Loi de comportement CAM_CLAY

Résumé :

Le modèle de Cam-Clay est un des modèles élastoplastiques le plus connu et le plus utilisé en mécanique des sols. Il est spécialement adapté aux matériaux argileux. Il y a plusieurs types de modèles Cam-Clay, celui présenté ici est le plus courant et est appelé Cam-Clay modifié. Ce modèle est caractérisé par des surfaces de charge écrouissables en forme d'ellipses dans le diagramme des deux premiers invariants des contraintes. A l'intérieur de ces surfaces de réversibilité, le matériau est élastique non linéaire. Il existe de plus, en un point de chaque ellipse, un état critique caractérisé par une variation de volume nulle. L'ensemble de ces points constitue une droite séparant les zones de dilatance et de contractance du matériau ainsi que les zones d'écrouissage négatif et positif. L'écrouissage est régi par une seule variable scalaire et la règle d'écoulement normale est adoptée.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Notations....4
2Introduction....6
2.1Phénoménologie du comportement des sols....6
2.2Comportement sous compression hydrostatique....6
2.3Comportement sous chargement déviatorique....7
3Loi de Cam Clay modifiée....8
3.1Hypothèses de modélisation....8
3.2Surface de charge....8
3.3Loi élastique et loi d'écrouissage....9
3.4Loi d'écoulement plastique....10
3.5Ecriture énergétique et module d'écrouissage plastique....10
3.6Relations incrémentales....11
3.7Résumé des relations de comportement....12
4Intégration numérique des relations de comportement....14
4.1Rappel du problème....14
4.2Calcul des contraintes et variables internes....14
4.3Calcul de l'inconnue....16
4.4Détermination des bornes de la fonction....16
4.5Cas particulier du point critique....18
4.6Résumé....19
5Opérateur tangent....20
5.1Opérateur tangent élastique non linéaire....20
5.2Opérateur tangent plastique en vitesse. Option RIGI_MECA_TANG....21
5.3Opérateur tangent en implicite. Option FULL_MECA....24
6Paramètres matériaux et variables internes....24
6.1Paramètres matériaux....24
6.2Variables internes....26
7Mise en œuvre d'un calcul avec la loi CAM_CLAY....26
7.1Initialisation du calcul....26
7.2Exemples de résultats obtenus sur des essais triaxiaux....26
8Annexe : Opérateur tangent en implicite. Option FULL_MECA....29
8.1Cas général....29
8.1.1Traitement de la partie déviatorique....29
8.1.2Traitement de la partie hydrostatique....33
8.1.3Opérateur tangent....35
8.2Opérateur tangent au point critique....36
8.2.1Traitement de la partie déviatorique....36
8.2.2Traitement de la partie hydrostatique....37

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8.2.3Opérateur tangent....37
9Bibliographie....38
10Vérification....38
11Description des versions du document....38

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

σ désigne le tenseur des contraintes effectives en petites perturbations définies comme étant la différence entre les contraintes totales et la pression de l'eau dans le cas des sols saturés, noté sous la forme du vecteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \end{pmatrix}$$

On note :

$\underline{\underline{P=-\frac{1}{3}tr(\sigma)}}$	**contrainte de confinement**
$s=\sigma+PI$	déviateur des contraintes
$I_2=\frac{1}{2}tr(s.s)$	deuxième invariant des contraintes
$Q=\sigma_{eq}=\sqrt{3I_2}$	contrainte équivalente
$\varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla u+\nabla^T u)$	déformation totale
$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_p+\varepsilon_{th}$	partition des déformations (élastique, plastique, thermique)
$\underline{\underline{\varepsilon_v=-tr(\varepsilon)+3\alpha(T-T_0)}}$	**déformation totale volumique**
$\varepsilon_V^p=-tr(\varepsilon^p)$	déformation plastique volumique
$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon_v I$	déviateur des déformations
$\tilde{\varepsilon}^e=\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}^p$	déviateur des déformations élastiques
$\tilde{\varepsilon}^p=\varepsilon^p+\frac{1}{3}\varepsilon_v^p I$	déformation plastique déviatorique
$\varepsilon_{eq}^e=\sqrt{\frac{2}{3}tr(\tilde{\varepsilon}^e.\tilde{\varepsilon}^e)}$	déformation élastique équivalente
$\varepsilon_{eq}^p=\sqrt{\frac{2}{3}tr(\tilde{\varepsilon}^p.\tilde{\varepsilon}^p)}$	déformation plastique équivalente

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

e indice des vides du matériau (rapport du volume des pores sur le volume des grains solides)

e_0 indice des vides initial

ϕ porosité (rapport du volume des pores sur le volume total)

κ coefficient de gonflement (pente élastique dans un essai de compression hydrostatique)

M pente de la droite d'état critique

$$k_0=\frac{(1+e_0)}{\kappa}$$

P_{cr} variable interne du modèle, pression critique égale à la moitié de la pression de consolidation P_{cons}

λ coefficient de compressibilité (pente plastique dans un essai de compression hydrostatique)

$$k=\frac{(1+e_0)}{(\lambda-\kappa)}$$

μ coefficient élastique de cisaillement (coefficient de Lamé)

f surface de charge

Λ multiplicateur plastique

I^d tenseur unité d'ordre 2 dont le terme courant est δ_{ij}

I_4^d tenseur unité d'ordre 4 dont le terme courant est δ_{ijkl}

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

Le modèle décrit ici est le modèle dit de Cam-Clay modifié. Le modèle initial de Cam-Clay a été développé par l'école de mécanique des sols de Cambridge dans les années 60. Il prédisait des déformations déviatoriques trop importantes sous chargement déviatorique faible, et a été modifié par Burland et Roscoe en 1968 [bib1].

2.1 Phénoménologie du comportement des sols

Les matériaux poroplastiques tels que certaines argiles se caractérisent par les comportements suivants :

- la forte porosité de ces matériaux provoque des déformations irréversibles sous chargement hydrostatique correspondant à une réduction importante de la porosité. Ce mécanisme purement contractant est parfois appelé « collapse »,
- sous chargement déviatorique, ces matériaux montrent une phase contractante suivie d'une phase où le matériau se déforme à volume plastique constant ou se dilate.

Pour les deux types de chargement, l'énergie bloquée dans le matériau évolue en fonction du nombre de contact entre les grains. Pour un chargement hydrostatique, le nombre de contact augmente, ainsi que l'énergie bloquée, on a donc écrouissage positif. Pour un chargement déviatorique, le matériau peut se déformer sans variation de volume à nombre de contacts intergranulaires constant. De plus, on peut observer dans les essais des localisations de déformations accompagnées d'une forte dilatance. Dans ces zones, le nombre de grains en contact diminuant, il y a diminution de l'énergie bloquée et donc adoucissement.

Ces comportements sont mis en évidence essentiellement par des essais triaxiaux de révolution. Ces observations amènent à postuler qu'il existe un seuil plastique dont l'évolution est gouvernée par deux mécanismes : l'un purement contractant associé à la contrainte hydrostatique, et un mécanisme déviatorique gouverné par le frottement interne se déroulant à volume constant et éventuellement dilatant à l'approche de la localisation.
Tout l'intérêt du modèle de Cam Clay réside dans sa faculté à décrire ces phénomènes avec un minimum d'ingrédients et notamment une seule surface de charge et un écrouissage associé à une seule variable scalaire.

2.2 Comportement sous compression hydrostatique

Lors d'un essai de compression hydrostatique, les sols présentent un indice des vides qui décroît logarithmiquement avec la pression hydrostatique exercée (cf. [Figure 2.2-a]). e_0 étant l'indice des vides initial sous chargement initial. Jusqu'à une pression P^0_{cons} appelée pression de consolidation, le comportement est réversible, la pente κ du diagramme $(e, Ln\ P)$ est appelé coefficient élastique de gonflement. P^0_{cons} correspond à la pression maximale qu'a subie le matériau au cours de son histoire. Au delà de cette préconsolidation, le diagramme présente une nouvelle pente λ (coefficient de compressibilité) plus marquée et l'apparition de déformations irréversibles. P^0_{cons} correspond donc à un seuil élastoplastique évolutif.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

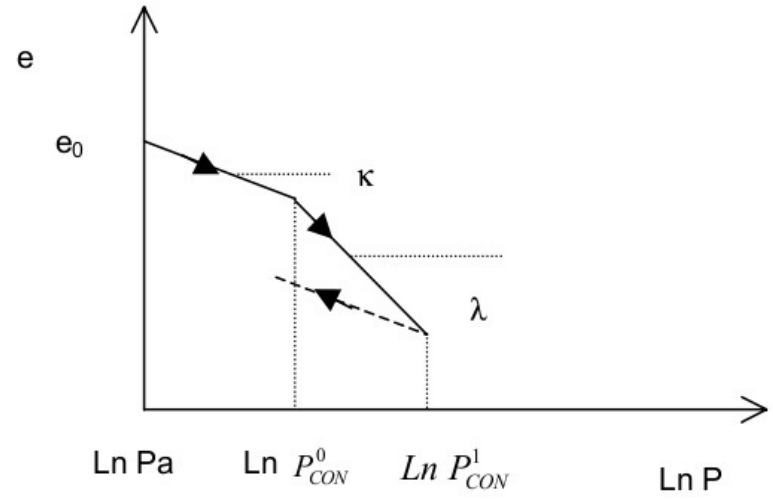


Figure 2.2-a : Essai de chargement-déchargement hydrostatique

Remarque :

Le diagramme ci-dessus correspond à un ensemble de mesures où la contrainte effective est stabilisée. En effet, dans le processus de consolidation des sols, c'est l'eau contenue dans les pores qui reprend d'abord la pression hydrostatique avec très peu de déformation, avant de s'écouler et laisser le squelette se déformer. Après consolidation du matériau et stabilisation de la pression de l'eau, la contrainte effective (contrainte totale moins pression de l'eau) est stabilisée et reportée sur le graphe. Les relations de comportement dans les milieux poreux saturés s'expriment généralement avec les contraintes effectives suivant l'hypothèse de Terzaghi.

2.3 Comportement sous chargement déviatorique

Les essais triaxiaux de révolution permettent de contrôler à la fois la composante déviatorique Q et la composante sphérique P du chargement. Suivant le rapport de ces deux composantes, on observe un comportement plastique purement dilatant ($\frac{Q}{P-P_{trac}}>M$) ou contractant ($\frac{Q}{P-P_{trac}}<M$), la droite $Q=M\left(P_{cr}-P_{trac}\right)$ représentant l'ensemble des points critiques sur les surfaces de charge où l'état mécanique évolue sans changement de volume plastique. Le modèle de base de Cam Clay fait l'hypothèse que les taux de déformations plastiques sont normaux à la surface de charge f ($\dot{\varepsilon}_v^p=\dot{\Lambda}\frac{\partial f}{\partial P}$, $\tilde{\dot{\varepsilon}}^p=\dot{\Lambda}\frac{\partial f}{\partial Q}$) . De plus, le travail plastique en un point quelconque de la surface de charge est considéré égal au travail plastique à l'état critique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Loi de Cam Clay modifiée

3.1 Hypothèses de modélisation

Le modèle est écrit en petites perturbations.
Les coefficients du modèle ne dépendent pas de la température.

3.2 Surface de charge

L'expression de la surface de charge s'écrit de la façon suivante :

$$f(P,Q,P_{cr}) = Q^2 + M^2\left(P - P_{trac}\right)^2 - 2\mathrm{M}^2\left(P - P_{trac}\right)P_{cr} \qquad \leq 0 \qquad \textbf{éq 3.2-1}$$

Dans le plan (P,Q), l'expression représente une famille d'ellipses, centrées sur P_{cr} qui est liée à la pression de consolidation : $P_{cons} = 2P_{cr} - P_{trac}$ (cf. [Figure 3.2-a). P_{cr} sera le paramètre d'écrouissage du modèle.

