac{1}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a^-}}\left(g^e\right)\frac{1-a^-}{a^-}\boldsymbol{Q}^--\frac{\partial u^0}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\neq\frac{\partial f^-}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial\gamma^p}=-\left(\frac{1}{a^-}\right)^2\left(\frac{g^e}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a^-}}\log\left(\frac{g^e}{\sigma_c h_c^0}\right)\frac{\partial a}{\partial\gamma^p}\left(\gamma^{p^-}\right)-\frac{\partial u^0}{\partial\gamma^p}\neq\frac{\partial f^-}{\partial\gamma^p}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\partial f^{0^*}}{\partial \Delta\lambda} = -\frac{\partial f^0}{\partial \boldsymbol{\sigma}} . \left(2\mu \tilde{\boldsymbol{G}}^f + KG^f \boldsymbol{I}\right) + \frac{\partial f^0}{\partial \gamma^p} \sqrt{\frac{2}{3}} \tilde{G}^f_{\text{II}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Boucle itérations n

$$\frac{\partial f^n}{\partial \Delta\lambda}\delta\lambda^{n+1}=-f^n$$

$$\Delta\lambda^{n+1}=\Delta\lambda^n+\delta\lambda^{n+1}$$

$$\Delta\gamma^{p^{n+1}}=\Delta\gamma^{n+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{\mathrm{II}}^f;\quad \Delta\varepsilon_v^p=\Delta\lambda^{n+1}G^f$$

$$\boldsymbol{s^{n+1}}=\boldsymbol{s^e}-2\mu\Delta\lambda^{p^{n+1}}\tilde{\boldsymbol{G}}^f\quad ;\quad I_1^{n+1}=I_1^e-3K\Delta\lambda^{p^{n+1}}G^f$$

Si $\Delta\gamma^{p^{n+1}}<0$ Non convergence

Calcul $\boldsymbol{Q^{n+1}}$

$$g^{n+1}=g\left(\boldsymbol{s^{n+1}}\right);\ m^{n+1}=m\left(\gamma^{p^{n+1}}\right);\ s^{n+1}=s\left(\gamma^{p^{n+1}}\right);\ a^{n+1}=a\left(\gamma^{p^{n+1}}\right);\ k^{n+1}=k\left(a^{n+1}\right)$$

$$u_{n+1}=-\frac{m^{n+1}k^{n+1}}{\sqrt{6}\sigma_c}\frac{g^{n+1}}{h_c^0}-\frac{m^{n+1}k^{n+1}}{3\sigma_c}I_1^{n+1}+s^{n+1}.k^{n+1}$$

$$f^{n+1}=\left(\frac{g^{n+1}}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a^{n+1}}}-u^{n+1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma}^{n+1}=-\frac{m}{\sqrt{6}\sigma_c}\frac{k^{n+1}}{h_c^0}\boldsymbol{Q^{n+1}}-k^{n+1}\frac{m^{n+1}}{3\sigma_c}\boldsymbol{I}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\gamma^p}^{n+1}=-\frac{1}{\sqrt{6}\sigma_c}\frac{\partial(km)}{\partial\gamma^p}\left(\gamma^{p^{n+1}}\right)\frac{g^{n+1}}{h_c^0}-\frac{1}{3\sigma_c}\frac{\partial(km)}{\partial\gamma^p}\left(\gamma^{p^{n+1}}\right)I_1^{n+1}+\frac{\partial(ks)}{\partial\gamma^p}\left(\gamma^{p^{n+1}}\right)$$

$$\frac{\partial f^{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{a^{n+1}}\left(\frac{A}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a^{n+1}}}\left(g^{n+1}\right)^{\frac{A-a^{n+1}}{a^{n+1}}}\boldsymbol{Q^{n+1}}-\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\sigma}}^{n+1}$$

$$\frac{\partial f^{n+1}}{\partial\gamma^p}=-\left(\frac{1}{a^{n+1}}\right)^2\left(\frac{g^{n+1}}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a^{n+1}}}\log\left(\frac{g^{n+1}}{\sigma_c h_c^0}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma^p}\left(\gamma^{p^{n+1}}\right)-\frac{\partial u^{n+1}}{\partial\gamma^p}$$

$$\frac{\partial f^{n+1^*}}{\partial\Delta\lambda}=-\frac{\partial f^{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}.\left(2\mu\tilde{\boldsymbol{G}}^f+KG^f\boldsymbol{I}\right)+\frac{\partial f^{n+1}}{\partial\gamma^p}\sqrt{\frac{2}{3}}\tilde{G}_{\mathrm{II}}^f$$

