Modélisation statique et dynamique des poutres en grandes rotations

Résumé :
Cette note donne une formulation mécanique des poutres en grands déplacements et grandes rotations mais avec un comportement élastique. La difficulté essentielle de l'analyse des rotations tient à ce qu'elles ne sont pas commutables et ne constituent pas un espace vectoriel, mais une variété.

A tout instant, la configuration d'une section droite de poutre est définie par le vecteur-déplacement de son centre de gravité et le vecteur-rotation du système des axes principaux d'inertie par rapport à une position de référence. Comme en théorie classique des poutres, les efforts intérieurs sont réduits à leur résultante et leur moment sur la ligne des centres des sections. On définit les déformations associées.

La linéarisation des efforts intérieurs par rapport aux déplacements conduit à la matrice de rigidité habituelle, qui est symétrique, et, à cause des grands déplacements et rotations, à la matrice de rigidité géométrique, qui est quelconque.

La linéarisation des forces d'inertie mène, pour le mouvement de translation, à la matrice de masse habituelle qui est symétrique et, pour le mouvement de rotation, à une matrice beaucoup plus compliquée et sans aucune symétrie.

Le schéma d'intégration temporelle est celui de Newmark.

Cette modélisation a été testée sur cinq problèmes de référence : trois de statique et deux de dynamique.

Ce travail a été entrepris dans le cadre d'un développement d'outils de modélisation pour les composants des lignes et des postes. Le but de la modélisation est l'étude dynamique des conducteurs munis d'**espaceurs** (pour les lignes) ou de **descentes sur appareillages** (pour les postes) et soumis aux forces de Laplace résultant de courants de court-circuit.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

1 Notations....4
2 Introduction....6
3 Cinématique d'une poutre en rotations finies....7
4 Vecteur et opérateur de rotation....8
4.1 Vecteur-rotation....8
4.2 Opérateur de rotation....8
5 Passage des axes locaux aux axes généraux....10
6 Efforts intérieurs, déformations et loi de comportement....11
6.1 Efforts intérieurs....11
6.2 Variation de courbure en un point de la ligne des centres....11
6.3 Travail virtuel dans la poutre et vecteur des déformations....12
6.4 Loi de comportement....13
7 Forces d'inertie élémentaires....15
8 Équation du mouvement et déroulement d'un calcul....16
8.1 Équation du mouvement non amorti....16
8.2 Déroulement d'un calcul....16
9 Linéarisation des équations du mouvement....17
9.1 Matrices de rigidité....17
9.2 Matrices d'inertie....18
9.2.1 Différentiation de l'inertie de translation....19
9.2.2 Différentiation de l'inertie de rotation....19
9.2.2.1 Termes provenant de la différentiation de....19
9.2.2.2 Termes provenant de la différentiation de et....19
10 Mise en œuvre par éléments finis....21
10.1 Matrice de déformation et efforts intérieurs....21
10.2 Matrices de rigidité....21
10.3 Forces d'inertie....22
10.4 Matrice d'inertie....22
10.5 Forces extérieures données....23
10.6 Système linéaire d'itération....23
10.7 Mise à jour du déplacement, de la vitesse et de l'accélération....24
10.7.1 Mouvement de translation....24
10.7.2 Mouvement de rotation....24
10.8 Mise à jour du vecteur variation de courbure....24
10.9 Initialisation avant les itérations....25
10.9.1 Mouvement de translation....25
10.9.2 Mouvement de rotation....25
11 Organisation schématique d'un calcul....27

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11.1 Calcul statique....27
11.2 Calcul dynamique....29
12 Utilisation par le Code_Aster....30
13 Simulations numériques....31
13.1 Poutre droite encastrée soumise à un moment concentré en extrémité (cas-test SSNL103)...31
13.2 Arc encastré-rotulé chargé au sommet....31
13.3 Arc circulaire de 45° encastré et soumis en extrémité à une force perpendiculaire à son plan.32
13.4 Mouvement d'une potence....33
13.5 Mise en rotation d'un bras de robot....36
14 Bibliographie....38
15 Description des versions du document....38
Annexe 1 : Quelques définitions et résultats concernant les matrices antisymétriques d'ordre 3....39
Annexe 2 : Traitement des forces d'amortissement....40
Annexe 3 : Algorithme de Newmark en grandes rotations....42
Annexe 4 : Calcul des différentielles de Fréchet....44
Annexe 5 : Compléments sur le calcul des matrices de rigidité....45
Annexe 6 : Principe du calcul itératif des rotations....46
Annexe 7 : Nécessité du transport dans un espace de référence pour les opérations vectorielles relatives au mouvement de rotation....48
Annexe 8 : Utilisation des quaternions en modélisation des grandes rotations [bib14] [bib15]....49

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Notations

$\wedge$	symbole du produit vectoriel.
$\theta\wedge$	opérateur de multiplication par le vecteur θ à gauche.
q'	dérivée de q par rapport à l'abscisse curviligne.
$\dot{q}$	dérivée de q par rapport au temps.
s	abscisse curviligne sur la ligne des centres des sections.
$\hat{\mathbf{u}}$	matrice antisymétrique d'ordre 3 associée de vecteur axial $\mathbf{u}$.
$\mathbf{1}$	matrice unité d'ordre 3.
$Df.\Delta x$	dérivée directionnelle de f dans la direction Δx
$\left[\frac{d}{ds}\mathbf{1}\right]$	matrice diagonale $\mathbf{DIAG}\left[\frac{d}{ds},\frac{d}{ds},\frac{d}{ds}\right]$.
$A, I_{1,2 \text{ ou } 3}$	aire et moments d'inertie par rapport aux axes principaux 1, 2 ou 3 de la section droite.
$\mathbf{B}$	matrice de déformation.
$\mathbf{C}$	matrice de comportement.
E, G, ρ	module d'Young et de rigidité au cisaillement, masse volumique.
$\mathbf{e}_{i\ i=1,3}$	axes généraux de coordonnées.
$\mathbf{E}_i(s)_{i=1,3}$	axes principaux d'inertie de la section d'abscisse s en position de référence.
$\overline{\mathbf{f}}(s,t)$	force extérieure linéique exercée sur la poutre.
$\mathbf{f}(s,t)$	force dans la poutre à l'abscisse s et à l'instant t.
$\mathbf{F}(s,t)$	$\mathbf{R}^T(s,t)\mathbf{f}(s,t)$.
$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	forces extérieures données aux nœuds.
$\mathbf{F}_{\text{iner}}, \mathbf{F}_{\text{int}}$	forces d'inertie et efforts intérieurs aux nœuds.
$\mathbf{I}_\rho$	tenseur d'inertie d'une longueur unité de poutre en position déformée, exprimé dans les axes généraux.
$\mathbf{J}_\rho$	tenseur d'inertie d'une longueur unité de poutre en position de référence, exprimé dans les axes généraux.
$\overline{\mathbf{m}}(s,t)$	moment extérieur linéique exercé sur la poutre.
$\mathbf{m}(s,t)$	moment dans la poutre à l'abscisse s et à l'instant t.
$\mathbf{M}(s,t)$	$\mathbf{R}^T(s,t)\mathbf{m}(s,t)$.
N_i	fonction de forme relative au nœud i.
$\mathbf{R}(s,t)$	opérateur ou matrice, en axes généraux, de rotation de la section droite d'abscisse s, de la configuration de référence à celle à l'instant t.
$\mathbf{R}_o(s)$	rotation faisant passer des axes généraux aux axes principaux d'inertie de la section d'abscisse s en configuration de référence.
$\mathbf{R}_{\text{tot}}(s,t)$	$\mathbf{R}(s,t)\mathbf{R}_o(s)$.
$SO(3)$	groupe des opérateurs de rotation dans l'espace à 3 dimensions.
$\mathbf{t}_i(s,t)_{i=1,3}$	axes principaux d'inertie de la section d'abscisse s à l'instant t.
$\mathbf{x}_o(s,t)$	position, à l'instant t, du centre de la section droite d'abscisse s.
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathbf{x}_o'-\mathbf{t}_1$.
$\mathbf{E}$	$\mathbf{R}^T\boldsymbol{\varepsilon}$.
Π	$\begin{pmatrix}\mathbf{R}_{\text{tot}} & 0\\ 0 & \mathbf{R}_{\text{tot}}\end{pmatrix}$ position de la section d'abscisse s l'instant t, d finie par le vecteur position $\mathbf{x_0}$ du centre et le vecteur rotation Ψ

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$\boldsymbol{\phi}(s,t)$	$\begin{Bmatrix}\mathbf{x}_o(s,t)\\ \boldsymbol{\Psi}(s,t)\end{Bmatrix}$
$\delta\boldsymbol{\phi}(s)$	$\begin{Bmatrix}\Delta\mathbf{x}_o(s)\\ \Delta\boldsymbol{\Psi}(s)\end{Bmatrix}$: déplacement virtuel à l'abscisse s .
$\Delta\boldsymbol{\phi}(s)$	$\begin{Bmatrix}\Delta\mathbf{x}_o(s)\\ \Delta\boldsymbol{\Psi}(s)\end{Bmatrix}$: correction de déplacement à l'abscisse s .
$\boldsymbol{\chi}(s,t)$	vecteur définissant, à l'abscisse s et à l'instant t , la variation de courbure par rapport à la configuration de référence.
$\mathbf{X}$	$\mathbf{R}^T\boldsymbol{\chi}$.
$\boldsymbol{\Psi}(s,t)$	vecteur rotation, à l'instant t , de la section d'abscisse s par rapport à sa position de référence.
$\boldsymbol{\Psi}_{i-1,i}^{n}$	vecteur rotation entre l'instant $i-1$ et l'itération n de l'instant i .
$\boldsymbol{\omega}_i^n$	vitesse angulaire d'une section de poutre calculée à l'itération n de l'instant i .
$\mathbf{Q},\mathbf{Q}^{-1}$	opérateur de passage d'un vecteur rotation au quaternion associé et son inverse.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Introduction