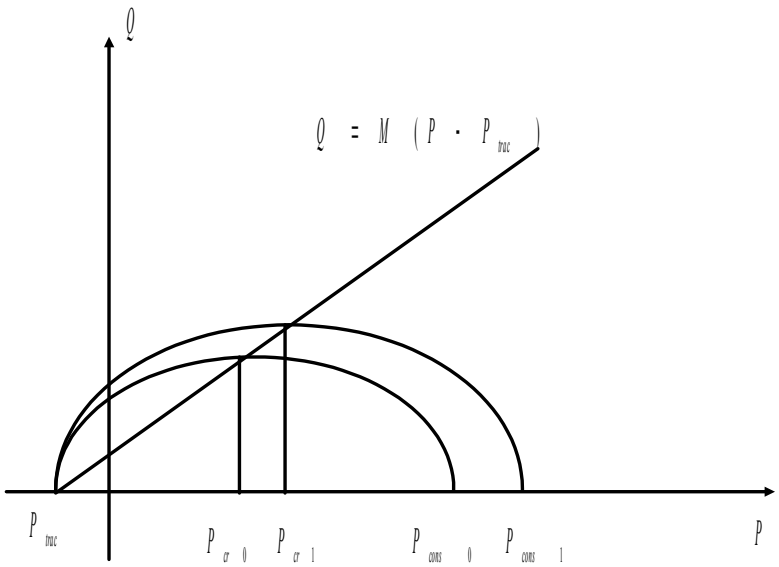


Figure 3.2-a : Famille de surfaces de charge écrouissables

Quand $f = 0$ et $P - P_{trac} < P_{cr}$ le matériau est dilatant ($\dot{\varepsilon}_v^p < 0$) et P_{cr} est décroissant (adoucissement).
Quand $f = 0$ et $P - P_{trac} > P_{cr}$ le matériau est contactant ($\dot{\varepsilon}_v^p > 0$) et P_{cr} est croissant (durcissement).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.3 Loi élastique et loi d'écrouissage

On fait l'hypothèse du découplage de la loi élastique en partie hydrostatique et déviatorique et l'hypothèse supplémentaire que le module de cisaillement est constant.

On considère donc une loi élastique isotrope, avec une partie déviatorique linéaire et une partie volumique non-linéaire :

Partie déviatoire :

$$\tilde{\varepsilon}^e = \frac{s}{2\mu} \qquad \textbf{éq 3.3-1}$$

Partie volumique :

$$\dot{\varepsilon}_v^e = -\frac{\dot{e}}{1+e_0} \text{ ou } e = e_0 - \kappa\, Ln\left(\frac{P}{K_{cam}}\right) \text{ si } P < \text{Pconsolidation} \qquad \textbf{éq 3.3-2}$$

La loi [éq 3.3-2] est en fait dérivée d'un essai oedométrique où l'on mesure la variation de l'indice des vides en fonction du chargement [Figure 2.2-a]. Rappelons qu'un essai oedométrique homogène consiste à augmenter la contrainte effective axiale tout en maintenant la déformation radiale nulle sur une éprouvette cylindrique.

Remarque :

Les pressions P correspondent à des essais drainés ou non. Néanmoins, dans une modélisation avec le Code_Aster les contraintes manipulées dans les lois de comportement sont effectives c'est à dire qu'on ne prend pas en compte la pression hydrostatique du fluide qui peut circuler dans les pores, celle-ci étant calculée dans les modélisations THM.

Les essais de chargement volumique (cf. [Figure 2.2-a]) nous amènent à la loi élastique suivante :

$$k_0 P + K_{cam} = \left(k_0 P_0 + K_{cam}\right) \exp\left[k_0 (\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v0}^e)\right] \text{ avec } k_0 = \frac{(1+e_0)}{\kappa} \qquad \textbf{éq 3.3-3}$$

De même, la croissance de la surface de charge en phase de contractance, sa décroissance en dilatance, et les résultats expérimentaux suggèrent d'écrire :

$$P_{cr} = P_{cr}^0 \exp\left[k (\varepsilon_v^p - \varepsilon_{v0}^p)\right] \text{ , avec } k = \frac{(1+e_0)}{(\lambda - \kappa)} \qquad \textbf{éq 3.3-4}$$

ε_{v0}^p et e_0 correspondent à la déformation volumique et à l'indice des vides initiaux, déterminés par extrapolation de la courbe de l'essai oedométrique à la pression K_{cam} (cf. [Figure 2.2-a]).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.4 Loi d'écoulement plastique

Les deux variables plastiques sont la déformation plastique volumique ε_v^p et le tenseur déviatorique des déformations plastiques $\tilde{\varepsilon}^p$. La variable interne est également ε_v^p mais associée à la force d'écrouissage P_{cr} . Le matériau est standard non généralisé. La règle d'écoulement s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\Lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma}\ ,\ \ ,\ \dot{\varepsilon}_v^p = -\dot{\Lambda}\frac{\partial F}{\partial P_{cr}}\ , \qquad \textbf{éq 3.4-1}$$

Λ étant le multiplicateur plastique.

En décomposant le premier terme, on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\Lambda}\frac{\partial f}{\partial P} \qquad \dot{\tilde{\varepsilon}}^p = \dot{\Lambda}\frac{\partial f}{\partial s} \qquad \dot{\varepsilon}_v^p = -\dot{\Lambda}\frac{\partial F}{\partial P_{cr}} \qquad \textbf{éq 3.4-2}$$

sachant que :

$$\underline{\underline{P = -\frac{1}{3}tr(\sigma)}} \ \text{ et } \ \underline{\underline{\varepsilon_v = -tr(\varepsilon) + 3\alpha(T - T_0)}} \qquad \textbf{éq 3.4-3}$$

F est le potentiel plastique associé au phénomène d'écrouissage. Notons que la troisième partie de [éq 3.4-2] n'est que formelle. En effet, on connaît $\dot{\varepsilon}_v^p$ par la première relation donc on connaît l'évolution de P_{cr} .

3.5 Ecriture énergétique et module d'écrouissage plastique

On est donc dans le cadre de « matériaux standards non généralisés » (on utilise alors trois potentiels : la surface de charge f , le potentiel plastique F , et l'énergie libre ψ . Même dans cette configuration moins favorable que le traditionnel cadre des matériaux standards non généralisés, on est assuré de satisfaire au second principe de la thermodynamique [bib4]. A l'aide de la condition de consistance (exprimant que le point représentatif du chargement « suit » la surface de charge) qui s'écrit de la manière suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial P}dP + \frac{\partial f}{\partial Q}dQ + \frac{\partial f}{\partial P_{cr}}dP_{cr} = 0\ , \qquad \textbf{éq 3.5-1}$$

on détermine l'expression du multiplicateur plastique [bib4] :

$$\Lambda = \frac{1}{H_p}\frac{\partial f}{\partial \sigma}d\sigma = -\frac{1}{H_p}\frac{\partial f}{\partial P_{cr}}dP_{cr} \qquad \textbf{éq 3.5-2}$$

avec [bib4] :

$$H_p = \frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_v^{p^2}}\frac{\partial F}{\partial P_{cr}}\ ,\ \text{où}\ H_p\ \text{est le module d'écrouissage} \qquad \textbf{éq 3.5-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'identification de la première et troisième partie de [éq 3.4-2] permet de calculer F qui s'écrit :

$$F=-\int \frac{\partial f}{\partial P}dP_{cr}=M^2 P_{cr}\left(P_{cr}-2\mathrm{P}+2\mathrm{P}_{trac}\right) \quad \textbf{éq 3.5-4}$$

La notion d'écrouissage étant associée à celle d'énergie bloquée :

$$P_{cr}=\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_v^p} \quad \text{donc} \quad dP_{cr}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 \varepsilon_v^p}d\varepsilon_v^p \quad \textbf{éq 3.5-5}$$

où ψ est la densité d'énergie libre :

$$\psi=\frac{3}{2}\mu\,(\varepsilon_{eq}^e)^2+\frac{P_0}{k_0}\exp(k_0\varepsilon_v^e)+\frac{P_{cr}^0}{k}\exp\left(k\left(\varepsilon_v^p-\varepsilon_{v0}^p\right)\right) \quad \textbf{éq 3.5-6}$$

En utilisant les [éq 3.4-2], [éq 3.5-4] et [éq 3.5-6], on peut tirer d'après [éq 3.5-3] l'expression du module d'écrouissage plastique :

$$H_p=\frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_v^{p^2}}\frac{\partial F}{\partial P_{cr}}=4\,kM^4\left(P-P_{trac}\right)P_{cr}\left(P-P_{trac}-P_{cr}\right) \quad \textbf{éq 3.5-7}$$

Le module d'écrouissage est positif en phase de contractance $\left(P-P_{trac}>P_{cr}\right)$ et négatif en phase de dilatance $\left(P-P_{trac}<P_{cr}\right)$. Pour $P-P_{trac}=P_{cr}$, le comportement est plastique parfait et se déroule à volume plastique constant.

3.6 Relations incrémentales

L'équation [éq 3.4-3] et la condition de consistance donnent les relations d'écoulement :

$$d\varepsilon_v^p=\frac{1}{k}\left[\left(\frac{1}{P_{cr}}-\frac{1}{\left(P-P_{trac}\right)}\right)dP+\frac{Q}{M^2\left(P-P_{trac}\right)P_{cr}}dQ\right] \quad \textbf{éq 3.6-1}$$

$$d\varepsilon_{eq}^p=\frac{1}{k}\left[\frac{Q}{M^2\left(P-P_{trac}\right)P_{cr}}dP+\frac{Q^2}{M^4\left(P-P_{trac}\right)P_{cr}\left(P-P_{trac}-P_{cr}\right)}dQ\right] \quad \textbf{éq 3.6-2}$$

$$d\,\tilde{\varepsilon}^p=d\varepsilon_{eq}^p\frac{3}{2}\frac{s}{Q} \quad \textbf{éq 3.6-3}$$

Le réarrangement des [éq 3.6-1] et [éq 3.6-2] conduit à :

$$\frac{d\varepsilon_{eq}^p}{d\varepsilon_v^p}=\frac{Q}{M^2\left(P-P_{trac}-P_{cr}\right)} \quad \textbf{éq 3.6-4}$$

c'est-à-dire avec l'équation [éq 3.6-3],

$$\frac{d\,\tilde{\varepsilon}^p}{d\varepsilon_v^p}=\frac{3}{2}\frac{s}{M^2\left(P-P_{trac}-P_{cr}\right)} \quad \textbf{éq 3.6-5}$$

Cas particulier du point critique :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour $f=0$ et $P-P_{trac}=P_{cr}$: $\dot{P}_{cr}=0$, $\dot{\varepsilon}_v^p=0$. On en déduit, en considérant la loi élastique : $\dot{P}=k_0 P \dot{\varepsilon}_v$. La condition de consistance nous donne $\dot{Q}=0$.