Si $\left|f^{n+1}/\sigma_c\right|>\varepsilon_{\mathrm{prec}}$

n=n+1

Si n > nbre ite internes max

Si
$$\begin{cases}\left(I_1^e-I_1^{\mathrm{sommet}}\right)>-\dfrac{3K}{2\mu}\beta' s_{\mathrm{II}}^e\cos\varphi_s^{\min};\text{si }\beta'<0\\ \left(I_1^e-I_1^{\mathrm{sommet}}\right)>-\dfrac{3K}{2\mu}\beta' s_{\mathrm{II}}^e\cos\varphi_s^{\max};\text{si }\beta'\geq 0\end{cases}$$

On retient la projection au sommet : $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}\,;\ I_1=I_1^{\mathrm{sommet}}\,;\ \gamma^p=\gamma^{p^{\mathrm{sommet}}}$

Sinon

Non convergence

Sinon

Non convergence

Sinon

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| Convergence
Si FULL_MECA
Calcul de :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{H} + \frac{\boldsymbol{H}.\boldsymbol{G}^{f}.\left(\frac{\partial f^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)_{T}\boldsymbol{H}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial f^{n+1}}{\partial \gamma^{p}}\tilde{G}^{f}_{\mathrm{II}} - \left(\frac{\partial f^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{T}\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{G}^{f}}$$

Symétrisation mécanique :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}_{\mathrm{sym}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1^{T}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)$$

9 Variante sur l'expression du critère de plasticité

Dans cette proposition variante, on exprime le critère de plasticité en fonction du premier invariant et du déviateur des contraintes, par un recalage sur un triaxial en compression et en extension par les relations suivantes :

9.1 Formulation générale

$$f = \left(\frac{S_{\mathrm{II}}}{\sigma_{c}}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^{p})}} - u\left(\boldsymbol{\sigma}, \gamma^{p}\right) \leq 0 \qquad \text{éq 9.1-1}$$

Où l'expression de $u\left(\boldsymbol{\sigma}, \gamma^{p}\right)$ est :

Si $\gamma_{\mathrm{cjs}} \neq 0$

$$u\left(\boldsymbol{\sigma}, \gamma^{p}\right) = -\frac{m\left(\gamma^{p}\right)k\left(\gamma_{p}\right)}{\sqrt{6}\sigma_{c}}\left(\frac{h(\theta) + h_{t}^{0} - 2h_{c}^{0}}{h_{t}^{0} - h_{c}^{0}}\right) - \frac{m\left(\gamma^{p}\right)k\left(\gamma^{p}\right)}{3\sigma_{c}}I_{1} + s\left(\gamma^{p}\right).k\left(\gamma^{p}\right) \qquad \text{éq 9.1-2}$$

Si $\gamma_{\mathrm{cjs}} = 0$

$$u\left(\boldsymbol{\sigma}, \gamma^{p}\right) = -\frac{m\left(\gamma^{p}\right)k\left(\gamma_{p}\right)}{\sqrt{6}\sigma_{c}}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(3\theta)\right) - \frac{m\left(\gamma^{p}\right)k\left(\gamma^{p}\right)}{3\sigma_{c}}I_{1} + s\left(\gamma^{p}\right).k\left(\gamma^{p}\right) \qquad \text{éq 9.1-3}$$

9.2 Allure des seuils

On se place dans le cas où $\gamma_{\mathrm{cjs}} = 0.7\,;\, m = 21\,;\, s = 1\,;\, a = 1$, puis on trace l'allure des seuils dans le plan perpendiculaire à l'axe hydrostatique (dit plan π), on normalise par rapport à et on σ_{c} considère les deux valeurs de confinements telles que $I_{1} = 0$ [Figure 9.2-a] et $I_{1} = -3\sigma_{c}$ [Figure 9.2-b].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