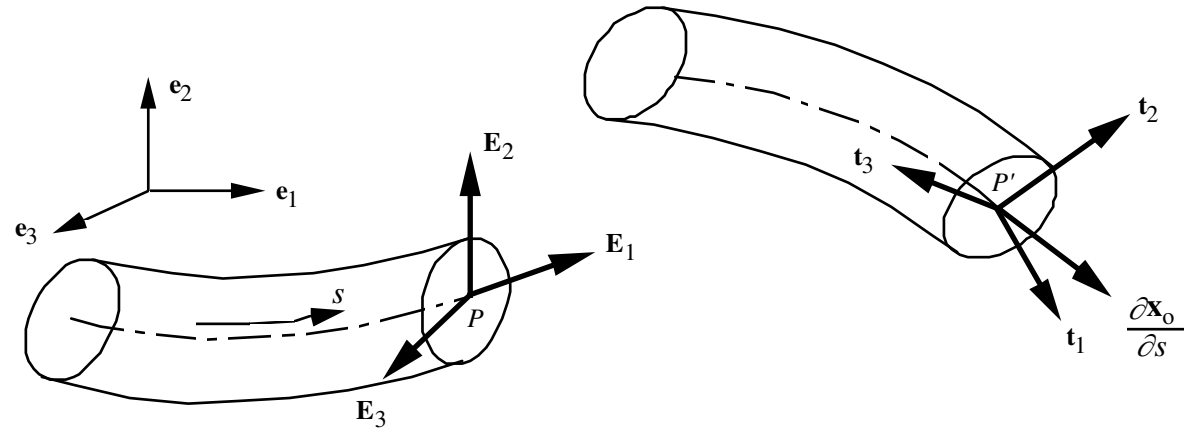
La difficulté essentielle de la mécanique des poutres en grands déplacements réside dans la formulation des rotations. La rotation d'une section par rapport à une configuration de référence est définie par le vecteur-rotation ([bib3], [bib4] et [bib5]). Les quaternions sont utilisés pour la mise à jour de ce vecteur.
Dans [bib4] et [bib5], l'incrément de rotation est exprimé dans la configuration de référence (schéma lagrangien total). Le calcul des matrices de masse est compliqué et ne peut d'ailleurs être tout à fait mené à son terme. Mais finalement, toutes les matrices utilisées sont symétriques.

Dans [bib1] à [bib3], l'incrément de rotation est exprimé dans la dernière configuration calculée (schéma lagrangien actualisé). C'est ce schéma que nous avons choisi. Le calcul des matrices s'achève sans difficulté excessive mais elles ne sont pas symétriques.

A la différence de [bib3], nous avons exprimé les vitesses et les accélérations angulaires dans les axes généraux et non dans des axes locaux. Les matrices sont ainsi plus compliquées, mais on évite l'ambiguïté qui apparaît au raccord de deux poutres non colinéaires.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Cinématique d'une poutre en rotations finies



(a) Position de référence **(b) Position à l'instant t**

Figure 3-a : Évolution d'un tronçon de poutre

Suivons l'évolution d'un tronçon de poutre de sa position initiale - ou **de référence** - [fig 3-a] (a) à sa position déformée à l'instant t [fig 3-a] (b).

La section droite du centre P de la poutre en position de référence est repérée par l'abscisse curviligne s de P sur la ligne des centres (ou fibre neutre). On attache à cette section le trièdre orthonormé $\mathbf{E}_1\ \mathbf{E}_2\ \mathbf{E}_3$: $\mathbf{E}_1$ est la tangente unitaire de la ligne des centres en P; $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ sont dirigés suivant les axes principaux d'inertie de la section.

Comme dans [bib1] à [bib5], on fait l'hypothèse qu'au cours du mouvement les sections initialement droites restent planes et ne changent pas de forme.
De l'instant 0 à l'instant t :

- P vient en P' et la position de P' est définie par le vecteur $\mathbf{x}_o(s,t)$;
- le trièdre orthonormé $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ devient le trièdre orthonormé $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$. $\mathbf{t}_2$ et $\mathbf{t}_3$ sont toujours dirigés suivant les axes principaux d'inertie de la section et $\mathbf{t}_1$ est toujours normal unitaire à cette section. Mais $\mathbf{t}_1$ n'est pas forcément tangent à la ligne des centres en P' : autrement dit, il peut y avoir, en position déformée, un glissement dû au cisaillement, comme dans le modèle de Timoshenko.

L'état de la section à l'instant t est donc défini par :

- le vecteur $\mathbf{x}_o(s,t)$, qui donne la position du centre de gravité ;
- le vecteur-rotation qui fait passer du trièdre $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ au trièdre $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$, et qui est défini en [§4.1].

L'ensemble de ces deux vecteurs constitue le vecteur $\boldsymbol{\phi}(s,t)$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Vecteur et opérateur de rotation

L'annexe 1 donne des résultats préalables concernant les matrices antisymétriques d'ordre 3.

4.1 Vecteur-rotation

Supposons que, dans le système d'axes généraux $P\ \mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3$ [fig 4.1-a], le point M' se déduise de M par la rotation d'angle α autour de l'axe passant par P et de vecteur unitaire $\mathbf{u}$. Posons :

$$\Psi = \alpha\,\mathbf{u}$$

Ψ est appelé le **vecteur-rotation** faisant passer de M à M'.

D'après la formule d'Euler-Rodrigues [bib6] p. 186 et [bib7] :

$$\vec{PM'} = \vec{PM} + \sin\alpha\left(\mathbf{u}\wedge\vec{PM}\right) + \left(1-\cos\alpha\right)\left[\mathbf{u}\wedge\left[\mathbf{u}\wedge\vec{PM}\right]\right].$$

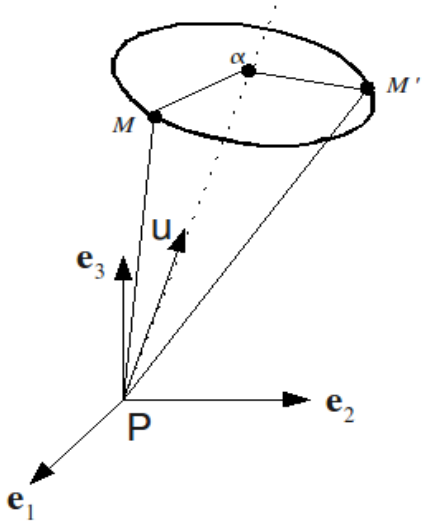


Figure 4.1-a : Représentation d'une rotation finie

En général, le vecteur-rotation du produit de deux rotations **n'est pas** la somme géométrique des vecteurs-rotation composants. Le cas 2D est une exception particulièrement simple : les vecteurs-rotation, perpendiculaires au plan, s'ajoutent algébriquement.

4.2 Opérateur de rotation

Compte tenu de [éq An1-3], l'équation précédente s'écrit :

$$\vec{PM'} = \left[\mathbf{1} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{u}} + \left(1-\cos\alpha\right)\hat{\mathbf{u}}^2\right]\vec{PM}$$

L'expression entre crochets définit l'**opérateur de rotation** $\mathbf{R}$ faisant passer de PM à PM' :

$$\mathbf{R} = \mathbf{1} + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{u}} + \left(1-\cos\alpha\right)\hat{\mathbf{u}}^2. \qquad \textbf{éq 4.2-1}$$

On appelle "paramètres d'Euler" de la rotation les quatre nombres suivants :

$$e_0 = \cos\frac{\alpha}{2} \qquad e_1 = \sin\frac{\alpha}{2}u_1$$

$$e_2 = \sin\frac{\alpha}{2}u_2 \qquad e_3 = \sin\frac{\alpha}{2}u_3 \qquad \textbf{éq 4.2-2}$$

On a évidemment :

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1.$$

Posons :

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \sin\frac{\alpha}{2}\,u.$$

En utilisant la relation [éq A1-4], on met aisément l'expression [éq 4.2-1] de $\mathbf{R}$ sous la forme :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{R}=\left(2e_0^2-1\right)\mathbf{1}+2\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^T+e_0\hat{\mathbf{e}}\right). \qquad \textbf{éq 4.2-3}$$

D'autre part, remplaçant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, au second membre de [éq 4.2-1], par leurs développements en séries entières, il vient :

$$\mathbf{R}=\mathbf{1}\quad+\left[\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}+...+\left(-1\right)^{p-1}\frac{\alpha^{2p-1}}{\left(2p-1\right)!}+...\right]\hat{\mathbf{u}}$$
$$+\left[\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{\alpha^4}{4!}+\frac{\alpha^6}{6!}+...+\left(-1\right)^{p-1}\frac{\alpha^{2p}}{\left(2p\right)!}\right]\hat{\mathbf{u}}^2$$

soit, en utilisant [éq A1-5] et [éq A1-6], la **forme exponentielle** de l'opérateur de rotation :

$$\mathbf{R}=\mathbf{1}+\alpha\hat{\mathbf{u}}+\frac{\left(\alpha\hat{\mathbf{u}}\right)^2}{2!}+...+\frac{\left(\alpha\hat{\mathbf{u}}\right)^p}{p!}+... \qquad \textbf{éq 4.2-4}$$
$$=\exp\left(\alpha\hat{\mathbf{u}}\right)=\exp\left(\hat{\mathbf{\Psi}}\right).$$

Il apparaît sur [éq 4.2-4] que lorsque $\|\mathbf{\Psi}\|\to 0$,

$$\mathbf{R}\approx\mathbf{1}+\mathbf{\Psi}\wedge. \qquad \textbf{éq 4.2-5}$$

$\mathbf{R}=\exp\left(\alpha\hat{\mathbf{u}}\right)$ ne se calcule évidemment pas par le développement [éq 4.2-4], mais par l'expression [éq 4.2-1].