3.7 Résumé des relations de comportement

Elasticité

$$s=2\mu \tilde{\varepsilon}^e \quad \textbf{éq 3.7-1}$$

$$P=P_0 \exp(k_0 \Delta\varepsilon_v^e)+\frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left(k_0 \Delta\varepsilon_v^e\right)-1\right) \quad \textbf{éq 3.7-2}$$

Plasticité

Le critère : $f\left(\sigma, P_{cr}\right)=Q^2+M^2\left(P-P_{trac}\right)^2-2M^2\left(P-P_{trac}\right)P_{cr}=0$ avec $\left(Q=\sigma_{eq}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma}=\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial P} I^d+\frac{3}{2}\frac{\partial f}{\partial Q}\frac{s}{Q}\right)} \quad \textbf{éq 3.7-3}$$

donc :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p=3\dot{\lambda} s \quad \textbf{éq 3.7-4}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p=\dot{\lambda} 2M^2\left(P-P_{trac}-P_{cr}\right) \quad \textbf{éq 3.7-5}$$

Ecrouissage

$$P_{cr}\left(\varepsilon_v^p\right)=P_{cr\,0}\exp\left(k\left(\varepsilon_v^p-\varepsilon_v^{p_0}\right)\right) \quad \textbf{éq 3.7-6}$$

Comportement élastique : Si $f<0$ alors :

$$\dot{P}_{cr}=0 \quad \textbf{éq 3.7-7}$$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_{eq}^p=0, \dot{\varepsilon}_v^p=0 \quad \textbf{éq 3.7-8}$$

$$\dot{s}=2\mu \dot{\tilde{\varepsilon}} \quad \textbf{éq 3.7-9}$$

$$\dot{P}=\left(k_0 P+K_{cam}\right)\dot{\varepsilon}_v \quad \textbf{éq 3.7-10}$$

Comportement élasto-plastique : Si $f=0$ et $\dot{f}=0$ alors :

$$\dot{P}_{cr}\neq 0 \quad ; \quad \dot{P}_{cr}=k\,\dot{\varepsilon}_v^p P_{cr} \quad \textbf{éq 3.7-11}$$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^p=3\,\dot{\lambda}\,s \quad \text{si} \quad P-P_{trac}\neq P_{cr} \quad \textbf{éq 3.7-12}$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p=\dot{\lambda} 2M^2\left(P-P_{trac}-P_{cr}\right) \quad \text{si} \quad P-P_{trac}\neq P_{cr} \quad \textbf{éq 3.7-13}$$

$$\dot{s}=2\mu \dot{\tilde{\varepsilon}} \quad \textbf{éq 3.7-14}$$

$$\dot{P}=\left(k_0 P+K_{cam}\right)\dot{\varepsilon}_v \quad \textbf{éq 3.7-15}$$

Remarques :

- *A partir de la seule inconnue $\dot{\varepsilon}_v^p$, on peut déduire les autres inconnues $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p$ et $\dot{P}_{cr}$.*

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\left|$ •Si $P-P_{trac}=P_{cr}$: $\dot{\varepsilon}_v^p=0$, $\dot{Q}=\dot{P}_{cr}=0,\ \dot{P}=k_0 P\ \dot{\varepsilon}_v$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Intégration numérique des relations de comportement

4.1 Rappel du problème

Pour un incrément de chargement donné et un ensemble de variables données (champ initial de déplacement, contrainte et variable interne), on résout le système global discrétisé (2.2.2.2-1 de [bib3]) qui cherche à satisfaire les équations d'équilibre.

La résolution de ce système nous donne Δu , donc $\Delta \varepsilon$. On cherche donc localement, en chaque point de Gauss, l'incrément de contrainte et de variable interne correspondant à $\Delta \varepsilon$ et qui satisfont la loi de comportement.

On emploie les notations suivantes : $A^-, A, \Delta A$ pour la quantité évaluée à l'instant connu t, à l'instant $t+\Delta t$ et son incrément, respectivement. Les équations sont discrétisées de manière implicite, exprimées en fonction des variables inconnues à l'instant $t+\Delta t$.

4.2 Calcul des contraintes et variables internes

La prédiction élastique de la contrainte déviatorique s'écrit :

$$s^e = s^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon} \qquad \textbf{éq 4.2-1}$$

or on peut toujours écrire s à l'instant + comme étant :

$$s = s^- + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^e \qquad \textbf{éq 4.2-2}$$

Ces deux équations nous permettent de déduire s en fonction de s^e :

$$s = s^e - 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon} + 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^e \qquad \textbf{éq 4.2-3}$$

$$\text{ou} \quad s = s^e - 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^p \qquad \textbf{éq 4.2-4}$$

En remplaçant $\Delta\tilde{\varepsilon}^p$ par son expression en fonction de $\Delta\varepsilon_v^p$, on obtient :

$$s = \frac{s^e}{1 + \dfrac{3\mu\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right)}} \qquad \textbf{éq 4.2-5}$$

d'où,

$$Q = \frac{Q^e}{1 + \dfrac{3\mu\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right)}} \qquad \textbf{éq 4.2-6}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En supposant que k_0 est indépendante de la température, l'écriture incrémentale de P s'écrit :

$$P = P^- \exp\left[k_0 \varepsilon_v^e - k_0 \varepsilon_v^{e^-}\right] + \frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[k_0 \varepsilon_v^e - k_0 \varepsilon_v^{e^-}\right] - 1\right) \quad \textbf{éq 4.2-8}$$

$$P = P^- \exp\left[k_0 \Delta\varepsilon_v^e\right] + \frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[k_0 \Delta\varepsilon_v^e\right] - 1\right) \quad \textbf{éq 4.2-9}$$

$$\Delta P = P^-\left(\exp\left[k_0 \Delta\varepsilon_v^e\right] - 1\right) + \frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[k_0 \Delta\varepsilon_v^e\right] - 1\right) \quad \textbf{éq 4.2.10}$$

De même on peut écrire l'expression de P^e en fonction de P^- :

$$P^e = P^- \exp\left[k_0 \Delta\varepsilon_v\right] + \frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[k_0 \Delta\varepsilon_v\right] - 1\right) \quad \textbf{éq 4.2-11}$$

d'où l'expression de P à l'instant + est :

$$P = P^e \exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p\right] + \frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p\right] - 1\right) \quad \textbf{éq 4.2-12}$$

Dans l'écriture incrémentale de P_{cr} , le coefficient k ne dépend pas de la température, on trouve donc l'expression suivante :

$$P_{cr} = P_{cr\,0} \exp\left[k\left(\varepsilon_v^p - \varepsilon_v^{p_0}\right)\right] \quad \textbf{éq 4.2-13}$$

$$P_{cr} = P_{cr}^- \exp\left[k\Delta\varepsilon_v^p\right] \quad \textbf{éq 4.2-14}$$

$$\Delta P_{cr} = P_{cr}^- \left|\exp\left(k\Delta\varepsilon_v^p\right) - 1\right| \quad \textbf{éq 4.2-15}$$

Résumé :

$f\left(s^e, P^e, P_{cr}^-\right) \le 0$ dans ce cas $\Delta P_{cr} = 0$ soit $s = s^- + \Delta s = s^e$
$P = P^e$

$f\left(s^e, P^e, P_{cr}^-\right) > 0$ dans ce cas $\Delta P_{cr} > 0$, $\Delta\tilde{\varepsilon}^p \neq 0$ et $\Delta\varepsilon_v^p \neq 0$
soit $s = s^e - 2\mu\Delta\tilde{\varepsilon}^p$
$P = P^e \exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p\right] + \frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[-k_0 \Delta\varepsilon_v^p\right] - 1\right)$
$P_{cr} = P_{cr}^- \exp\left[k\Delta\varepsilon_v^p\right]$

Remarque :

L'inconnue principale est $\Delta\varepsilon_v^p$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4.3 Calcul de l'inconnue $\Delta\varepsilon_v^p$

En reportant dans le critère les expressions de P et Q en fonction de P^e et de Q^e et en utilisant l'équation [éq 4.2-6] :

$$Q_e^2=-\left[1+\frac{3\mu\Delta\varepsilon_v^p}{M^2(P-P_{trac}-P_{cr})}\right]^2 M^2\left(P-P_{trac}\right)\left(P-P_{trac}-2\mathrm{P}_{cr}\right) \quad \textbf{éq 4.3-1}$$

$$Q_e^2=-M^2\left[1+\frac{3\mu\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(P_e\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]+\frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]-1\right)-P_{trac}-P_{cr}^-\exp\left[k\Delta\varepsilon_v^p\right]\right)}\right]^2$$
$$\left(P_e\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]+\frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]-1\right)-P_{trac}\right) \quad \textbf{éq 4.3-2}$$
$$\left(P_e\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]+\frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]-1\right)-P_{trac}-2\mathrm{P}_{cr}^-\exp\left[k\Delta\varepsilon_v^p\right]\right)$$

Dans le sous paragraphe suivant on détermine des bornes à cette fonction qui facilitent la résolution de l'équation [éq 4.3-2] avec par exemple la méthode des cordes ou par la méthode de Newton.

4.4 Détermination des bornes de la fonction

On pose $\Delta\varepsilon_v^p=x$ l'inconnue du problème.
On a donc :

$$P(x)=P^e\exp(-k_0x)+\frac{K_{cam}}{k_0}(\exp(-k_0x)-1) \quad \textbf{éq 4.4-1}$$

$$P_{cr}(x)=P_{cr}^-\exp(kx) \quad \textbf{éq 4.4-2}$$

$$\Delta(x)=\frac{x}{2\mathrm{M}^2\left(P(x)-P_{trac}-P_{cr}(x)\right)} \quad \textbf{éq 4.4-3}$$

$$Q(x)=\frac{Q^e}{1+6\ \mu\ \Delta(x)} \quad \textbf{éq 4.4-4}$$

$$f(x)=Q^2(x)+M^2\left(P(x)-P_{trac}\right)^2-2\mathrm{M}^2\left(P(x)-P_{trac}\right)P_{cr}(x)=0 \quad \textbf{éq 4.4-5}$$

Au point $x=0\ ;\ P(0)=P^e\ ;\ P_{cr}(0)=P_{cr}^-\ ;\ \lambda(0)=0\ ;\ Q(0)=Q^e$ éq 4.4-6

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f(0)=Q^{e^2}+M^2\left(P^e-P_{trac}\right)\left(P^e-P_{trac}-2\mathrm{P}_{cr}^{-}\right) \quad \textbf{éq 4.4-7}$$
$$f(0)>0$$

Au point :

$$P-P_{trac}=P_{cr}\ ;\ \Lambda(x_b)=\infty\ ;\ Q(x_b)=0 \text{ et } f(x_b)=-M^2\left(P-P_{trac}\right)^2 \quad \textbf{éq 4.4-8}$$
$$f(x_b)<0$$

En $x=0$; $f(0)>0$ et en $x=x_b$; $f(x_b)<0$

On cherche x entre 0 et x_b ; pour le déterminer, on écrit :

$$P(x_b)-P_{trac}=P_{cr}(x_b)$$
$$\Leftrightarrow P^e\exp(-k_0x_b)+\frac{K_{cam}}{k_0}\exp(-k_0x_b)-P_{cr}^{-}\exp(kx_b)=\frac{K_{cam}}{k_0}+P_{trac} \quad \textbf{éq 4.4-9}$$

C'est une équation non linéaire en x_b , on fait un développement limité d'ordre 1 pour déduire l'expression de x_b :

Si P^e - P_{cr}^{-} - $P_{trac}=0$; $x_b=0$ et $\Delta\varepsilon_v^p=0$

Si $k_0P^e+K_{cam}+kP_{cr}^{-}\neq0$; $x_b=\left(\frac{P^e-P_{cr}^{-}-P_{trac}}{k_0P^e+K_{cam}+kP_{cr}^{-}}\right)$

Sinon on fait un développement limité d'ordre 2 et on trouve ;

$$\left(P^e-P_{cr}^{-}-P_{trac}\right)-\left(k_0P^e+K_{cam}+kP_{cr}^{-}\right)x_b+\frac{1}{2}\left(k_0P^e+K_{cam}-kP_{cr}^{-}\right)x_b^2=0$$

Comme $k_0P^e+K_{cam}+kP_{cr}^{-}=0$ alors $k_0P^e+K_{cam}-kP_{cr}^{-}\neq0$

Et on résout

$$\left(P^e-P_{cr}^{-}-P_{trac}\right)+\frac{1}{2}\left(k_0P^e+K_{cam}-kP_{cr}^{-}\right)x_b^2=0$$

Si P^e - P_{cr}^{-} - $P_{trac}=0$; $x_b=0$ et $\Delta\varepsilon_v^p=0$

Sinon $x_b=\pm\sqrt{\frac{-2\left(P^e-P_{cr}^{-}-P_{trac}\right)}{\left(k_0P^e+K_{cam}-kP_{cr}^{-}\right)}}$