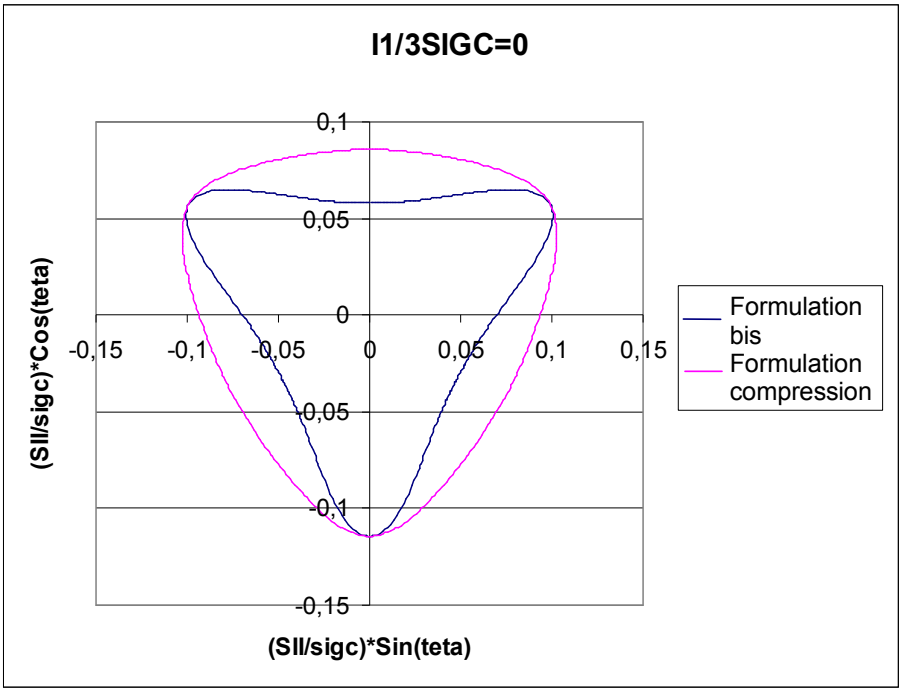


Figure 9.2-a : Allure des seuils pour un confinement nul

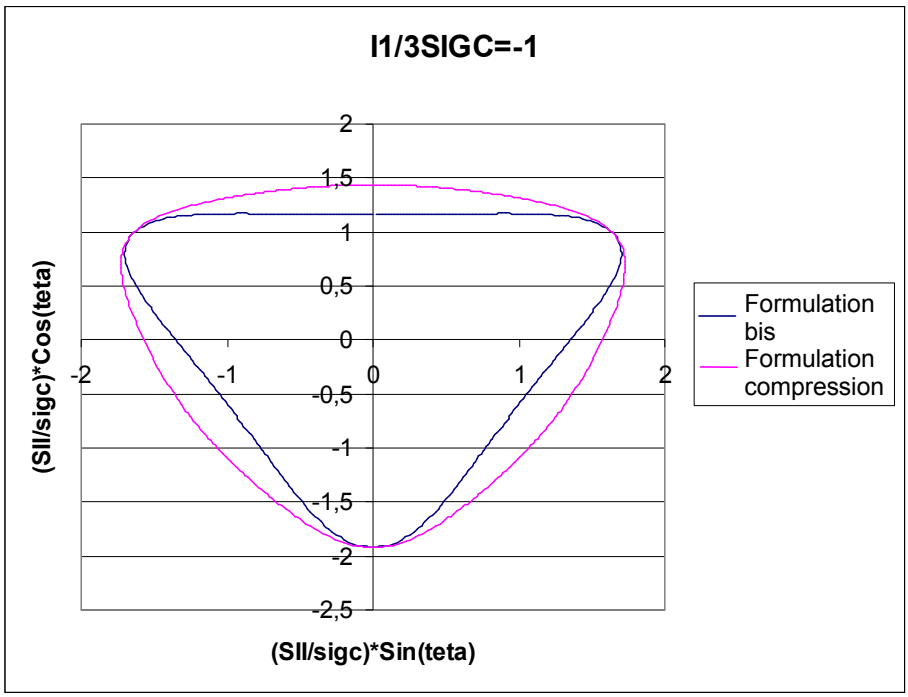


Figure 9.2-b : Allure des seuils pour un confinement en compression nul

On constate dans ces représentations graphiques que la formulation bis a l'inconvénient d'avoir une allure non convexe dans le plan π .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Fonctionnalités et vérification

La loi de comportement peut être définie par le mot-clé LAIGLE (commande STAT_NON_LINE, mot clé facteur COMPORTEMENT). Elle est associée au matériau LAIGLE (commande DEFI_MATERIAU).