Puisque $\hat{\mathbf{u}}^T=-\hat{\mathbf{u}}$, la transposition de tous les termes du second membre de [éq 4.2-4] donne :

$\left[\exp\left(\hat{\mathbf{\Psi}}\right)\right]^T=\exp\left(-\hat{\mathbf{\Psi}}\right)$, soit : **éq 4.2-6**

$$\mathbf{R}^T=\mathbf{R}^{-1}$$

et :

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T=1 \qquad \textbf{éq 4.2-7}$$

Les opérateurs de rotation, orthogonaux d'après l'équation [éq 4.2-7], forment un groupe par rapport à l'opération de multiplication - non commutatif en 3D - appelé **groupe de Lie** et désigné par $SO\left(3\right)$ (Special Orthogonal group).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Passage des axes locaux aux axes généraux

Les composantes des vecteurs sont exprimées dans les axes généraux $\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3$ [fig 3-a]. Les matrices des opérateurs qui les relient ne sont donc valables que dans ces axes. Mais la mécanique des poutres se formule beaucoup plus simplement dans les axes principaux d'inertie locaux $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$ en configuration actuelle. On est donc amené à faire le changement d'axes du trièdre général $\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3$ au trièdre local $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$ par le produit $\mathbf{R}_{\text{tot}}$ de deux rotations :

- la rotation $\mathbf{R}_o$, invariable, qui amène les axes généraux $(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)$ sur les axes locaux en position de référence $(\mathbf{E}_1\ \mathbf{E}_2\ \mathbf{E}_3)$;
- la rotation $\mathbf{R}$, dépendant du temps, qui amène le trièdre $(\mathbf{E}_1\ \mathbf{E}_2\ \mathbf{E}_3)$ sur le trièdre local en position déformée actuelle $(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3)$, soit :

$$\mathbf{R}_{\text{tot}}=\mathbf{R}\mathbf{R}_o \qquad \textbf{éq 5-1}$$

Étant donné un vecteur $\mathbf{v}$, de composantes connues dans le trièdre général, ses composantes dans le trièdre local sont les composantes dans le trièdre général du vecteur :

$$\mathbf{V}=\mathbf{R}_{\text{tot}}^{T}\mathbf{v}. \qquad \textbf{éq 5-2}$$

On peut donc remplacer les calculs portant sur des vecteurs exprimés en axes locaux dans la configuration actuelle, par les mêmes calculs portant sur les mêmes vecteurs tournés de $\mathbf{R}_{\text{tot}}^{T}$ et exprimés en axes généraux. Autrement dit, cette rotation $\mathbf{R}_{\text{tot}}^{T}$ permet de remplacer les calculs en axes locaux de la configuration actuelle, par les mêmes calculs en axes généraux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Efforts intérieurs, déformations et loi de comportement

On se place dans le cadre de la théorie des poutres. Les efforts et les déformations sont définis par leurs éléments de réduction sur la ligne des centres de gravité des sections. Ainsi, le travail virtuel dans la poutre se calcule par une intégrale curviligne simple le long de cette ligne.

6.1 Efforts intérieurs

On appelle efforts intérieurs sur la section de centre P' et de normale $\mathbf{t}_1$ les efforts qu'exerce sur cette section la partie de la poutre située dans la direction de $\mathbf{t}_1$ [fig 6.1-a]. Ces efforts forment un torseur dont les éléments de réduction en P' sont : la résultante $\mathbf{f}$, le moment résultant $\mathbf{m}$

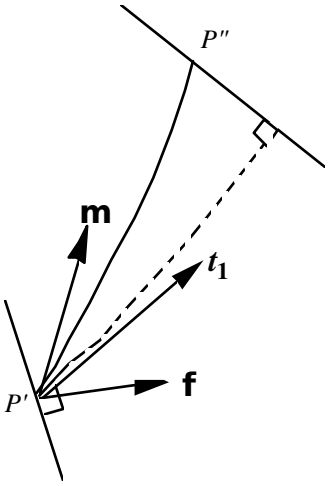


Figure 6.1-a : Tronçon de poutre réduit à la ligne des centres

Si $\bar{\mathbf{f}}$ et $\bar{\mathbf{m}}$ sont respectivement la force et le moment extérieurs donnés par unité de longueur non déformée $\bar{\mathbf{f}}$ et $\bar{\mathbf{m}}$ sont supposés indépendants de la configuration, c'est-à-dire "conservatifs" ou "non-suiveurs" -, l'équilibre statique du tronçon de poutre $P'\ P''$ de longueur ds s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s}+\bar{\mathbf{f}}=0$$
$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial s}+\frac{\partial \mathbf{x}_o}{\partial s}\wedge\mathbf{f}+\bar{\mathbf{m}}=0.$$

éq 6.1-1

6.2 Variation de courbure en un point de la ligne des centres

Les axes locaux de la section d'abscisse s se déduisent des axes généraux par la relation [éq 5-1] :

$$\mathbf{t}_i(s)=\mathbf{R}(s).\mathbf{R}_o(s)\mathbf{e}_i. \qquad \textbf{éq 6.2-1}$$

En dérivant par rapport à s :

$$\mathbf{t}_i{}'=\left(\mathbf{R}'\mathbf{R}_o+\mathbf{R}\mathbf{R}_o{}'\right)\mathbf{e}_i,$$

soit, en inversant la relation [éq 6.2-1] :

$$\mathbf{t}_i=\left(\mathbf{R}'\mathbf{R}^T+\mathbf{R}\mathbf{R}_o{}'\mathbf{R}_o^T\mathbf{R}^T\right)\mathbf{t}_i\ .$$

Posons :

$$\mathbf{R}'\mathbf{R}^T=\hat{\chi} \qquad \textbf{éq 6.2-2}$$

La matrice $\hat{\chi}$ est antisymétrique car la dérivation par rapport à s de [éq 4.2-7] donne :

$$\hat{\chi}+\hat{\chi}^T=0\ .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On vérifie que la matrice $\hat{\boldsymbol{\chi}}_0$ définie par :

$$\hat{\boldsymbol{\chi}}_o = \mathbf{R}\mathbf{R}_o' \mathbf{R}_o^T \mathbf{R}^T$$

est aussi antisymétrique.

Donc, en faisant intervenir les vecteurs axiaux $\boldsymbol{\chi}$ et $\boldsymbol{\chi}_0$:

$$\mathbf{t}_i' = (\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}_o) \wedge \mathbf{t}_i$$

- $ds\,\boldsymbol{\chi}_o$ est le vecteur rotation qui fait passer de $\mathbf{t}_i(s)$ à $\mathbf{t}_i(s+ds)$ lorsque la poutre subit une rotation **uniforme** $(\mathbf{R}' = 0)$ de sa position de référence à sa position actuelle. $\boldsymbol{\chi}_o(s)$ caractérise la **courbure de la configuration de référence** à l'abscisse s .
- $ds\,\boldsymbol{\chi}$ est l'accroissement de rotation de $\mathbf{t}_i(s)$ à $\mathbf{t}_i(s+ds)$ dû à la variation de $\mathbf{R}$ le long de la poutre. C'est ce vecteur $\boldsymbol{\chi}$ qui caractérise la **variation de courbure** entre la configuration de référence et la configuration déformée actuelle.

6.3 Travail virtuel dans la poutre et vecteur des déformations

Ce paragraphe est l'extension au cas tridimensionnel d'une démarche faite dans [bib8] sur les poutres planes.