Si σ <0 on choisit une valeur pour x_b approchée soit $x_b=\frac{1}{k_0+k}Log\left(\frac{|P^e-P_{trac}|}{P_{cr}^{-}}\right)$

Sinon on a le choix entre deux valeurs de x_b ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On fait le test suivant :

Si $\left(P^e - P_{trac} > P_{cr}^-\right)$ alors $x_b = \sqrt{\frac{-2\left(P^e - P_{cr}^- - P_{trac}\right)}{\left(k_0 P^e + K_{cam} - kP_{cr}^-\right)}}$; la solution serait positive ; x>0

Si $\left(P^e - P_{trac} < P_{cr}^-\right)$ alors $x_b = -\sqrt{\frac{-2\left(P^e - P_{cr}^- - P_{trac}\right)}{\left(k_0 P^e + K_{cam} - kP_{cr}^-\right)}}$; la solution serait négative ; x<0

4.5 Cas particulier du point critique

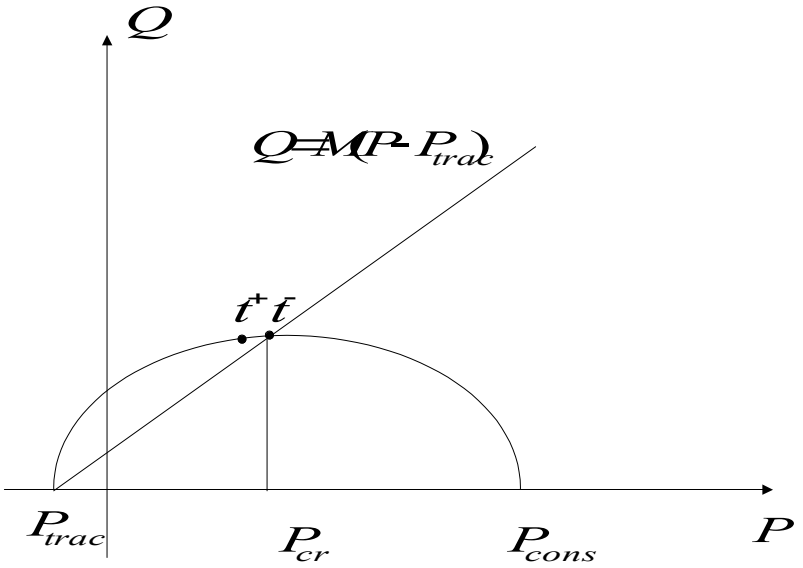


Figure 4.5-a : Etat mécanique autour du point critique

Si à l'instant t^- on atteint l'état critique, alors $P_{cr}^+ = P_{cr}^-$, $\Delta\varepsilon_v^p = 0$ et $Q^- = MP^-$. Si $f = 0,\ \dot{f} = 0$, alors le point (P, Q) à l'instant t^+ se déplace sur l'ellipse initiale (cf. [Figure 4.5-a]). On déduit immédiatement de la loi élastique et de la condition $\Delta\varepsilon_v^p = 0$:

$$\Delta P = k_0\ \Delta\ \varepsilon_v P^- \qquad \textbf{éq 4.5-1}$$

Le critère étant vérifié à l'instant t^+ , on a en utilisant [éq 4.5-1] :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$Q^{+2}=M^2P^+(2P_{cr}^- - P^+)=M^2(P^- + \Delta P)(P^- - \Delta P)=M^2P^{-(2)}(1-k_0^2\Delta\varepsilon_v^2)=Q^{-(2)}(1-k_0^2\Delta\varepsilon_v^2)$$ **éq 4.5-2**

D'autre part le déviateur des contraintes peut s'écrire :

$$s=s^e-2\mu\ \Delta\tilde{\varepsilon}^p=s^e-2\mu\ \Lambda\frac{\partial f}{\partial s}=s^e-6\mu\ \Lambda\ s$$ **éq 4.5-3**

On en déduit :

$$1+6\ \mu\ \Lambda=\frac{Q^e}{Q}\ ,$$ **éq 4.5-4**

et :

$$s=\frac{Q^-\sqrt{(1-k_0^2\Delta\varepsilon_v^2}}{Q^e}\ s^e$$ **éq 4.5-5**

4.6 Résumé

La discrétisation des équations et de la loi de comportement de manière implicite mène à la résolution de l'équation [éq 4.3-2].

Si $P^-\neq P_{cr}^-$, alors on résout l'équation [éq 4.3-2] dont l'inconnue est $\Delta\varepsilon_v^p$.

On déduit alors :

$$P_{cr}=P_{cr_}\exp(k\Delta\varepsilon_v^p),$$
$$P=P^e\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]+\frac{K_{cam}}{k_0}\left(\exp\left[-k_0\Delta\varepsilon_v^p\right]-1\right),$$
$$\text{puis } s=\frac{s^e}{1+\dfrac{3\mu\Delta\varepsilon_v^p}{M^2\left(P-P_{trac}-P_{cr}\right)}}$$ **éq 4.6-1**

On déduit enfin :

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^p=\frac{3}{2}\frac{\Delta\varepsilon_v^p}{M^2(P-P_{trac}-P_{cr})}s$$ **éq 4.6-2**

Au point critique :

$$\Delta\varepsilon_v^p=0, P_{cr}=P_{cr}^-$$ **éq 4.6-3**

En ce point, il n'y a aucune évolution de l'écrouissage, par contre l'état de contrainte peut continuer à évoluer soit en contractance, soit en dilatance (la tangente au critère est horizontale). Le nouvel état de contraintes se déplace sur la surface de charge de l'état précédent.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Opérateur tangent

Si l'option est : RIGI_MECA_TANG , option utilisée lors de la prédiction, l'opérateur tangent calculé en chaque point de Gauss est dit en vitesse :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D^{elp}_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl}$$

Dans ce cas, D^{elp}_{ijkl} est calculé à partir des équations non discrétisées.

Si l'option est : FULL_MECA , option utilisée quand on réactualise la matrice tangente à chaque itération en mettant à jour les contraintes et les variables internes :

$$d\sigma_{ij} = A_{ijkl}\,d\varepsilon_{kl}$$

Dans ce cas, A_{ijkl} est calculé à partir des équations discrétisées implicitement.

5.1 Opérateur tangent élastique non linéaire

La relation élastique en vitesse s'écrit :

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\dot{P}\,\delta_{ij} + \dot{s}_{ij} = \left(k_0 P + K_{cam}\right) tr\{\dot{\varepsilon}\}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\dot{\tilde{\varepsilon}}\} \qquad \textbf{éq 5.1-1}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(k_0 P + K_{cam} - \frac{2}{3}\mu\right) tr\{\dot{\varepsilon}\}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\dot{\varepsilon}_{ij}\} \qquad \textbf{éq 5.1-2}$$

L'opérateur tangent en élasticité de la loi Cam_Clay noté D^e est donc déduit de l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \sqrt{2}\,\dot{\sigma}_{12} \\ \sqrt{2}\,\dot{\sigma}_{23} \\ \sqrt{2}\,\dot{\sigma}_{31} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_0P+K_{cam}+\frac{4}{3}\mu & k_0P+K_{cam}-\frac{2}{3}\mu & k_0P+K_{cam}-\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ k_0P+K_{cam}-\frac{2}{3}\mu & k_0P+K_{cam}+\frac{4}{3}\mu & k_0P+K_{cam}-\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ k_0P+K_{cam}-\frac{2}{3}\mu & k_0P+K_{cam}-\frac{2}{3}\mu & k_0P+K_{cam}+\frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}}_{D^e} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \sqrt{2}\,\dot{\varepsilon}_{12} \\ \sqrt{2}\,\dot{\varepsilon}_{23} \\ \sqrt{2}\,\dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{éq 5.1-3}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Opérateur tangent plastique en vitesse. Option RIGI_MECA_TANG

L'opérateur tangent global est dans ce cas K_{i-1} (l'option RIGI_MECA_TANG appelée à la première itération d'un nouvel incrément de charge) à partir des résultats connus à l'instant t_{i-1} [bib3].
Si le tenseur des contraintes à t_{i-1} est sur la frontière du domaine d'élasticité, on écrit la condition : $\dot{f}=0$ qui doit être vérifiée conjointement avec la condition $f=0$. Si le tenseur des contraintes à t_{i-1} est à l'intérieur du domaine, $f<0$, alors l'opérateur tangent est l'opérateur d'élasticité.

$$\dot{f}=\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)\dot{\sigma}+\frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\dot{P}_{cr}=0 \qquad \textbf{éq 5.2-1}$$

comme $\dot{P}_{cr}=\frac{\partial P_{cr}}{\partial \varepsilon_v^p}\dot{\varepsilon}_v^p$, alors :

$$\dot{f}=\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)\dot{\sigma}+\frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial \varepsilon_v^p}\dot{\varepsilon}_v^p=0 \qquad \textbf{éq 5.2-2}$$

D'autre part $\dot{\varepsilon}^e=\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}^p$

donc :

$$D^{e^{-1}}\dot{\sigma}=\dot{\varepsilon}-\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \sigma}\ , \qquad \textbf{éq 5.2-3}$$

c'est-à-dire :

$$\dot{\sigma}_{ij}=D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}-\dot{\lambda}\,D^e_{ijkl}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} \qquad \textbf{éq 5.2-4}$$

Le module d'écrouissage plastique s'écrit d'après l'équation [éq 3.5-7] et en utilisant la règle d'écoulement :

$$H_p=\frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial \varepsilon_v^p}\frac{\partial F}{\partial P_{cr}}=-\frac{1}{\dot{\lambda}}\frac{\partial f}{\partial P_{cr}}\frac{\partial P_{cr}}{\partial \varepsilon_v^p}\dot{\varepsilon}_v^p \qquad \textbf{éq 5.2-5}$$

Les équations [éq 5.2-1] et [éq 5.2-5] donnent :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}\dot{\sigma}_{ij}-\dot{\lambda}H_p=0 \qquad \textbf{éq 5.2-6}$$

La multiplication de l'équation [éq 5.2-4] par $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}$ donne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}\dot{\sigma}_{ij}=\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\dot{\varepsilon}-\dot{\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}D^e_{ijkl}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} \qquad \textbf{éq 5.2-7}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les deux équations précédentes permettent de trouver :

$$H_p \dot{\Lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} D^e_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\Lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} D^e_{ijkl} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} \quad \textbf{éq 5.2-8}$$

d'où l'expression du multiplicateur plastique :

$$\dot{\Lambda} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} D^e_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} D^e_{ijkl} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} + H_p} \quad \textbf{éq 5.2-9}$$

Soit H le module élastoplastique défini comme :

$$H = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} D^e_{ijkl} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} + H_p \quad \textbf{éq 5.2-10}$$

Le multiplicateur plastique s'écrit :

$$\dot{\Lambda} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} D^e_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H} \quad \textbf{éq 5.2-11}$$

En remplaçant $\dot{\Lambda}$ par son expression dans l'équation [éq 5.2-4], on obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij} = D^e_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{1}{H} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{mn} D^e_{mnop} \dot{\varepsilon}_{op}\right] . D^e_{ijkl} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} \quad \textbf{éq 5.2-12}$$