La loi LAIGLE est vérifiée par les cas tests suivants :

SSNV158	[V6.04.158]	Essai triaxial drainé avec le modèle de Laigle
WTNV101	[V7.31.101]	Essai triaxial non drainé avec le modèle de Laigle et avec couplage hydraulique

11 Bibliographie

[1] F. LAIGLE : Aval du cycle – Ouvrages souterrains – Modèles rhéologiques pour l'analyse du comportement mécanique des roches. Note EDF-CIH IH.AVCY.01.003.A (2001).
[2] Ph. KOLMAYER : Aval du cycle – Ouvrages souterrains – Écriture de la loi de comportement du CIH sur une base du modèle Cambou-Jafari-Sidoroff (CJS) connue du *Code_Aster*. Note EDF-CIH.IH.AVCY.38.005.A (2002).
[3] C. CHAVANT : Spécifications pour l'introduction d'un modèle de roche dans le *Code_Aster*. Note EDF-I74/E27131.
[4] C. CHAVANT, Ph. AUBERT : Loi CJS en géomécanique. Document de Référence du *Code_Aster* R7.01.13.
[5] Ph. KOLMAYER, R. FERNANDES, C. CHAVANT, 2004 : « Numerical implementation of a new rheological law for argilites", Applied Clay Science 26, 499-510.

12 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
7,4	R.Fernandes, C.Chavant EDF-R&D/AMA	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1Recalage du critère sur le triaxial en compression

En prenant l'expression générale du critère sous les conditions d'un triaxial en compression, on trouve :

$$f=\left(\frac{g(\boldsymbol{s})}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}-\left(-\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{\sqrt{6}\sigma_c}\frac{g(\boldsymbol{s})}{h_c^0}-\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{3\sigma_c}I_1+s(\gamma_p).k(\gamma^p)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma_1-\sigma_3|.h}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}+\frac{1}{\sigma_c}\left(\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{\sigma_c\sqrt{6}}\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma_1-\sigma_3|.h}{\sigma_c h_c^0}+\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{3\sigma_c}(\sigma_1+2\sigma_3)-s(\gamma^p).k(\gamma^p)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma_1-\sigma_3|}{\sigma_c h_c^0}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}+\left(\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{\sigma_c\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{3}}|\sigma_1-\sigma_3|+\frac{m(\gamma^p)k(\gamma^p)}{3\sigma_c}(\sigma_1+2\sigma_3)-s(\gamma^p).k(\gamma^p)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left(|\sigma_1-\sigma_3|\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}+\left(\frac{m(\gamma^p).k(\gamma^p)}{3\sigma_c}|\sigma_1-\sigma_3|+\frac{m(\gamma^p).k(\gamma^p)}{3\sigma_c}(\sigma_1+2\sigma_3)-s(\gamma^p).k(\gamma^p)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left(|\sigma_1-\sigma_3|\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}+\left(\frac{m(\gamma^p).k(\gamma^p)}{3\sigma_c}(\sigma_3-\sigma_1)+\frac{m(\gamma^p).k(\gamma^p)}{3\sigma_c}(\sigma_1+2\sigma_3)-s(\gamma^p).k(\gamma^p)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left(|\sigma_1-\sigma_3|\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}+\left(\frac{m(\gamma^p).k(\gamma^p)}{\sigma_c}(\sigma_3)-s(\gamma^p).k(\gamma^p)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left(|\sigma_1-\sigma_3|\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}-\sqrt{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left(\frac{m(\gamma^p)}{\sigma_c}(-\sigma_3)+s(\gamma^p)\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sigma_c}\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left[\left(|\sigma_1-\sigma_3|\right)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}-(\sigma_c)^{\frac{1}{a(\gamma^p)}}\left(\frac{m(\gamma^p)}{\sigma_c}(-\sigma_3)+s(\gamma^p)\right)\right]$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2Normalisation de Q

$$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{h(\theta)^5}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\frac{\boldsymbol{s}}{s_{II}}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{6.s_{II}^2}\mathrm{dev}\left(\frac{\partial\det(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}})}{\partial\boldsymbol{s}}\right)\right]$$

On pose $\boldsymbol{t}=\frac{\partial\det(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}})}{\partial\boldsymbol{s}}$ et $\boldsymbol{t}=\mathrm{dev}\left(\frac{\partial\det(\underline{\underline{\boldsymbol{s}}})}{\partial\boldsymbol{s}}\right)$ (cf document de Référence CJS R7.01.13)

$$Q_{II}^2=\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{Q}=\frac{1}{h(\theta)^{10}}\left[1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)^2+\frac{3}{2}.\frac{\gamma_{cjs}^{\ 2}}{s_{II4}}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}.\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}+\frac{\gamma_{cjs}\sqrt{54}}{3.s_{II}^3}\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\boldsymbol{s}.\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}\right]$$

Pour évaluer cette expression, on se place dans le cas où $\mathbf{s}$ est diagonal par soucis de simplification des calculs.