La configuration de la poutre à l'instant t est définie [§3] par le champ $\boldsymbol{\Phi}(s,t)$:

$$\boldsymbol{\Phi}(s,t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x_0}(s,t) \\ \boldsymbol{\Psi}(s,t) \end{Bmatrix} .$$

Calculons le travail W des forces extérieures linéiques $\overline{\mathbf{f}}$ et $\overline{\mathbf{m}}$ dans le déplacement virtuel suivant :

$$\delta\boldsymbol{\Phi}(s) = \begin{Bmatrix} \delta\,\mathbf{x}_o(s) \\ \delta\boldsymbol{\Psi}(s) \end{Bmatrix} .$$

On a évidemment :

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \left(\overline{\mathbf{f}} . \delta\,\mathbf{x}_o + \overline{\mathbf{m}} . \delta\boldsymbol{\Phi} \right) ds .$$

Les équations d'équilibre [éq 6.1-1] permettent de remplacer les forces extérieures $\overline{\mathbf{f}}$ et $\overline{\mathbf{m}}$ par les efforts intérieurs $\mathbf{f}$ et $\mathbf{m}$:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \left[-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s} . \delta\,\mathbf{x}_o - \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial s} . \delta\boldsymbol{\Psi} - \left(\frac{\partial \mathbf{x}_o}{\partial s} \wedge \mathbf{f} \right) . \delta\boldsymbol{\Psi} \right] ds ,$$

soit, par intégration par parties des deux premiers termes :

$$W = -\left[\mathbf{f} . \delta\,\mathbf{x}_o + \mathbf{m} . \delta\boldsymbol{\Psi} \right]_1^2 + \int_{s_1}^{s_2} \left[\mathbf{f} . \delta\,\mathbf{x}_o' + \mathbf{m} . \delta\boldsymbol{\Psi}' - (\mathbf{x}_o' \wedge \mathbf{f}) . \delta\boldsymbol{\Psi} \right] \mathrm{ds} .$$

Si l'on désigne par W_{ext} le travail total des forces extérieures sur la poutre - le long et en extrémités - l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ext}} &= \int_{s_1}^{s_2} \left(\overline{\mathbf{f}} . \delta\,\mathbf{x}_o + \overline{\mathbf{m}} . \delta\boldsymbol{\Psi} \right) \mathrm{ds} + \left[\mathbf{f} . \delta\,\mathbf{x}_o + \mathbf{m} . \delta\boldsymbol{\Psi} \right]_1^2 \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \left[\mathbf{f} . \left(\delta\,\mathbf{x}_o' - \delta\boldsymbol{\Psi} \wedge \mathbf{x}_o' \right) + \mathbf{m} . \delta\boldsymbol{\Psi}' \right] ds . \end{aligned} \qquad \textbf{éq 6.3-1}$$

D'après le théorème des travaux virtuels pour les milieux continus, le second membre est le travail virtuel des efforts intérieurs, qu'on note W_{int} . Suivant l'idée de [bib 8], cherchons à mettre les coefficients de $\mathbf{f}$ et de $\mathbf{m}$ sous forme de **l'accroissement virtuel de deux vecteurs.**

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Faisons l'hypothèse que le vecteur $\mathbf{x}_o'$ tangent à la ligne des centres mais pas forcément de longueur unité, ne diffère du vecteur unitaire $\mathbf{t}_1$, normal à la section, que par un infiniment petit du 1er ordre (de l'ordre de $\delta\Psi$). Cela implique que la poutre s'allonge peu et subit un faible glissement. Alors :

$$W_{\text{int}}=\int_{s_1}^{s_2}\left[\mathbf{f}.\delta\left(\mathbf{x}_o'-\mathbf{t}_1\right)+\mathbf{m}.\delta\boldsymbol{\chi}\right]ds\ .$$

En effet, dans le déplacement virtuel :

- $\mathbf{x}_o'$ s'accroît de $\delta\mathbf{x}_o'$;
- le vecteur unitaire $\mathbf{t}_1$ tourne de $\delta\Psi$;
- le vecteur $\boldsymbol{\chi}$, définissant la variation de courbure [§6.2], s'accroît de $\delta\Psi'$.

On a donc :

$$W_{\text{int}}=\int_{s_1}^{s_2}\left[\mathbf{f}.\delta\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{m}.\delta\boldsymbol{\chi}\right]ds\ ,\qquad \textbf{éq 6.3-2}$$

avec :

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\chi}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{x}_o'-\mathbf{t}_1\\ \boldsymbol{\chi}\end{Bmatrix}.\qquad \textbf{éq 6.3-3}$$

Dans l'équation [éq 6.3-2], $\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\chi}\end{Bmatrix}$ apparaissent donc respectivement comme un **torseur d'efforts** ou **de contraintes généralisées** et le **torseur des déformations associées**.
$\boldsymbol{\varepsilon}$ définit l'allongement et le glissement ; $\boldsymbol{\chi}$ définit la variation de courbure [§6.2].
On observe que, si $\boldsymbol{\varepsilon}$ doit être petit, par contre il n'y a pas de limitation pour $\boldsymbol{\chi}$. La plupart des poutres entrent dans ce cadre.

La relation [éq 6.3.1] s'écrit :

$$W_{\text{int}}\left(\boldsymbol{\phi}\,;\delta\boldsymbol{\phi}\right)=\int_{s_1}^{s_2}\mathbf{B}\,\delta\boldsymbol{\phi}.\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}ds\qquad \textbf{éq 6.3-4}$$

avec :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{ds}\mathbf{1} & \mathbf{x}_o'\wedge\\ 0 & \dfrac{d}{ds}\mathbf{1}\end{bmatrix}\qquad \textbf{éq 6.3-5}$$

$\mathbf{B}$ est appelée **matrice de déformation**.

6.4 Loi de comportement

D'après le [§5], les composantes en axes locaux de la contrainte généralisée et de la déformation sont les composantes en axes généraux des vecteurs :

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{M}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\Pi}^T\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{X}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\Pi}^T\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\chi}\end{Bmatrix}\qquad \textbf{éq 6.4-1}$$

On suppose que la loi de comportement est élastique et que, en axes locaux, elle a la même expression que pour une poutre de Timoshenko :

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{M}\end{Bmatrix}=\mathbf{DIAG}\left[EA,GA_2,GA_3,GI_1,EI_2,EI_3\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{X}\end{Bmatrix}\qquad \textbf{éq 6.4-2}$$

A_2 et A_3 étant deux aires dépendant de la taille et de la forme de la section.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On pose :

$$\mathbf{C}=\mathbf{DIAG}\left[EA, GA_2, GA_3, GI_1, EI_2, EI_3\right].$$

$\mathbf{C}$ est appelée **matrice de comportement**.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Forces d'inertie élémentaires

Les forces d'inertie appliquées à un élément ds forment un torseur qui admet, au centre de gravité :

- une résultante générale, $-\rho A\,ds\,\ddot{\mathbf{x}}_0(s,t)$;
- un moment résultant égal à l'opposé de la vitesse absolue du moment cinétique élémentaire $\mathbf{H}$.

Pour exprimer la vitesse angulaire, procédons comme au [§6.2] et dérivons la relation :

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{R}\,\mathbf{E}_i,$$

par rapport à t, en tenant compte que $\mathbf{E}_i$ ne dépend pas du temps. On obtient :

$$\dot{\mathbf{t}}_i = \dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^T\,\mathbf{t}_i. \qquad \textbf{éq 7-1}$$

Posons :

$$\dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^T = \hat{\omega}. \qquad \textbf{éq 7-2}$$

En dérivant la relation [éq 4.2-7] par rapport à t, on voit que la matrice $\hat{\omega}$ est antisymétrique. Si l'on désigne par $\boldsymbol{\omega}$ le vecteur axial de cette matrice, la relation [éq 7.1] s'écrit :

$$\dot{\mathbf{t}}_i(s,t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{t}_i(s,t).$$

ω est donc le **vecteur vitesse angulaire** de la section de poutre d'abscisse s à l'instant t.
Le moment cinétique élémentaire a pour expression :

$$\mathbf{H} = ds\,\mathbf{I}_\rho\,\boldsymbol{\omega} = ds\,\mathbf{R}\,\mathbf{J}_\rho\,\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega} \qquad \textbf{éq 7-3}$$

où $\mathbf{J}_\rho$ est le tenseur d'inertie dans la configuration de référence :

$$\mathbf{J}_\rho = \mathbf{R}_\mathbf{0}\,\mathrm{DIAG}\left[\rho I_1, \rho I_2, \rho I_3\right]\mathbf{R}_\mathbf{0}^{\mathbf{T}}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\dot{\mathbf{H}} = ds\,\mathbf{I}_\rho\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + ds\,(\dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{J}_\rho\,\mathbf{R}^{\mathbf{T}} + \mathbf{R}\,\mathbf{J}_\rho\,\dot{\mathbf{R}}^T)\,\boldsymbol{\omega}$$

Mais :

$$\dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{J}_\rho\,\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}\,\mathbf{J}_\rho\,\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega} = \hat{\omega}\,\mathbf{I}_\rho\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_\omega\,\boldsymbol{\omega}$$

et :

$$\mathbf{R}\,\mathbf{J}_\rho\,\dot{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}\,\mathbf{J}_\rho\,\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega} = 0$$

car, d'après l'équation [éq A1-2] :

$$\mathbf{R}\,\dot{\mathbf{R}}^T\boldsymbol{\omega} = -\hat{\omega}\,\boldsymbol{\omega} = 0\ .$$

D'où le moment des forces d'inertie de l'élément :

$$-\dot{\mathbf{H}} = -ds\,\mathbf{I}_\rho\,\dot{\boldsymbol{\omega}} - ds\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_\rho\,\boldsymbol{\omega}$$

Le travail virtuel des forces d'inertie a donc pour expression :

$$W_{iner} = -\int_{S_1}^{S_2} \begin{Bmatrix} \rho A\,\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{0} \\ \mathbf{I}_\rho\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_\rho\,\boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\omega}_\mathbf{0} \\ \delta\boldsymbol{\Psi} \end{Bmatrix} ds \qquad \textbf{éq 7-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8 Équation du mouvement et déroulement d'un calcul

8.1 Équation du mouvement non amorti

Si l'on ajoute les forces d'inertie aux forces extérieures, la forme faible des équations du mouvement, autrement dit le travail virtuel des forces non équilibrées dans la poutre s'écrit :

$$W(\phi,\dot{\phi},\ddot{\phi};\delta\phi)=W_{\text{int}}(\phi;\delta\phi)-W_{\text{iner}}(\phi,\dot{\phi},\ddot{\phi};\delta\phi)-W_{\text{ext}}(\phi;\delta\phi). \qquad \textbf{éq 8.1-1}$$

A l'équilibre W est nul, pour tout $\partial\phi$.