On en déduit donc l'opérateur élastoplastique $D^{elp} = D^e - D^p$:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \underbrace{\left[D^e_{ijkl} - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{op} D^e_{ijop} \; D^e_{mnkl} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{mn}\right]}_{D^{elp}} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad \textbf{éq 5.2-13}$$

avec,

$$D^p_{ijkl} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{op} D^e_{ijop} \; D^e_{mnkl} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{mn} \quad \textbf{éq 5.2-14}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Calcul de H :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} = -\frac{2}{3} M^2 \left(P - P_{trac} - P_{cr}\right)\delta_{ij} + 3s_{ij} \text{ ,} \qquad \textbf{éq 5.2-15}$$

qui s'écrit en notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} M^2 \left(P - P_{trac} - P_{cr}\right) + 3s_{11} \\ -\frac{2}{3} M^2 \left(P - P_{trac} - P_{cr}\right) + 3s_{22} \\ -\frac{2}{3} M^2 \left(P - P_{trac} - P_{cr}\right) + 3s_{33} \\ 3\sqrt{2}\, s_{12} \\ 3\sqrt{2}\, s_{23} \\ 3\sqrt{2}\, s_{31} \end{bmatrix} \qquad \textbf{éq 5.2-16}$$

d'où l'expression de :

$$D^e_{ijkl}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} : \begin{bmatrix} -2k_0 M^2 \left(P - P_{trac}\right)\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right) + 6\mu s_{11} \\ -2k_0 M^2 \left(P - P_{trac}\right)\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right) + 6\mu s_{22} \\ -2k_0 M^2 \left(P - P_{trac}\right)\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right) + 6\mu s_{33} \\ 6\mu\sqrt{2}\, s_{12} \\ 6\mu\sqrt{2}\, s_{23} \\ 6\mu\sqrt{2}\, s_{31} \end{bmatrix} \qquad \textbf{éq 5.2-17}$$

et

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} D^e_{ijkl}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{kl} = 4k_0 M^4 \left(P - P_{trac}\right)\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right)^2 + 12\,\mu Q^2 \qquad \textbf{où}$$

$$12\,\mu Q^2 = 18\,\mu\, tr\left(s.s\right) \qquad \textbf{éq 5.2-18}$$

D'après les équations [éq 3.5-7] et [éq 5.2-18], on peut déduire l'expression de H :

$$H = 4M^4 \left(P - P_{trac}\right)\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right)\left(k_0 \left(P - P_{trac} - P_{cr}\right) + kP_{cr}\right) + 12\,\mu Q^2 \qquad \textbf{éq 5.2-19}$$

En posant :

$$A_{ij} = -2k_0 M^2 \left(P - P_{trac}\right)\left(P - P_{trac} - P_{cr}\right)\delta_{ij} + 6\mu s_{ij} \text{ ,} \qquad \textbf{éq 5.2-20}$$

on peut écrire la matrice plastique symétrique suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$D^p=\frac{1}{H}\begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{11}A_{22} & A_{11}A_{33} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{11}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{11}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{11}s_{31} \\ . & A_{22}^2 & A_{22}A_{33} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{22}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{22}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{22}s_{31} \\ . & . & A_{33}^2 & 6\sqrt{2}\,\mu A_{33}s_{12} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{33}s_{23} & 6\sqrt{2}\,\mu A_{33}s_{31} \\ . & . & . & 36\,\mu^2 s_{12}^2 & 36\,\mu^2 s_{12}s_{23} & 36\,\mu^2 s_{12}s_{31} \\ . & . & . & . & 36\,\mu^2 s_{23}^2 & 36\,\mu^2 s_{23}s_{31} \\ . & . & . & . & . & 36\,\mu^2 s_{31}^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{éq 5.2-21}$$

5.3 Opérateur tangent en implicite. Option FULL_MECA

L'opérateur tangent cohérent de l'option FULL_MECA se calcule comme l'opérateur tangent en vitesse pour l'état de contraintes courant.

Néanmoins, des éléments théoriques permettant de le calculer sont données en annexe, au paragraphe 8. A noter, que les équations présentes dans l'annexe supposent que le critère passe par un état de contrainte nulles, P_{trac} et K_{cam} n'y étaient pas encore introduits. Il faut penser à les prendre en compte et au besoin de réactiver ces équations pour l'opérateur tangent cohérent.

6 Paramètres matériaux et variables internes

6.1 Paramètres matériaux

Les paramètres E et v obligatoires sous le mot clé ELAS ne sont pas utilisés par la loi CAM_CLAY. Le mot clé ELAS peut de ce fait être évité si l'utilisateur n'a pas besoin de renseigner α ou ρ .

Les données spécifiques au modèle Cam_Clay sont :

- Le module élastique de cisaillement μ ,
- La pente critique M ,
- La porosité associée à une pression initiale et liée à l'indice des vides initial : $n=\frac{e_0}{1+e_0}$
- La compressibilité initiale K_{cam} ,
- La pression de traction tolérée P_{trac} , (doit être négative)
- Le coefficient de gonflement élastique : κ (qui conduit à k_0),
- Le coefficient de compressibilité plastique : λ (qui conduit à k),
- La pression critique initiale P_{cr0} tel que $P_{cr0}-P_{trac}$ soit égale à la moitié de la pression de consolidation,

Remarque 1 :

Le nombre de données est peu élevé, ce qui rend le modèle très simple. Une des limitations les plus visibles du modèle est l'hypothèse de l'alignement des points critiques sur une droite de pente M . Ceci est d'ailleurs l'expression du concept de frottement interne. On peut aussi interpréter la grandeur M en la reliant à l'angle de frottement interne de Coulomb par la relation : $\sin\phi=\frac{3\mathrm{M}}{6+M}$. Or on sait que pour des matériaux très cohésifs, cet angle varie quand la contrainte moyenne diminue. On constate d'ailleurs que pour un calage de M sur un essai triaxial à une certaine contrainte moyenne, on simule bien avec ce modèle les triaxiaux réalisés avec une contrainte moyenne pas trop différente mais on ne peut pas estimer correctement les paliers plastiques pour une large gamme de pression de

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

confinement (cf. [bib2]). Il est donc nécessaire de recaler M pour plusieurs plages de contrainte moyenne.

Remarque 2 :

L'accroissement des contraintes est relié à l'accroissement des déformations volumique selon l'une ou l'autre des lois de comportement :

Avec Cam_Clay :

$$\Delta P=\left(k_0 P^- + K_{cam}\right)\Delta\varepsilon_v$$

$tr(\Delta\sigma)=3\left(k_0 P^- + K_{cam}\right)\Delta\varepsilon_v$ avec $k_0=\frac{1+e_0}{\kappa}$ où $e_0=\frac{n}{1-n}$; n est la porosité et c'est une donnée matériau.

En élasticité :

$$tr(\Delta\sigma)=\frac{E}{(1-2\nu)}tr(\Delta\varepsilon)=3\mathrm{K}\Delta\varepsilon_v$$

L'analogie entre la partie hydrostatique de Cam_Clay et l'élasticité linéaire **à l'état initial** permet d'écrire :

$$\frac{\left(1+e_0\right)P^-}{\kappa}+K_{cam}=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

E et ν ne sont pas des données matériaux mais plutôt μ le module de cisaillement : $\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}$

Ce qui revient à écrire l'égalité suivante en éliminant E :

$$\frac{\left(1+e_0\right)P^-}{\kappa}+K_{cam}=\frac{2\mu}{3}\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \quad \text{ou} \quad \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}=\frac{3\left(1+e_0\right)P^- + 3\mathrm{K}_{cam}\kappa}{2\,\mu\kappa}$$

et on trouve l'expression de ν :

$$\nu=\frac{3(1+e_0)P^- + 3\,K_{cam}\kappa - 2\mu\kappa}{6(1+e_0)P^- + 6\,K_{cam}\kappa - 2\mu\kappa}$$

au démarrage du calcul, P^- correspond au champ de contraintes initial .

on peut ensuite déduire E à partir de ν : $E=2\mu(1+\nu)$

les conditions suivantes sont à vérifier :

$$0<\nu=\frac{3\left(1+e_0\right)P^- + 3\mathrm{K}_{cam}\kappa - 2\,\mu\kappa}{6\left(1+e_0\right)P^- + 6\mathrm{K}_{cam}\kappa + 2\,\mu\kappa}\leq 0.5 \quad \text{et} \quad E>0$$

si l'une ou l'autre des deux conditions n'est pas satisfaite, un message d'alarme avertit l'utilisateur de la non cohérence des paramètres fournis.

Remarque 3 :

*Si P_{trac} est donné nul:

deux possibilités pour K_{cam} :

1- K_{cam} positif (des contraintes initiales nulles sont permises)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2- K_{cam} nul (il faut absolument initialiser les contraintes)

*Si P_{trac} est donné négatif:
une seule possibilité pour K_{cam} :
* K_{cam} positif comme il faut satisfaire la relation $k_0 P_{trac} + K_{cam} > 0$
(on ne peut initialiser les contraintes et donner une valeur nulle à K_{cam})

6.2 Variables internes

V_1 : pression critique P_{cr}
V_2 : état plastique
V_3 : contrainte de confinement P
V_4 : contrainte équivalente Q
V_5 : déformation plastique volumique ε_v^p
V_6 : déformation plastique équivalente ε_{eq}^p
V_7 : indice des vides e

7 Mise en œuvre d'un calcul avec la loi CAM_CLAY

7.1 Initialisation du calcul

Dans le modèle CAM_CLAY, la loi élastique non-linéaire fait apparaître une contrainte hydrostatique pour une déformation volumique nulle [éq 3.3-3].

L'utilisateur adopte l'un des deux choix suivants :

- Donner au paramètre matériau K_{cam} qui représente une compressibilité initiale une valeur **positive**. Le calcul peut se faire avec un état de contraintes initiales nulles.

- Donner au paramètre matériau K_{cam} qui représente une compressibilité initiale une valeur **nulle**. Initialiser l'état de contraintes selon l'une des deux façons différentes :

  •Effectuer un calcul élastique linéaire en affectant des conditions aux limites telles que le champ de contraintes dans la structure soit une compression hydrostatique uniforme. On extrait de ce calcul le champ de contraintes aux points de Gauss. Ce champ de contraintes est considéré comme l'état initial de la contrainte hydrostatique nécessaire à la loi CAM_CLAY dans le calcul STAT_NON_LINE utilisant le modèle CAM_CLAY.

  •Utiliser l'opérateur CREA_CHAMP pour créer avec l'opération 'AFFE' un champ de contrainte hydrostatique aux points de Gauss, la contrainte dans ce cas est donnée de signe négatif (convention *Aster* pour les compressions) et constitue l'état initial dans le STAT_NON_LINE suivant.

7.2 Exemples de résultats obtenus sur des essais triaxiaux

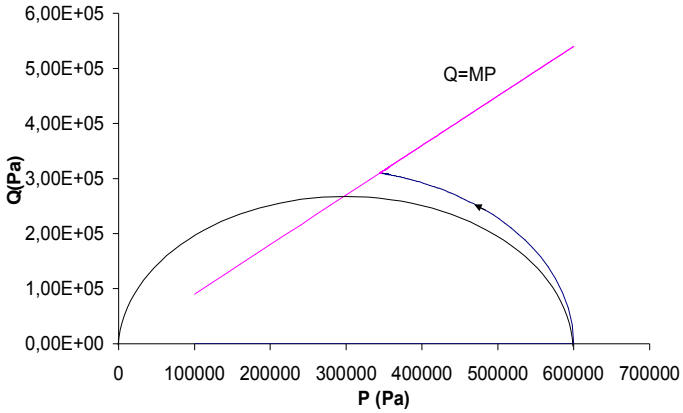
Les figures suivantes montrent des trajets de chargement triaxiaux avec des évolutions de la déformation axiale en fonction du déviateur Q . Elles sont issues de calculs numériques effectués avec le modèle CAM_CLAY implanté dans *Code_Aster*. Ces test ont été effectués en utilisant une modélisation de type KIT_HM en condition non drainée (cette condition nous permet facilement de charger de manière purement déviatorique, la partie hydrostatique du chargement étant reprise par la

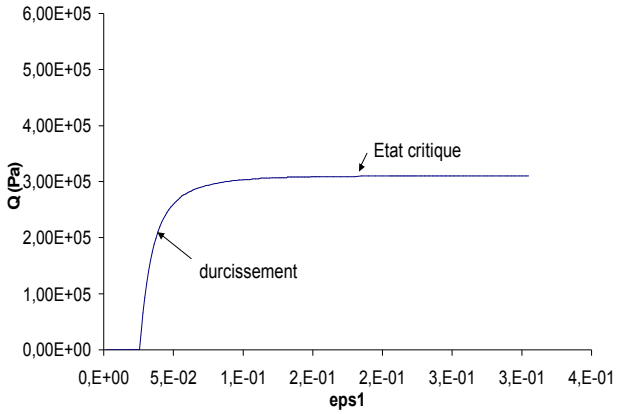
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

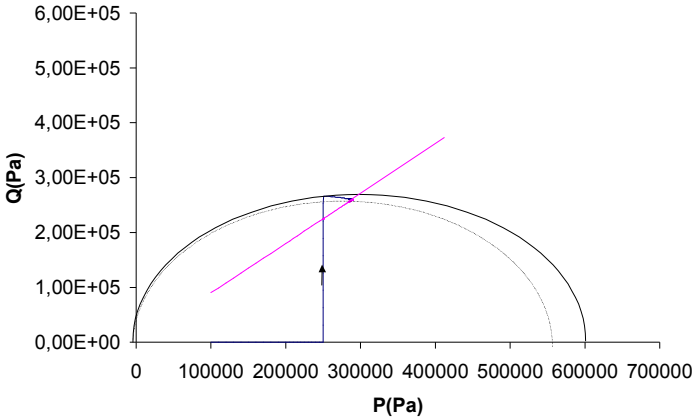
pression de l'eau). Les allures des courbes obtenues numériquement avec *Code_Aster* sont tout à fait comparables aux courbes schématiques présentés dans le papier de Charlez [bib2].