Ainsi : $\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2s_2s_3-s_1s_2-s_1s_3\\2s_1s_3-s_1s_2-s_2s_3\\2s_1s_2-s_1s_3-s_2s_3\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

En utilisant la propriété de $\mathbf{s}$: , on $\boldsymbol{s}=s_1+s_2+s_3$ montre que $s_{II}^4=\left(s_1^2s_2^2+s_1^2s_3^2+s_2^2s_3^2\right)$ et par conséquent :

$$\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}.\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}=\frac{1}{9}\begin{vmatrix}2s_2s_3-s_1s_2-s_1s_3\\2s_1s_3-s_1s_2-s_2s_3\\2s_1s_2-s_1s_3-s_2s_3\\0\\0\\0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2s_2s_3-s_1s_2-s_1s_3\\2s_1s_3-s_1s_2-s_2s_3\\2s_1s_2-s_1s_3-s_2s_3\\0\\0\\0\end{vmatrix}=\frac{s_{II}^{\ 4}}{6}$$

On montre également à partir de la propriété $s_1+s_2+s_3=0$ que $s_1^3s_2^3s_3^3=3s_1s_2s_3=3.\det(\boldsymbol{s})$ et par conséquent :

$$\frac{\gamma_{cjs}.\sqrt{54}}{3.s_{II}^3}\boldsymbol{s}.\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{d}}=\frac{\gamma_{cjs}.\sqrt{54}}{9.s_{II}^3}\begin{vmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\0\\0\\0\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}2s_2s_3-s_1s_2-s_1s_3\\2s_1s_3-s_1s_2-s_2s_3\\2s_1s_2-s_1s_3-s_2s_3\\0\\0\\0\end{vmatrix}=\frac{\gamma_{cjs}.\sqrt{54}}{s_{II}^3}\det(\boldsymbol{s})=\gamma_{s}.\cos(3\theta)$$

On en déduit ainsi :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$Q_{II}^2=\frac{1}{h(\theta)^{10}}\left[\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)^2+\frac{\gamma_{cjs}^{\ 2}}{4}+\gamma_{cjs}\cos(3\theta)\left(1+\frac{\gamma_{cjs}}{2}\cos(3\theta)\right)\right]$$

Annexe 3Encadrement de l'angle de projection

On rappelle que $\cos\varphi_s \underset{s\to 0}{\to} \dfrac{3}{(\beta'^2+3)\sqrt{\left(\dfrac{3}{\beta'^2+3}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\left(1+\gamma_{cjs}\cos(3\theta)\right)}+\dfrac{\gamma_{cjs}^2-1}{4\left(1+\gamma_{cjs}\cos(3\theta)\right)^2}}}$

On pose : $X(\psi)=\dfrac{1}{2\left(1+\gamma_{cjs}\cos(\psi)\right)}+\dfrac{\gamma_{cjs}^2-1}{4\left(1+\gamma_{cjs}\cos(\psi)\right)^2}$ où $\psi\in[0,2\pi[$

On note que : $X(-\psi)=X(\psi)$, la fonction X étant paire on restreint l'intervalle d'étude à $\psi\in[0,2\pi[$.

La résolution de $\dfrac{dX}{d\psi}=0$ donne $\dfrac{\gamma_{cjs}\sin(\psi)}{2\left(1+\gamma_{cjs}\cos(\psi)\right)^3}\cdot\gamma_{cjs.}\left(\gamma_{cjs}+\cos(3\psi)\right)=0$

On en déduit que les bornes inférieure et supérieure de la fonction X sont :

$$\begin{cases} X(\psi=0)=\dfrac{1}{4} \\ X(\psi_{cjs})=\dfrac{1}{4\left(1-\gamma_{cjs}^2\right)} \text{ où } \psi_{cjs} \text{ est tel que } \cos(\psi_{cjs})=-\gamma_{cjs} \end{cases}$$

On peut ainsi donner l'encadrement de $\cos\varphi_s$ suivant : $\cos\varphi_s^{min}\le co\varphi_s\le\cos\varphi_s^{max}$ avec :

$$\begin{cases} \cos\varphi_s^{min}=\dfrac{3}{(\beta'^2+3)\sqrt{\left(\dfrac{3}{\beta'^2+3}\right)^2+\dfrac{\gamma_{cjs}^{\ 2}}{4\left(1-\gamma_{cjs}^2\right)}}} \\ \cos\varphi_s^{max}=1 \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)