$W_{\text{int}}(\phi;\delta\phi)$ est donné par l'équation [éq 6.3-4] où le torseur d'efforts $\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}$, a pour expression, d'après [éq 6.4-2] :

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}=\Pi\,\mathbf{C}\,\Pi^{T}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \chi\end{Bmatrix} \qquad \textbf{éq 8.1-2}$$

Le torseur de déformations généralisées du second membre de [éq 8.1-2] se déduit de la position actuelle : ε est donnée par [éq 6.3-3] et χ découle de [éq 6.2-2].

$W_{\text{iner}}(\phi,\dot{\phi},\ddot{\phi};\delta\phi)$ est donné par l'équation [éq 7-4].

$$W_{\text{ext}}(\phi;\delta\phi)=\int_{s_1}^{s_2}\begin{Bmatrix}\overline{\mathbf{f}}\\ \overline{\mathbf{m}}\end{Bmatrix}.\begin{Bmatrix}\delta\mathbf{x}_o\\ \Psi\end{Bmatrix}ds \text{ + travail des forces concentrées} \qquad \textbf{éq 8.1-3}$$

Si les forces extérieures données sont conservatives, c'est-à-dire indépendantes de la configuration, W_{ext} ne dépend pas de ϕ .

8.2 Déroulement d'un calcul

- Dans le cas dynamique, on cherche les champs de déplacements, vitesses et accélérations en une suite discrète d'instants : $t_1, t_2 \ldots t_{i-1}, t_i \ldots t_n$.
- Dans le cas statique, on fractionne la charge totale en **incréments** de charge que l'on ajoute successivement à partir de zéro pour reconstituer la charge complète. A chaque étape de chargement, dénommée par abus "instant", on calcule le champ de déplacements.

Connaissant l'état de la structure à l'instant t_{i-1} , on en déduit son état à l'instant t_i par **prédiction-correction :**

- Dans le cas statique (STAT_NON_LINE), la prédiction consiste à calculer la réponse de la structure au i -ème incrément de charge, en conservant son comportement à l'instant t_{i-1} .
- Dans le cas dynamique, on doit d'abord **initialiser** les champs à l'instant t_i , par des formules découlant de l'algorithme d'intégration temporelle utilisé : dans l'opérateur DYNA_NON_LINE, c'est l'algorithme de Newmark [§A3]. Puis on applique l'accroissement de charge entre t_{i-1} et t_i avec le comportement en situation initialisée.

Dans l'état prédit, l'équation d'équilibre n'est généralement pas satisfaite et l'on doit **corriger** les déplacements par des **itérations** reposant sur des **équations linéarisées.**

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9 Linéarisation des équations du mouvement

Supposons calculé l'état de la structure à l'itération n de l'instant i, $n=1$ correspond à la phase de prédiction. La forme faible des équations d'équilibre est, à cette itération [éq 8.1-1] :

$$W\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n,\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right)=W_{\text{int}}\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right)-W_{\text{iner}}\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n,\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right)-W_{\text{ext}}\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right) \quad \textbf{éq 9-1}$$

- Si cette quantité est assez petite, au sens du critère d'arrêt [bib10], on considère que cette n-ième itération donne l'état de la structure à l'instant i.
- Sinon, on calcule des **corrections** de déplacement $\Delta\boldsymbol{\Phi}_i^{n+1}$ telles que :

$$\begin{aligned}&L\left\{W\left[\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n+\Delta\boldsymbol{\Phi}_i^{n+1}\right),\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n+\Delta\boldsymbol{\Phi}_i^{n+1}\right)^{\cdot},\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n+\Delta\boldsymbol{\Phi}_i^{n+1}\right)^{\cdot\cdot};\delta\boldsymbol{\Phi}\right]\right.=\\&W\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n,\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right)+DW\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n,\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right).\Delta\boldsymbol{\Phi}_i^{n+1}=0.\end{aligned} \quad \textbf{éq 9-2}$$

$DW\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n,\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right).\Delta\boldsymbol{\Phi}_i^{n+1}$ est la différentielle de Fréchet de $W\left(\boldsymbol{\Phi}_i^n,\dot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_i^n;\delta\boldsymbol{\Phi}\right)$ dans la direction $\Delta\boldsymbol{\Phi}_i^{n+1}$ [An4].

9.1 Matrices de rigidité

Elles résultent de la différentiation de Fréchet de $W_{\text{int}}\left(\boldsymbol{\Phi};\delta\boldsymbol{\Phi}\right)$ dans la direction $\Delta\boldsymbol{\Phi}$. D'après les équations [éq 6.3-4] et [éq 6.4-1] :

$$W_{\text{int}}\left(\boldsymbol{\Phi};\delta\boldsymbol{\Phi}\right)=\int_{s_1}^{s_2}\left\{\mathbf{B}\,\delta\boldsymbol{\Phi}\right\}.\boldsymbol{\Pi}\left\{\begin{matrix}\mathbf{F}\\\mathbf{M}\end{matrix}\right\}ds.$$

Soit :

$$\begin{aligned}DW_{\text{int}}.\Delta\boldsymbol{\Phi}&=\int_{s_1}^{s_2}\left[D\left\{\mathbf{B}\,\delta\boldsymbol{\Phi}\right\}.\Delta\boldsymbol{\Phi}\right].\boldsymbol{\Pi}\left\{\begin{matrix}\mathbf{F}\\\mathbf{M}\end{matrix}\right\}ds\\&+\int_{s_1}^{s_2}\left\{\mathbf{B}\,\delta\boldsymbol{\Phi}\right\}.\left[\left(D\,\boldsymbol{\Pi}.\Delta\boldsymbol{\Phi}\right)\left\{\begin{matrix}\mathbf{F}\\\mathbf{M}\end{matrix}\right\}\right]\mathrm{ds}+\int_{s_1}^{s_2}\left\{\mathbf{B}\,\delta\boldsymbol{\Phi}\right\}.\left[\boldsymbol{\Pi}\left(D\left\{\begin{matrix}\mathbf{F}\\\mathbf{M}\end{matrix}\right\}.\Delta\boldsymbol{\Phi}\right)\right]ds.\end{aligned} \quad \textbf{éq 9.1-1}$$

Or, d'après l'équation [éq 6.3-5] :

$$\left\{\mathbf{B}\,\delta\boldsymbol{\Phi}\right\}=\left\{\begin{matrix}\delta\mathbf{x}_o'+\mathbf{x}_o'\wedge\delta\boldsymbol{\Psi}\\\delta\boldsymbol{\Psi}'\end{matrix}\right\}.$$

Donc [éq A4-2] :

$$D\left\{\mathbf{B}\,\delta\boldsymbol{\Phi}\right\}.\Delta\boldsymbol{\Phi}=\left\{\begin{matrix}\Delta\mathbf{x}_o'\wedge\delta\boldsymbol{\Psi}\\0\end{matrix}\right\}.$$

D'autre part [éq A4-5] :

$$D\,\boldsymbol{\Pi}.\Delta\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}&\mathbf{R}_{\text{tot}}&0\\0&\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}&\mathbf{R}_{\text{tot}}\end{bmatrix}.$$

Enfin, d'après le [§6.4] :

$$\begin{aligned}D\left\{\begin{matrix}\mathbf{F}\\\mathbf{M}\end{matrix}\right\}\Delta\boldsymbol{\Phi}&=\mathbf{C}\,D\left(\boldsymbol{\Pi}^T\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{\chi}\end{matrix}\right\}\right).\Delta\boldsymbol{\Phi}\\&=\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Pi}^T\mathbf{B}\,\Delta\boldsymbol{\Phi}-\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}&0\\0&\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{\chi}\end{matrix}\right\},\end{aligned}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

car [éq 6.3-2] et [éq 6.3-5] :

$$D\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\chi}\end{Bmatrix}.\Delta\boldsymbol{\phi}=\mathbf{B}\Delta\boldsymbol{\phi},$$

et [éq A4.6] :

$$D\,\mathbf{R}_{tot}^{T}.\Delta\boldsymbol{\phi}=-\mathbf{R}_{tot}^{T}\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\ .$$

On montre [A5] que :

- la somme des deux premières intégrales du second membre de [éq 9.1-1] peut se mettre sous la forme :

$$\int_{s_1}^{s_2}\delta\boldsymbol{\phi}^{T}\,\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}\mathbf{E}\mathbf{Y}\Delta\boldsymbol{\phi}\,ds\,;$$

- la troisième intégrale peut s'écrire :

$$\int_{s_1}^{s_2}\delta\boldsymbol{\phi}^{T}\,\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Pi}\,\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}\Delta\boldsymbol{\phi}\,ds+\int_{s_1}^{s_2}\delta\boldsymbol{\phi}^{T}\,\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{Z}\Delta\boldsymbol{\phi}\,ds\,,$$

avec :

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ds}\mathbf{1} & 0\\ 0 & \frac{d}{ds}\mathbf{1}\\ 0 & \mathbf{1}\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\mathbf{f}\wedge\\ 0 & 0 & -\mathbf{m}\wedge\\ \mathbf{f}\wedge & 0 & \hat{\mathbf{x}}_{o}{}'\hat{\mathbf{f}}\end{pmatrix};\qquad\textbf{éq 9.1-2}$$