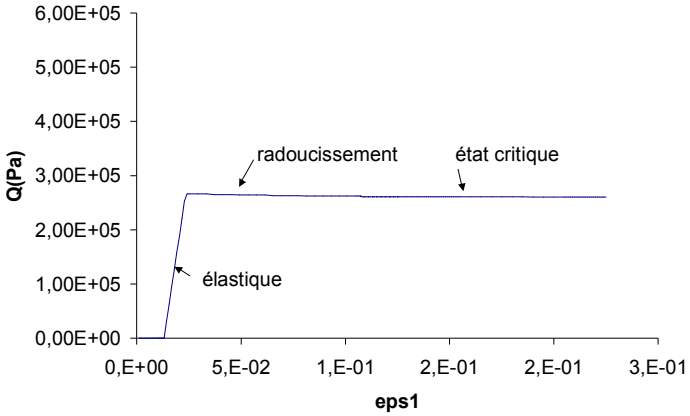
Dans le premier test, le matériau est normalement consolidé, c'est-à-dire que la pression hydrostatique de départ est égale à la pression de consolidation (dans ce cas 6.10^5 Pa). L'écrouissage (positif) commence dès le début de la phase déviatorique, sans phase élastique préliminaire. Le durcissement continue jusqu'à un palier de plasticité parfaite quand on atteint le point critique ($Q=MP$).
Quant aux trois autres tests, la phase déviatorique commence pour une valeur de la contrainte effective moyenne inférieure à la pression de consolidation, le matériau est de ce fait surconsolidé.
Dans le cas où P est supérieure à P_{cr} égale à $3.10^5 Pa$, le point spécifique du chargement coupe la surface de charge avant la droite critique. Il y aura donc trois phases spécifiques : une phase élastique, une phase plastique contractante puis une phase plastique parfaite.
Dans le cas où $P=P_{cr}$, le comportement est plastique parfait juste après la phase élastique.
Dans la cas où P est inférieure à P_{cr} , le point représentatif du chargement coupe la droite critique avant la surface de charge qu'il atteint au cours d'un trajet purement élastique. Dans cette configuration, le comportement est adoucissant et dilatant et l'énergie bloquée diminue. Le point représentatif du chargement rejoint ensuite l'état critique où le matériau entrera en plasticité parfaite.
Le comportement CAM_CLAY ne peut produire un comportement continuement contractant/dilatant. Le point représentatif du chargement est obligé de passer par l'état critique où l'ensemble des paramètres d'écrouissage (déformation volumique plastique, pression critique, énergie bloquée) deviennent stationnaires [bib2].

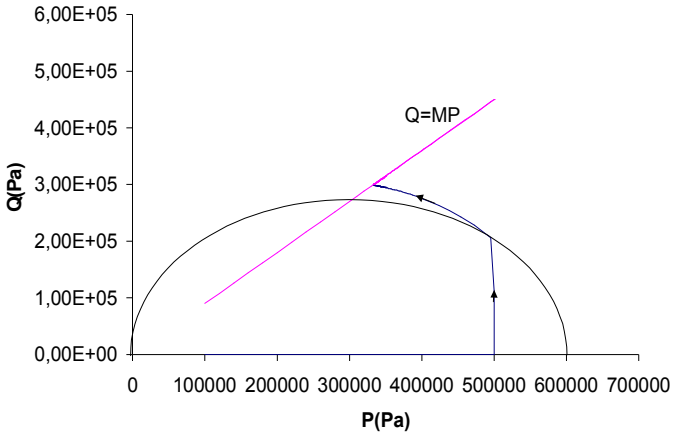
Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

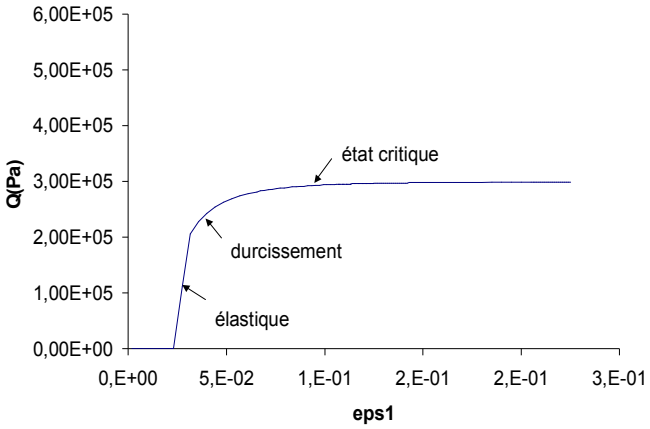


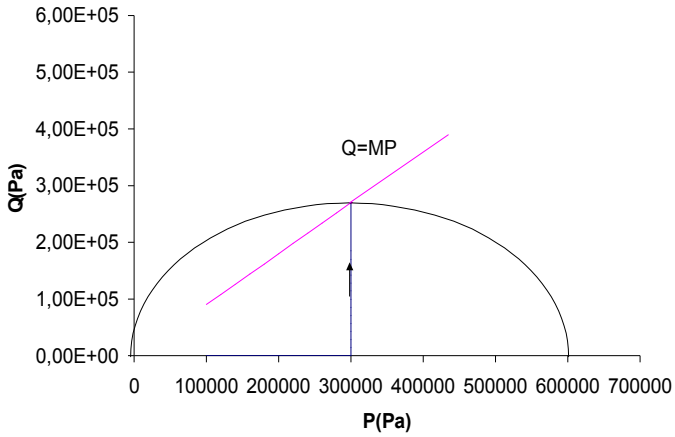


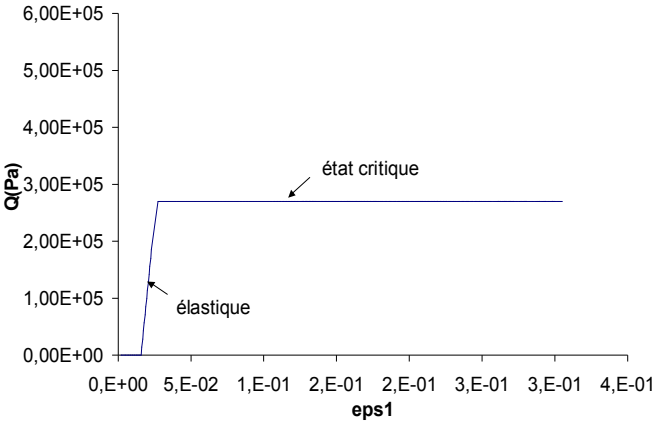












Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Annexe : Opérateur tangent en implicite. Option FULL_MECA

Nous présentons dans cette annexe des éléments de calcul de l'opérateur tangent cohérent.

8.1 Cas général

8.1.1 Traitement de la partie déviatorique

On considère ici que la variation de chargement est purement déviatorique $(\delta P=0)$.
L'incrément de la contrainte déviatorique s'écrit sous la forme :

$$\Delta s_{ij}=2\mu\left(\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij}-\Delta\tilde{\varepsilon}_{ij}^{p}\right) \quad \textbf{éq 8.1.1-1}$$

Autour du point d'équilibre $\left(\sigma^{-}+\Delta\sigma\right)$, on considère une variation δs de la partie déviatorique de la contrainte :

$$\delta s_{kl}=2\mu\left(\delta\tilde{\varepsilon}_{kl}-\delta\tilde{\varepsilon}_{kl}^{p}\right) \quad \textbf{éq 8.1.1-2}$$

Calcul de $\delta\tilde{\varepsilon}_{kl}^{p}$:

On sait que :

$$\Delta\tilde{\varepsilon}_{kl}^{p}=3\Lambda\ s_{kl} \quad \textbf{éq 8.1.1-3}$$

En dérivant cette équation par rapport à la contrainte déviatorique, on obtient :

$$\delta\tilde{\varepsilon}_{kl}^{p}=3\ \delta\ \Lambda\ s_{kl}+3\ \Lambda\ \delta\ s_{kl} \quad \textbf{éq 8.1.1-4}$$

Calcul de $\delta\Lambda$:
On a :

$$\begin{aligned}\Lambda&=\frac{1}{H_p}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right)_{mn}\Delta\sigma_{mn}\right]=\frac{1}{H_p}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{mn}\Delta s_{mn}+\frac{\partial f}{\partial P}\Delta P\right]\\&=\frac{1}{H_p}\left[3s_{mn}\Delta s_{mn}+2M^{2}\left(P-P_{cr}\right)\Delta P\right]\end{aligned} \quad \textbf{éq 8.1.1-5}$$

Si on ne considère que l'évolution de la partie déviatorique de σ $(\delta P=0)$, alors :

$$\delta\ (\Lambda\ H_p)=\delta\ \Lambda H_p+\Lambda\delta H_p=\left[3\delta s_{mn}\Delta s_{mn}+3s_{mn}\delta s_{mn}\right]-2M^{2}\Delta P\delta P_{cr} \quad \textbf{éq 8.1.1-6}$$

Or : $\delta\ P_{cr}=kP_{cr}\ \delta\ \varepsilon_{v}^{P}$.

$$\text{Comme } \Delta\varepsilon_{v}^{p}=2\Lambda M^{2}\left(P-P_{cr}\right),\ \text{on a } \delta\varepsilon_{V}^{p}=2\delta\Lambda M^{2}\left(P-P_{cr}\right)-2M^{2}\Lambda\delta P_{cr}\ \textbf{,} \quad \textbf{éq 8.1.1-7}$$

D'où :

$$2\delta\ \Lambda M^{2}\left(P-P_{cr}\right)=\left[\frac{1}{kP_{cr}}+2\Lambda M^{2}\right]\delta P_{cr}. \quad \textbf{éq 8.1.1-8}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par ailleurs,

$$H_p = 4\,kM^4 PP_{cr}(P-P_{cr}) \text{ et } \delta H_p = 4\,kM^4 P(P-2\mathrm{P}_{cr})\delta P_{cr}. \quad \textbf{éq 8.1.1-9}$$

En injectant cette dernière équation dans l'équation [éq 5.3.1-6], on obtient :

$$\delta \Lambda H_p + \left[4\Lambda\, kM^4 P(P-2\mathrm{P}_{cr}) + 2\mathrm{M}^2 \Delta P\right]\delta P_{cr} = \left[3\delta \mathrm{s}_{mn}\Delta s_{mn} + 3\mathrm{s}_{mn}\delta s_{mn}\right] \quad \textbf{éq 8.1.1-10}$$

En utilisant la relation [éq 5.3.1-8], il vient alors :

$$\delta \Lambda = \frac{\left[3\delta \mathrm{s}_{mn}\Delta s_{mn} + 3\mathrm{s}_{mn}\delta s_{mn}\right]}{(H_p + A)} \quad \textbf{éq 8.1.1-11}$$

avec $A = \left[4\mathrm{k}\ \Lambda M^4 P(P-2\mathrm{P}_{cr}) + 2\mathrm{M}^2 \Delta P\right]\left[\frac{M^2(P-P_{cr})}{\frac{1}{2kP_{cr}} + \Lambda M^2}\right]$

On obtient alors immédiatement la variation de la partie déviatorique de la déformation plastique :

$$\delta\tilde{\varepsilon}^p_{kl} = \frac{9}{(H_p + A)}(\Delta s_{mn}\delta s_{mn} s_{kl} + s_{mn}\delta s_{mn} s_{kl}) + \frac{9}{H_p} s_{mn}\Delta s_{mn}\delta s_{kl} + \frac{6}{H_p} M^2(P - P_{cr})\Delta P\delta s_{kl}$$

éq 8.1.1-12

δs_{ij} s'écrit alors :

$$\delta s_{ij} = 2\mu\delta\{\tilde{\varepsilon}_{ij} - \frac{18\mu}{(H_p + A)}\left[\left(\Delta s_{kl} s_{ij}\delta s_{kl} + s_{kl} s_{ij}\delta s_{kl}\right)\right] - \frac{18\mu}{H_p} s_{kl}\Delta s_{kl}\delta s_{ij} - \frac{12\mu}{H_p} M^2\left(P - P_{cr}\right)\Delta P\delta s_{ij}$$

éq 8.1.1-13

qui devient en séparant les termes en variation de contraintes et le terme en variation de déformation totale :

éq 8.1.1-14

ou en écriture tensorielle :

$$\left\{I_4^d\left(1 + \frac{12\mu}{H_p} M^2\left(P - P_{cr}\right)\Delta P + \frac{18\mu}{H_p}\Delta s : s\right) + \frac{18\mu}{(H_p + A)}(s + \Delta s)\otimes s\right\}\delta s = 2\mu\delta\{\tilde{\varepsilon}\} \quad \textbf{q8.1.1-15}$$

qu'on peut encore écrire en symétrisant le tenseur $(s + \Delta s)\otimes s$:

$$\left\{I_4^d\left(1 + \frac{12\mu}{H_p} M^2\left(P - P_{cr}\right)\Delta P + \frac{18\mu}{H_p}\Delta s : s\right) + \frac{18\mu}{(H_p + A)}\aleph\right\}\delta s = 2\mu\delta\{\tilde{\varepsilon}\} \quad \textbf{éq 8.1.1-16}$$

avec : $\aleph = \frac{1}{2}\left[((s + \Delta s)\otimes s) + (s\otimes(s + \Delta s))^T\right]$

Calcul de $\aleph$, en posant : $T_{ij} = s_{ij} + \Delta s_{ij}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$T \otimes s = \begin{bmatrix} T_{11}s_{11} & T_{11}s_{22} & T_{11}s_{33} & \sqrt{2}T_{11}s_{12} & \sqrt{2}T_{11}s_{23} & \sqrt{2}T_{11}s_{31} \\ T_{22}s_{11} & T_{22}s_{22} & T_{22}s_{33} & \sqrt{2}T_{22}s_{12} & \sqrt{2}T_{22}s_{23} & \sqrt{2}T_{22}s_{31} \\ T_{33}s_{11} & T_{33}s_{22} & T_{33}s_{33} & \sqrt{2}T_{33}s_{12} & \sqrt{2}T_{33}s_{23} & \sqrt{2}T_{33}s_{31} \\ \sqrt{2}T_{12}s_{11} & \sqrt{2}T_{12}s_{22} & \sqrt{2}T_{12}s_{33} & 2T_{12}s_{12} & 2T_{12}s_{23} & 2T_{12}s_{31} \\ \sqrt{2}T_{23}s_{11} & \sqrt{2}T_{23}s_{22} & \sqrt{2}T_{23}s_{33} & 2T_{23}s_{12} & 2T_{23}s_{23} & 2T_{23}s_{31} \\ \sqrt{2}T_{31}s_{11} & \sqrt{2}T_{31}s_{22} & \sqrt{2}T_{31}s_{33} & T_{31}s_{12} & 2T_{31}s_{23} & 2T_{31}s_{31} \end{bmatrix} \quad \textbf{éq 8.1.1-17}$$

$$\aleph = \frac{1}{2}\left[(T \otimes s) + (T \otimes s)^T\right] \quad \textbf{éq 8.1.1-18}$$

Soit :

$$C = \left\{ I_4^d \left(\frac{1}{2\mu} + \frac{6}{H_p} M^2 \left(P - P_{cr}\right) \Delta P + \frac{9}{H_p} \Delta s : s \right) + \frac{9}{(H_p + A)} \aleph \right\} \quad \textbf{éq 8.1.1-19}$$

on pose :

$$c = \frac{9}{H_p} (\Delta s : s) \quad \textbf{éq 8.1.1-20}$$

et

$$d = \frac{6}{H_p} M^2 \left(P - P_{cr}\right) \Delta P \quad \textbf{éq 8.1.1-21}$$

La matrice symétrique C de dimensions (6,6) est trop grande pour être présentée entière, on la décompose en 4 parties C_1 , C_2 , C_3 et C_4 :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

avec

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$C_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu}+c+d+\frac{9}{(H_p+A)}s_{11}T_{11} & \frac{9}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{22}+T_{22}s_{11}) & \frac{9}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{33}+T_{33}s_{11}) \\ \frac{9}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{11}+T_{11}s_{22}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+\frac{9}{(H_p+A)}T_{22}s_{22} & \frac{9}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{33}+T_{33}s_{22}) \\ \frac{9}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{11}+T_{11}s_{33}) & \frac{9}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{33}+T_{33}s_{22}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+\frac{9}{(H_p+A)}T_{33}s_{33} \end{bmatrix}$$

éq 8.1.1-22

$$C_2=\begin{bmatrix} \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{12}+s_{11}T_{12}) & \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{23}+s_{11}T_{23}) & \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{11}s_{13}+s_{11}T_{13}) \\ \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{12}+s_{22}T_{12}) & \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{23}+s_{22}T_{23}) & \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{22}s_{13}+s_{22}T_{13}) \\ \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{12}+s_{33}T_{12}) & \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{23}+s_{33}T_{23}) & \frac{9\sqrt{2}}{2(H_p+A)}(T_{33}s_{13}+s_{33}T_{13}) \end{bmatrix}$$

éq 8.1.1-23

$$C_3=C_2$$

éq 8.1.1-24

$$C_4=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\mu}+c+d+\frac{18}{(H_p+A)}s_{12}T_{12} & \frac{9}{(H_p+A)}(T_{12}s_{23}+T_{23}s_{12}) & \frac{9}{(H_p+A)}(T_{12}s_{23}+T_{23}s_{12}) \\ \frac{9}{(H_p+A)}(T_{23}s_{12}+T_{12}s_{23}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+\frac{18}{(H_p+A)}T_{23}s_{23} & \frac{9}{(H_p+A)}(T_{23}s_{13}+T_{13}s_{23}) \\ \frac{9}{(H_p+A)}(T_{13}s_{12}+T_{12}s_{13}) & \frac{9}{(H_p+A)}(T_{13}s_{23}+T_{23}s_{13}) & \frac{1}{2\mu}+c+d+\frac{18}{(H_p+A)}T_{13}s_{13} \end{bmatrix}$$

éq 8.1.1-25

Calcul du taux de variation de volume :

$$\Delta\varepsilon_v^p=2\mathrm{M}^2\Lambda(P-P_{cr}),\quad \delta\varepsilon_v^p=2\mathrm{M}^2\delta\Lambda(P-P_{cr})-2\mathrm{M}^2\Lambda\delta P_{cr}=B\delta\Lambda=\frac{3\mathrm{B}}{(H_p+A)}(s+\Delta s).\delta s$$

éq 8.1.1-26

avec : $$B=2\mathrm{M}^2(P-P_{cr})-2\mathrm{M}^2\Lambda\frac{M^2(P-P_{cr})}{\frac{1}{2kP_{cr}}+M^2\Lambda}.$$

éq 8.1.1-27

ou en utilisant [éq 5.3.1-11]

$$\delta\varepsilon_v^p=\frac{3\mathrm{B}}{(H_p+A)}(s+\Delta s).\delta s$$

éq 8.1.1-28

On a donc :

$$\delta\varepsilon_{ij}=(C_{ijkl}-\frac{B}{(H_p+A)}(s+\Delta s)_{kl}\delta_{ij})\delta s_{kl}$$

éq 8.1.1-29

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8.1.2 Traitement de la partie hydrostatique

On considère maintenant que la variation de chargement est purement sphérique ($\delta\ s=0$).
L'incrément de P s'écrit sous la forme :

$$\Delta P=P^{-}\exp\left(k_0\,\Delta\varepsilon_v^e\right)-P^{-} \qquad \textbf{éq 8.1.2-1}$$

La dérivation de cette équation donne :

$$\delta P=k_0 P\left(\delta\varepsilon_v-\delta\varepsilon_v^p\right) \qquad \textbf{éq 8.1.2-2}$$

Calcul de $\delta\varepsilon_v^p$:

On sait que :

$$\Delta\varepsilon_v^p=\Lambda 2M^2\left(P-P_{cr}\right) \qquad \textbf{éq 8.1.2-3}$$

En différenciant cette équation, on obtient :

$$\delta\varepsilon_v^p=2\mathrm{M}^2\left(\delta\ \Lambda\left(P-P_{cr}\right)+\Lambda\left(\delta P-\delta P_{cr}\right)\right) \qquad \textbf{éq 8.1.2-4}$$

On connaît l'expression de Λ :

$$\Lambda=\frac{2\mathrm{M}^2\left(P-P_{cr}\right)\Delta P+3\mathrm{s}\Delta\mathrm{s}}{H_p}=\frac{b}{H_p} \qquad \textbf{éq 8.1.2-5}$$

en posant

$$b=2\mathrm{M}^2\left(P-P_{cr}\right)\Delta P+3\mathrm{s}\Delta\mathrm{s} \qquad \textbf{éq 8.1.2-6}$$

En différenciant $\Delta\Lambda$, il vient :

$$\delta\Lambda=\frac{2\mathrm{M}^2}{H_p}\left[\left(P-P_{cr}\right)\delta P+\left(\delta P-\delta P_{cr}\right)\Delta P\right]-\frac{4\,kM^4 b}{H_p^2}\left[\delta\,PP_{cr}\left(2\mathrm{P}-P_{cr}\right)+\delta P_{cr}P\left(P-2\mathrm{P}_{cr}\right)\right]$$

éq 8.1.2-7

On cherche l'expression de δP_{cr} en fonction de $\delta\Lambda$:

On a

$$\delta P_{cr}=kP_{cr}\delta\varepsilon_v^p \qquad \textbf{éq 8.1.2-8}$$

On peut écrire :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\frac{\delta P_{cr}}{kP_{cr}}=\delta \Lambda 2M^2\left(P-P_{cr}\right)+\Lambda 2M^2\left(\delta P-\delta P_{cr}\right) \quad \textbf{éq 8.1.2-9}$$

$$\delta P_{cr}\left(\frac{1+\Lambda 2M^2 kP_{cr}}{kP_{cr}}\right)=\delta \Lambda 2M^2\left(P-P_{cr}\right)+\Lambda 2M^2\delta P \quad \textbf{éq 8.1.2-10}$$

$$\delta P_{cr}=\left(\frac{2\mathrm{M}^2\left(P-P_{cr}\right)kP_{cr}}{1+2\,kP_{cr}\Lambda M^2}\right)\delta\Lambda+\left(\frac{2\Lambda\mathrm{M}^2 kP_{cr}}{1+2\,kP_{cr}\Lambda M^2}\right)\delta P \quad \textbf{éq 8.1.2-11}$$