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{R}_{tot}\mathbf{C}_1\mathbf{R}_{tot}^{T}\left(\mathbf{R}_{tot}\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{R}_{tot}^{T}\mathbf{f}\right)^{v}\\ 0 & \mathbf{R}_{tot}\mathbf{C}_2\mathbf{R}_{tot}^{T}\left(\mathbf{R}_{tot}\mathbf{C}_2^{-1}\mathbf{R}_{tot}^{T}\mathbf{m}\right)^{v}\end{bmatrix}\qquad\textbf{éq 9.1-3}$$

$\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$ étant deux sous-matrices de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}_1=\mathbf{DIAG}\left[EA,GA_2,GA_3\right],$$
$$\mathbf{C}_2=\mathbf{DIAG}\left[GI_1,EI_2,EI_3\right].$$

$\mathbf{Y}^{T}\mathbf{E}\mathbf{Y}$ est appelée matrice de rigidité géométrique **éq 9.1-4**

$\mathbf{B}^{T}\boldsymbol{\Pi}\,\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Pi}^{T}$ est appelée matrice de rigidité matérielle **éq 9.1-5**

Enfin, au cours de la différentiation apparait une matrice qui ne figure pas dans [bib2] :

$\mathbf{B}^{T}\mathbf{Z}$ que nous appelons matrice complémentaire **éq 9.1-6**

9.2 Matrices d'inertie

Elles résultent de la différentiation de Fréchet de W_{iner} [éq 7-4] dans la direction $\Delta\boldsymbol{\phi}$. Plus précisément, on se place dans la configuration de la n-ième itération de l'instant i et on différentie dans la direction $\Delta\boldsymbol{\phi}_i^{n+1}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

9.2.1 Différentiation de l'inertie de translation $\rho A \ddot{\mathbf{x}}_0$

On a immédiatement, d'après les équations [éq An4-4] d'une part et [éq An3.1-4] d'autre part :

$$D(\rho A \ddot{\mathbf{x}}^n_{o,i}).\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{n+1}}_{\mathbf{o,i}} = \rho A \ddot{\mathbf{x}}^{n+1}_{o,i} = \frac{\rho A}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{x}^{\mathbf{n+1}}_{\mathbf{o,i}} \qquad \textbf{éq 9.2.1-1}$$

9.2.2 Différentiation de l'inertie de rotation $\mathbf{I}_\rho \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}_\rho \boldsymbol{\omega}$

D'après l'équation [éq 7-3] :

$$\mathbf{I}_\rho = \mathbf{R}\,\mathbf{J}_\rho\,\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

$\mathbf{J}_\rho$ étant un tenseur constant.

9.2.2.1 Termes provenant de la différentiation de $\mathbf{I}_\rho$

D'après les équations [éq A4-3] et [éq A4-4], ces termes sont :

$$\left[-\left(\mathbf{I}_\rho \dot{\boldsymbol{\omega}}\right)^{\wedge} + \mathbf{I}_\rho \dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}} - \hat{\boldsymbol{\omega}}\left(\mathbf{I}_\omega \boldsymbol{\omega}\right)^{\wedge} + \hat{\boldsymbol{\omega}}\,\mathbf{I}_\rho \hat{\boldsymbol{\omega}}\right]^n_i \Delta \Psi^{n+1}_i \qquad \textbf{éq 9.2.2.1-1}$$

toutes les grandeurs figurant dans le crochet étant prises à l'itération n de l'instant i.

9.2.2.2 Termes provenant de la différentiation de $\boldsymbol{\omega}$ et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$

D'après les expressions [éq A3.2-3] et [éq A3.2-4], la vitesse et l'accélération angulaires à l'itération de n l'instant i sont :

$$\boldsymbol{\omega}^n_i = \mathbf{R}^n_i\,\mathbf{R}^{n-1,T}_i\,\boldsymbol{\omega}^{n-1}_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\mathbf{R}^n_i\,\mathbf{R}^T_{i-1}\left(\Psi^n_{i-1,i} - \Psi^{n-1}_{i-1,i}\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^n_i = \mathbf{R}^n_i\,\mathbf{R}^{n-1,T}_i\,\dot{\boldsymbol{\omega}}^{n-1}_i + \frac{1}{\beta \Delta t^2}\mathbf{R}^n_i\,\mathbf{R}^T_{i-1}\left(\Psi^n_{i-1,i} - \Psi^{n-1}_{i-1,i}\right).$$

Une variation $\Delta\Psi$ du vecteur-rotation ne peut affecter que les grandeurs relatives à cette itération n de l'instant i, puisque, dans les deux relations précédentes, les autres grandeurs sont fixes. Autrement dit, seuls sont à différencier $\mathbf{R}^n_i$ et $\Psi^n_{i-1,i}$, incrément de vecteur-rotation de l'instant à $i-1$ l'itération n de l'instant i.

Or [éq A4-5] :

$$D\mathbf{R}^n_i.\Delta\Psi^{n+1}_i = \Delta\hat{\Psi}^{n+1}_i\,\mathbf{R}^n_i.$$

Et, d'après [bib3] :

$$D\Psi^n_{i-1,i}.\Delta\Psi^{n+1}_i = \mathbf{T}\left(y^n_{i-1,i}\right)\Delta\Psi^{n+1}_i,$$

avec :

$$\mathbf{T}(\Psi) = \frac{1}{\|\Psi\|^2}\Psi\,\Psi^T + \frac{\|\Psi\|/2}{\tan\left(\|\Psi\|/2\right)}\left[1 - \frac{1}{\|\Psi\|^2}\Psi\,\Psi^T\right] - \frac{\hat{\Psi}}{2}.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les termes provenant de la différenciation de ω et $\dot{\omega}$ sont donc :

$$-\mathbf{I}^{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{i}}\left(\mathbf{R}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}}\mathbf{R}^{\mathbf{n-1,T}}_{\mathbf{i}}\dot{\boldsymbol{\omega}}^{n-1}_{\mathbf{i}}\right)^{\wedge}-\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}^{n}_{i}\mathbf{I}^{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{i}}-\left(\mathbf{I}^{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{i}}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{n}_{i}\right)^{\wedge}\right]\left(\mathbf{R}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}}\mathbf{R}^{\mathbf{n-1,T}}_{\mathbf{i}}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{n-1}}_{\mathbf{i}}\right)^{\wedge}$$
$$\frac{+1}{\beta\Delta t^{2}}\left\{\mathbf{I}^{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{i}}+\gamma\Delta t\left[\hat{\boldsymbol{\omega}}^{n}_{i}\mathbf{I}^{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{i}}-\left(\mathbf{I}^{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{i}}\boldsymbol{\omega}^{n}_{i}\right)^{\wedge}\right]\right\} \qquad \textbf{éq 9.2.2.2-1}$$
$$\left\{\left[-\mathbf{R}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{i-1}}\left(\Psi^{n}_{i-1,i}-\Psi^{n-1}_{i-1,i}\right)\right]^{\wedge}+\mathbf{R}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{i-1}}\mathbf{T}\left(\Psi^{n}_{i-1,i}\right)\right\}$$

la combinaison des trois matrices précédentes étant à multiplier par $\Delta\Psi^{n+1}_{i}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

10 Mise en œuvre par éléments finis

On donne ci-dessous la représentation en éléments finis des matrices du [§9]. Ces matrices figurent dans des expressions à intégrer le long de la poutre. On les calcule donc aux points de Gauss. … N_i, N_j sont les valeurs prises, au point de Gauss considéré, par les fonctions de forme relatives aux nœuds i, j ….

Les matrices de rigidité relient l'accroissement de déplacement du nœud j à l'accroissement de force interne au nœud i pour l'élément e.

10.1 Matrice de déformation et efforts intérieurs

La matrice de déformation a pour expression continue [éq 6.3-5] :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \frac{d}{ds}\mathbf{1} & \mathbf{x}_o'\wedge \\ 0 & \frac{d}{ds}\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

En éléments finis, la contribution du déplacement du nœud i à la déformation au point de Gauss considéré s'obtient en multipliant les 6 composantes de ce déplacement par la matrice :

$$\mathbf{B}_i^h=\begin{bmatrix} N_i'\mathbf{1} & N_i\hat{\mathbf{x}}_o'(G) \\ 0 & N_i'\mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \textbf{éq 10.1-1}$$

L'indice supérieur h indique qu'il s'agit d'une forme discrétisée de la matrice $\mathbf{B}$.

D'après [éq 6.3-4] :

$$\mathbf{F}_{\text{int } i}^e=\int_e \mathbf{B}_i^{hT}\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix} ds \qquad \textbf{éq 10.1-2}$$

est l'effort intérieur appliqué au nœud i de l'élément e et dû au champ de contraintes généralisées $\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}$ dans l'élément. Cette contrainte se calcule selon l'équation [éq 8.1-2]. Mais il faut remarquer que :

- d'une part [éq 6.3-3] : $\mathbf{R}_{\text{tot}}^T\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{R}_{\text{tot}}^T\dot{\mathbf{x}}_o-\mathbf{e}_1$;
- d'autre part, le vecteur χ est **mis à jour** à chaque itération, comme il est indiqué au [§10.8].

10.2 Matrices de rigidité

L'expression continue de la matrice de rigidité matérielle [éq 9.1-5] est :

$$\mathbf{B}^T\,\boldsymbol{\Pi}\,\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Pi}^T\,\mathbf{B}\ .$$

On en déduit, pour l'élément fini e, la matrice reliant l'accroissement de déplacement du nœud j à l'accroissement de force interne au nœud i :

$$\mathbf{S}_{\text{mat } i\,j}^e=\int_e \mathbf{B}_i^{hT}\,\boldsymbol{\Pi}\,\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Pi}^T\,\mathbf{B}_j^h\,ds. \qquad \textbf{éq 10.2-1}$$

On calcule numériquement $\boldsymbol{\Pi}\,\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Pi}^T$ au point de Gauss courant.