On pose

$$c=\frac{2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\left(P-P_{cr}\right)}{\left[1+2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\Lambda\right]}\ , \quad \textbf{éq 8.1.2-12}$$

$$a=\frac{2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\Lambda}{\left[1+2\mathrm{M}^2 kP_{cr}\Lambda\right]} \quad \textbf{éq 8.1.2-13}$$

On a alors :

$$\delta P_{cr}=a\delta P+c\delta\Lambda \quad \textbf{éq 8.1.2-14}$$

En remplaçant l'expression de δP_{cr} dans $\delta\Lambda$ [éq 5.3.2-7], on trouve :

$$\begin{aligned}\delta\Lambda=&\left[2\mathrm{M}^2\left(P-P_{cr}\right)\delta P+2\mathrm{M}^2\left(\delta P-c\delta\Lambda-a\delta P\right)\Delta P\right].\frac{1}{H_p}\\&-\frac{4\,kM^4 b}{H_p^2}\left[\delta P P_{cr}\left(2\mathrm{P}-P_{cr}\right)+\left(c\delta\Lambda+a\delta P\right)P\left(P-2\mathrm{P}_{cr}\right)\right]\end{aligned} \quad \textbf{éq 8.1.2-15}$$

En regroupant les termes en $\delta\Lambda$ et ceux en δP , on trouve :

$$\delta\Lambda=\frac{f}{e}\delta P \quad \textbf{éq 8.1.2-16}$$

avec,

$$\begin{aligned}f=&\frac{1}{H_p}\left[2\mathrm{M}^2\left(P-P_{cr}\right)+2\mathrm{M}^2\Delta P-2\,aM^2\Delta P\right]\\&-\frac{4\,kM^4 b}{H_p^2}\left[\left(2\mathrm{P}-P_{cr}\right)P_{cr}+aP\left(P-2\mathrm{P}_{cr}\right)\right]\end{aligned} \quad \textbf{éq 8.1.2-17}$$

$$e=1+\frac{2\,cM^2\Delta P}{H_p}+\frac{4\,bckM^4}{H_p^2}P\left(P-2\mathrm{P}_{cr}\right) \quad \textbf{éq 8.1.2-18}$$

L'expression de $\delta\varepsilon_v^p$ devient donc :

$$\delta\varepsilon_v^p=2\mathrm{M}^2\left[\Lambda-a\Lambda-\Lambda c\frac{f}{e}+\frac{f}{e}\left(P-P_{cr}\right)\right]\delta P \quad \textbf{éq 8.1.2-19}$$

d'où l'expression de $\delta\varepsilon_v$ en fonction de δP :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta P = \frac{k_0 P}{G} \delta \varepsilon_v \qquad \text{éq 8.1.2-20}$$

$$G = 1 + 2\mathrm{M}^2 k_0 P \left(\Lambda - a\Lambda - \Lambda \frac{f}{e} c + \frac{f}{e} \left(P - P_{cr} \right) \right) \qquad \text{éq 8.1.2-21}$$

Calcul de la variation de déformation déviatorique :

$$\delta \tilde{\varepsilon}_{ij} = \delta \tilde{\varepsilon}^p = 3\delta \Lambda s = 3 \frac{f}{e} \delta P s_{ij} \qquad \text{éq 8.1.2-22}$$

On a donc finalement :

$$\delta \varepsilon_{ij} = F_{ij} \delta P \qquad \text{éq 8.1.2-23}$$

avec

$$F = \frac{3\mathrm{f}}{e} s - \frac{G}{3\mathrm{k}_0 P} 1^d \qquad \text{éq 8.1.2-24}$$

8.1.3 Opérateur tangent

L'opérateur tangent relie la variation de contrainte totale à la variation de déformation totale. Etant donné que l'incrément de la déformation totale sous chargement déviatorique s'écrit :

$$\delta \varepsilon_{ij} = \left(C_{ijkl} - \frac{B}{(H_p + A)} (s + \Delta s)_{kl} \delta_{ij} \right) D^1_{klmn} \delta \sigma_{mn} \ , \qquad \text{éq 8.1.3-1}$$

avec :

$$D^1 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{éq 8.1.3-2}$$

la projection dans l'espace déviatorique,

et que sous chargement sphérique on a :

$$\delta \varepsilon_{ij} = F_{ij} D^2_{kl} \delta \sigma_{kl} \qquad \text{éq 8.1.3-3}$$

avec :

$$D^2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{éq 8.1.3-4}$$

la projection hydrostatique, on a alors :

$$\delta \sigma_{ij} = A_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} \qquad \text{éq 8.1.3-5}$$

avec :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$A_{ijkl}=\left[(C_{ijmn}-\frac{B}{(H_p+A)}(s+\Delta s)_{mn}\delta_{ij})\ D_{mnkl}{}^{1}+F_{ij}D_{kl}^{2}\right]^{-1} \qquad \text{éq 8.1.3-6}$$

l'opérateur tangent discrétisé.

8.2 Opérateur tangent au point critique

Si le point de charge est au point critique $\left(P=P_{cr}\right)$, l'expression générale de l'opérateur tangent n'est plus valable. Ceci se manifeste notamment par des divisons par 0 (voir les équations du [§ 5.3.1]). On détaille dans ce qui suit l'opérateur tangent cohérent au point critique en passant comme pour le cas général par la décomposition en partie déviatorique et en partie hydrostatique.

8.2.1 Traitement de la partie déviatorique

Rappelons qu'au point critique, les expressions du multiplicateur plastique Λ et de sa dérivation $\delta\Lambda$ s'écrivent de la façon suivante :

$$\Lambda=\left(\frac{Q^e}{Q}-1\right)/6\mu \qquad \text{et} \qquad \delta\Lambda=\frac{\delta Q^e}{6\mu Q}-\frac{Q^e\,\delta Q}{6\mu Q^2} \qquad \text{éq 8.2.1-1}$$

avec,

$$\delta Q^e=\frac{3}{2}\frac{s^e\delta s^e}{Q^e} \qquad \text{et} \qquad \delta Q=\frac{3}{2}\frac{s\delta s}{Q} \qquad \text{éq 8.2.1-2}$$

d'où l'expression de $\delta\Lambda$:

$$\delta\Lambda=\frac{1}{6\mu}\frac{3}{2}\left[\frac{s^e\delta s^e}{Q^e Q}-\frac{Q^e s\delta s}{Q^3}\right] \qquad \text{éq 8.2.1-3}$$

Rappelons de même l'expression de δs :

$$\delta s_{ij}=2\mu\left(\delta\tilde{\varepsilon}_{ij}-3\delta\Lambda s_{ij}-3\Lambda\delta s_{ij}\right)$$

En remplaçant Λ et $\delta\Lambda$ par leurs expressions, on peut écrire :

$$\delta s_{ij}=2\mu\delta\{\tilde{\varepsilon}_{ij}-\frac{3}{2}\frac{s^e_{kl}\delta s^e_{kl}}{Q^e Q}s_{ij}+\frac{3}{2}\frac{Q^e}{Q^3}s_{kl}\delta s_{kl}s_{ij}-\left(\frac{Q^e}{Q}-1\right)\delta s_{ij}¿ \qquad \text{éq 8.2.1-4}$$

$$\delta s_{kl}\left[\delta_{ijkl}+\frac{Q^e}{Q}\delta_{ijkl}-\delta_{ijkl}-\frac{3}{2}\frac{Q^e}{Q^3}s_{kl}.s_{ij}\right]=2\mu\left[\delta_{ijkl}-\frac{3}{2}\frac{s^e_{kl}.s_{ij}}{Q^e Q}\right]\delta\tilde{\varepsilon}_{kl} \qquad \text{éq 8.2.1-5}$$

ou en écriture tensorielle :

$$\delta s\underbrace{\left[\frac{Q^e}{Q}I_4^d-\frac{3}{2}\frac{Q^e}{Q^3}s\otimes s\right]}_{G}=2\mu\underbrace{\left[I_4^d-\frac{3}{2}\frac{s^e\otimes s}{Q^e Q}\right]}_{H}\delta\tilde{\varepsilon} \qquad \text{éq 8.2.1-6}$$

Comme δs ne dépend pas de $\delta\varepsilon_v$, on peut confondre $\delta\tilde{\varepsilon}$ avec $\delta\varepsilon$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En utilisant le tenseur de projection dans l'espace des contraintes déviatoriques D^1 [éq 5.3.3-2], on peut écrire :

$$\delta\varepsilon = \frac{D^1 . G . H^{-1}}{2\mu} . \delta\sigma$$ **éq 8.2.1-7**

8.2.2 Traitement de la partie hydrostatique

En écriture tensorielle, on a la relation suivante :

$$I^d \delta P = k_0 P \delta\varepsilon_v \quad .$$ **éq 8.2.2-1**

d'après l'équation [éq 5.3.2-2] avec $\delta\varepsilon_v^p = 0$ au point critique.

Comme δP ne dépend pas de $\delta\tilde{\varepsilon}$ alors on peut confondre $\delta\tilde{\varepsilon}$ avec $\delta\varepsilon$.

$$I^d \delta P = k_0 P \delta\varepsilon$$ **éq 8.2.2-2**

En utilisant le tenseur de projection dans l'espace des contraintes hydrostatiques D^2 [éq 5.3.3-4], on peut écrire :

$$\delta\varepsilon = \frac{I^d}{k_0 P} D^2 \delta\sigma$$ **éq 8.2.2-3**

8.2.3 Opérateur tangent

En combinant les contributions des deux parties déviatorique et hydrostatique, on trouve l'écriture de l'opérateur tangent qui relie la variation de la contrainte totale à la variation de la déformation totale au point critique :

$$\delta\varepsilon = \left[\frac{D^1 . G . H^{-1}}{2\mu} + \frac{I^d}{k_0 P} D^2 \right] . \delta\sigma$$

ou

$$\delta\sigma_{ij} = A_{ijkl} \delta\varepsilon_{kl}$$ **éq 8.2.2-4**

avec

$$A_{ijkl} = \left[\frac{D^1 . G . H^{-1}}{2\mu} + \frac{I^d}{k_0 P} D^2 \right]^{-1}$$ **éq 8.2.2-5**

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Bibliographie

- I.B BURLAND, K.H. ROSCOE : On the generalized stress strain behaviour of wet clay, Engineering plasticity Cambridge Heyman-Leckie, 1968.
- Ph. A. CHARLEZ (Rapport Total) : Exemple de modèle poroplastique : le modèle de Cam-Clay.
- M.ABBAS : Algorithme non linéaire quasi-statique. Documentation de référence Aster [R5.03.01].
- J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE : mécanique des matériaux solides, Dunod 1985.
- ROSCOE K.H., SCHOFIELD A.N., WROTH C.P., "On the yielding of soils", Géotechnique, vol. 8, n°1, p. 22-53, 1958.
- SCHOFIELD A.N., WROTH C.P., "Critical state soil mechanics", McGraw Hill, New York, 1968.
- BURLAND J.B., ROSCOE K.H., "On the generalized stress-strain behaviour of wet clay", Engineering Plasticity, Heyman-Leckie, Cambridge, 1968.

10 Vérification

La loi de comportement CAM_CLAY est vérifiée par les tests suivants :

SSNP136	Test de fondation filante avec la loi de CAM_CLAY	[V6.03.136]
SSNV160	Essai hydrostatique avec la loi CAM_CLAY	[V6.04.160]
SSNV202	Essai œdométrique drainé avec la loi de CAM_CLAY	[V6.04.202]
WTNV122	Essai triaxial non drainé avec la loi CAM_CLAY	[V7.31.122]

11 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6.4	J.EL-GHARIB, G.DEBRUYNE EDF-R&D/AMA	Texte initial
7.3	J.El-Gharib, EDF-R&D/AMA	Opérateur tangent pour le point critique
9.4	J.El-Gharib, EDF-R&D/AMA	Modification opérateur tangent, ajout de variables internes, cf. fiches REX 10585 et 10700

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)