L'expression continue de la matrice de rigidité géométrique [éq 9.1-4] est :

$$\mathbf{Y}^T\,\mathbf{E}\,\mathbf{Y}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où :

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} \frac{d}{ds}\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \frac{d}{ds}\mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

et $\mathbf{E}$ est donnée par l'équation [éq 9.1-2].

On en déduit, comme pour la matrice de rigidité matérielle :

$$\mathbf{S}^{e}_{\text{géom}\,ij}=\int_e \mathbf{Y}_i^{hT}\mathbf{E}\,\mathbf{Y}_j^{h}\,ds, \qquad \textbf{éq 10.2-2}$$

où :

$$\mathbf{Y}_i^{h}=\begin{bmatrix} N_i'\mathbf{1} & 0 \\ 0 & N_i'\mathbf{1} \\ 0 & N_i'\mathbf{1} \end{bmatrix},$$

et où $\mathbf{E}$ est calculé numériquement au point de Gauss courant.

L'expression continue de la matrice de rigidité complémentaire [éq 9.1-5] est :

$$\mathbf{B}^T\mathbf{Z},$$

où $\mathbf{Z}$ est donné par l'équation [éq 9.1-3].

On en déduit :

$$\mathbf{S}^{e}_{\text{compl}\,ij}=\int_e \mathbf{B}_i^{hT}N_j\mathbf{Z}\,ds\ ,$$

où $\mathbf{Z}$ est calculé numériquement au point de Gauss courant.

10.3 Forces d'inertie

D'après [éq 7.3-1] :

$$\mathbf{F}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{iner,i}}=-\int_e \begin{Bmatrix} N_i\,\rho\,A\,\ddot{\mathbf{x}}_0 \\ N_i\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\rho}}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{I}_{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\omega}\right) \end{Bmatrix} ds \qquad \textbf{éq 10.3-1}$$

est la force d'inertie de l'élément e au nœud i.

10.4 Matrice d'inertie

Posons :

$$\mathbf{I}_{\mathbf{0,iner}}=\begin{bmatrix} \rho\,A\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{0\ iner\ ij}}=\int_e N_i N_j \mathbf{I}_{\mathbf{0\ iner}}\,ds$$

On voit, d'après [éq 7-4] et [éq 9.2.1-1], que $\frac{1}{\beta\,\Delta t^2}\mathbf{M}^{e}_{o\ \text{iner}}$ est bien la matrice d'inertie de l'élément e pour le mouvement de translation (sous-matrice diagonale $\rho\,A\mathbf{1}$ de $\mathbf{I}_{\mathbf{0\ iner}}$). Mais d'après [éq 9.2.2.1-1] et [éq 9.2.2.2-1], **ce n'est pas** la matrice d'inertie de rotation.

Néanmoins, la matrice $\mathbf{M}_{o\ \text{iner}}$, assemblage des $\mathbf{M}^{e}_{o\ \text{iner}}$, sert à calculer l'**accélération initiale** de la poutre quand elle quitte sa position de référence avec une **vitesse initiale nulle** $\left(\boldsymbol{\omega}_o=\mathbf{0}\right)$. En effet, on a alors, d'après [éq 7.3-1] :

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}\left(t=0\right)=-\mathbf{F}_{\text{iner}}\left(t=0\right)=\mathbf{M}_{o\,\text{iner}}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_o\\ \dot{\mathbf{w}}\end{Bmatrix}_o,$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

puisque, en position de référence :

$$\mathbf{I}_\rho = \mathbf{J}_\rho$$

Appelons $\mathbf{J}'$ la somme des deux matrices [éq 9.2.2.1-1] et [éq 9.2.2.2-1] et posons :

$$\mathbf{I}_{\text{rot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}' \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M}^e_{\text{rot } ij} = \int_e N_i N_j \mathbf{I}_{\text{rot}}\, ds$$

Posons aussi :

$$\mathbf{I}_{\mathbf{0}\text{rot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_\rho \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M}^e_{\mathbf{0}\text{rot } ij} = \int_e N_i N_j \mathbf{I}_{\mathbf{0}\text{rot}}\, ds$$

La matrice d'inertie complète d'un élément de poutre est évidemment :

$$\mathbf{M}^e_{\text{iner}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}^e_{o\,\text{iner}} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}^e_{o\,\text{rot}} + \mathbf{M}^e_{\text{rot}} \ .$$

10.5 Forces extérieures données

D'après [éq 8.1-3] :

$$\mathbf{F}^e_{\text{ext } i} = \int_e \begin{Bmatrix} N_i \overline{\mathbf{f}} \\ N_i \overline{\mathbf{m}} \end{Bmatrix} ds \qquad \textbf{éq 10.5-1}$$

est la force appliquée au nœud i de l'élément e qui équivaut aux forces extérieures réparties.

10.6 Système linéaire d'itération

Par discrétisation en éléments finis, l'équation [éq 9-1] donne :

$$W^h = \left(\mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{iner}} - \mathbf{F}_{\text{ext}}\right).\delta\phi \ .$$

D'autre part, en supposant que les forces extérieures sont conservatives, on a, d'après les [§10.2] et [§10.4] :

$$DW^h.\Delta\phi = \left[S_{\text{mat}} + S_{\text{geom}} + S_{\text{compl}} + \mathbf{M}_{\text{rot}} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_{o\,\text{rot}} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_{o\,\text{iner}} \right] \Delta\phi . \delta\phi .$$

La relation [éq 9-2], devant être vérifiée par tout $\delta\phi$, conduit donc, à l'itération n de l'instant i, au système linéaire suivant en $\Delta\phi_i^{n+1}$:

$$\left[\mathbf{S}^n_{\text{mat},\,i} + \mathbf{S}^n_{\text{geom},\,i} + \mathbf{S}^n_{\text{compl},\,i} + \mathbf{M}^n_{\text{rot},\,i} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_{o\ rot} + \frac{1}{b\hat{e}at\, \Delta t^2} \mathbf{M}_{o\ \text{iner}} \right] \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{n+1}_{o,i} \\ \Delta \mathbf{\Psi}^{n+1}_i \end{Bmatrix} \qquad \textbf{éq 10.6-1}$$
$$= F_{\text{ext},i} - F^n_{\text{int},i} + F^n_{\text{iner},i} .$$

Dans le *Code_Aster*, les matrices élémentaires $\mathbf{M}^e_{o\ \text{iner}}$, qui sont indépendantes du déplacement, sont assemblées une seule fois pour constituer la matrice globale $\mathbf{M}_{o\text{iner}}$, qui sert notamment à calculer l'accélération initiale [§10.4].

Les trois matrices de rigidité élémentaire $\mathbf{S}^e_{\text{mat}}$, $\mathbf{S}^e_{\text{geom}}$ et $\mathbf{S}^e_{\text{compl}}$, la matrice d'inertie de rotation, $\mathbf{M}^e_{\text{rot}}$ qui dépendent toutes les quatre du déplacement, et la matrice d'inertie de rotation corrective $-\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}^e_{o\,\text{rot}}$, qui est invariable, sont, à chaque itération, combinées puis assemblées pour constituer une pseudo matrice de rigidité globale $\tilde{\mathbf{K}}^n_i$.

Le système linéaire [éq 10.6-1] devient donc :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}_i^n+\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}_{o\ \mathrm{iner}}\right]\begin{Bmatrix}\Delta\mathbf{x}_{o,i}^{n+1}\\ \Delta\boldsymbol{\Psi}_i^{n+1}\end{Bmatrix}=\mathbf{F}_{\mathrm{ext},i}-\mathbf{F}_{\mathrm{int},i}^n+\mathbf{F}_{\mathrm{iner},i}^n. \qquad \textbf{éq 10.6-2}$$

Dans le cas d'un problème statique, le système précédent se simplifie en :

$$\left[\mathbf{K}_i^n\right]\begin{Bmatrix}\Delta\mathbf{x}_{o,i}^{n+1}\\ \Delta\boldsymbol{\Psi}_i^{n+1}\end{Bmatrix}=\mathbf{F}_{\mathrm{ext},i}-\mathbf{F}_{\mathrm{int},i}^n \qquad \textbf{éq 10.6-3}$$

où $\mathbf{K}_i^n$ est l'assemblage des seules matrices de rigidité à l'itération n de l'"instant" i [§8.2] :

$$\mathbf{S}_{\mathrm{mat},i}^n+\mathbf{S}_{\mathrm{geom},i}^n+\mathbf{S}_{\mathrm{compl},i}^n.$$

10.7 Mise à jour du déplacement, de la vitesse et de l'accélération

Le traitement du mouvement de translation est classique ; celui du mouvement de rotation se fait à l'aide des quaternions [A8].

10.7.1 Mouvement de translation

On applique les formules [éq A3.1-3] et [éq A3.1-4].

10.7.2 Mouvement de rotation

Les grandeurs à mettre à jour sont :

- d'une part, le vecteur-rotation, la vitesse et l'accélération angulaires ;
- d'autre part, pour les calculs ultérieurs, la matrice de rotation et l'incrément du vecteur-rotation de l'instant $i-1$ à l'itération actuelle de l'instant i [§A6].

La mise à jour des vecteurs-rotations repose sur la propriété suivante des quaternions [§A8.4] : "le quaternion du produit de deux rotations est égal au produit des quaternions des rotations composantes".

Donc en posant [§An8.6] :

$$\left(\Delta x_o,\Delta\mathbf{x}\right)=\mathbf{Q}\left(\Delta\Psi_i^{n+1}\right)$$
$$\left(x_o,\mathbf{x}\right)=\mathbf{Q}\left(\Psi_i^n\right),$$

il vient :

$$\Psi_i^{n+1}=\mathbf{Q}^{-1}\left[\left(\Delta x_o,\Delta\mathbf{x}\right)\circ\left(x_o,\mathbf{x}\right)\right]. \qquad \textbf{éq 10.7.2-1}$$

D'autre part, d'après l'équation [éq An6-2], si :

$$\left(y_o,\mathbf{y}\right)=\mathbf{Q}\left(\Psi_{i-1,i}^n\right),$$

alors :

$$\Psi_{i-1,i}^{n+1}=\mathbf{Q}^{-1}\left[\left(\Delta x_o,\Delta\mathbf{x}\right)\circ\left(y_o,\mathbf{y}\right)\right]. \qquad \textbf{éq 10.7.2-2}$$

La mise à jour de la matrice de rotation est immédiate [§4.2] :

$$\mathbf{R}_i^{n+1}=\exp\left(\hat{\Psi}_i^{n+1}\right),$$

qui se calcule selon [éq 4.2-1].

Enfin la vitesse et l'accélération angulaires se mettent à jour par les relations [éq A3.2-3] et [éq A3.2-4].

10.8 Mise à jour du vecteur variation de courbure

Le vecteur χ, qui définit la déformation de rotation [§6.2], ne doit être calculé qu'aux points de Gauss. Dans le *Code_Aster*, il est traité informatiquement comme une "variable interne".

D'après [éq 6.2-2] :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{\chi}_i^n = \frac{d}{ds}\left(\mathbf{R}_i^n\right).\mathbf{R}_i^{nT}.$$

Et, d'après [éq 4.2-6] :

$$\hat{\chi}_i^{n+1} = \frac{d}{ds}\left[\exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\mathbf{R}_i^n\right]\mathbf{R}_i^{nT}\exp\left(-\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right).$$

Soit :

$$\hat{\chi}_i^{n+1} = \frac{d}{ds}\left[\exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\right]\exp\left(-\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right) + \exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\hat{\chi}_i^n\exp\left(-\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right).$$

Dans l'équation précédente, la matrice du premier membre est anti-symétrique par construction ; la deuxième matrice du second membre est évidemment antisymétrique ; donc la première matrice du second membre l'est aussi.
On montre dans [bib2] Appendix B, que le vecteur axial de cette dernière matrice est :

$$\beta = \frac{\sin\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|}{\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|}\left(\Delta\Psi_i^{n+1}\right)' + \left(1-\frac{\sin\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|}{\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|}\right)\frac{\Delta\Psi_i^{n+1}.\left(\Delta\Psi_i^{n+1}\right)'}{\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|}\frac{\Delta\Psi_i^{n+1}}{\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|}{\frac{1}{2}\|\Delta\Psi_i^{n+1}\|}\right)^2\Delta\Psi_i^{n+1}\wedge\left(\Delta\Psi_i^{n+1}\right)'.$$

Donc :

$$\chi_i^{n+1} = \beta + \mathbf{AXIAL}\left[\exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\hat{\chi}_i^n \quad \exp\left(-\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\right].$$

10.9 Initialisation avant les itérations

Dans le cas dynamique, si le chargement est constant dans le temps, les itérations ne peuvent démarrer à l'instant i qui si l'on initialise certains des champs de déplacement, vitesse et accélération à des valeurs différentes de celles de l'instant $i-1$. Ces initialisations se font comme suit.

10.9.1 Mouvement de translation

$$\mathbf{x}_{o,i}^o = \mathbf{x}_{o,i-1}.$$

Puis, d'après l'équation [éq An3.1-1] :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^o = -\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{x}}_{o,i-1} + \frac{2\beta-1}{2\beta}\ddot{\mathbf{x}}_{o,i-1}.$$

D'après l'équation [éq An3.1-2] :

$$\dot{\mathbf{x}}_{o,i}^o = \dot{\mathbf{x}}_{o,i-1} + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{x}}_{o,i-1} + \gamma\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^o\right].$$

10.9.2 Mouvement de rotation

On prend des expressions analogues aux précédentes :

$$\Psi_i^o = \Psi_{i-1} \qquad \textbf{éq 10.9.2-1}$$

$$\dot{\omega}_i^o = -\frac{1}{\beta\Delta t}\omega_{i-1} + \frac{2\beta-1}{2\beta}\dot{\omega}_{i-1} \qquad \textbf{éq 10.9.2-2}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{\omega}_i^o = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \Delta t\left[\left(1-\gamma\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \gamma\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^o\right]. \qquad \textbf{éq 10.9.2-3}$$

Les seconds membres de [éq 10.9.2-2] et [éq 10.9.2-3] ont un sens car tous les vecteurs qui y figurent se trouvent dans l'espace vectoriel tangent à $SO(3)$ en $\mathbf{R}_{i-1}$.

Comme conséquences de l'équation [éq 10.9.2-1] :

$$\mathbf{R}_i^o = \mathbf{R}_{i-1}$$

et :

$$\Psi_{i-1,i}^o = 0.$$

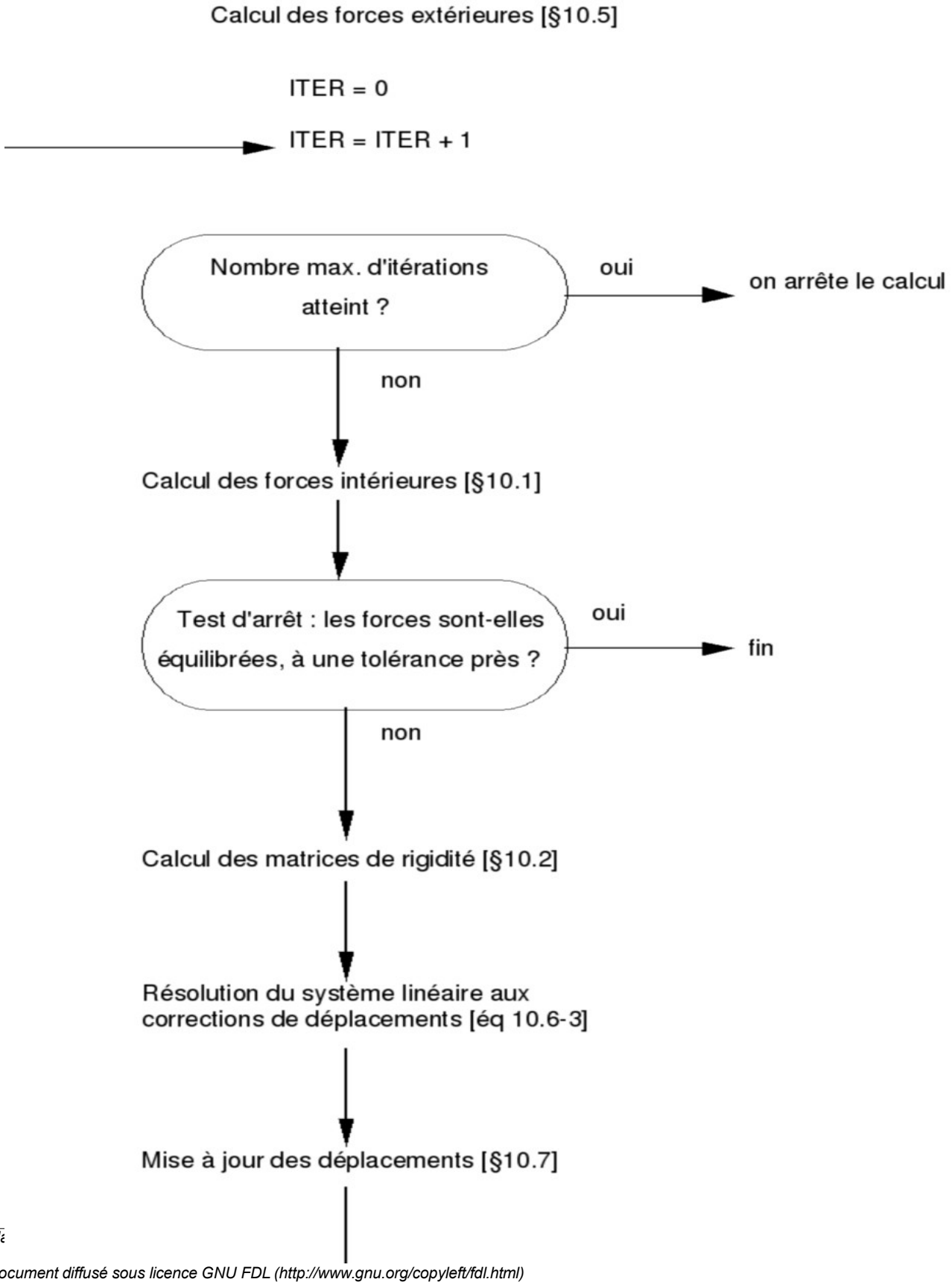
On voit qu'au premier instant $(i=1)$, les initialisations nécessitent la connaissance de l'accélération initiale $\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_o \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}\end{Bmatrix}_o$, dont le calcul est indiqué au [§10.4].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11 Organisation schématique d'un calcul

Ce paragraphe montre comment s'articulent les notions présentées au [§10] dans le déroulement d'un calcul.

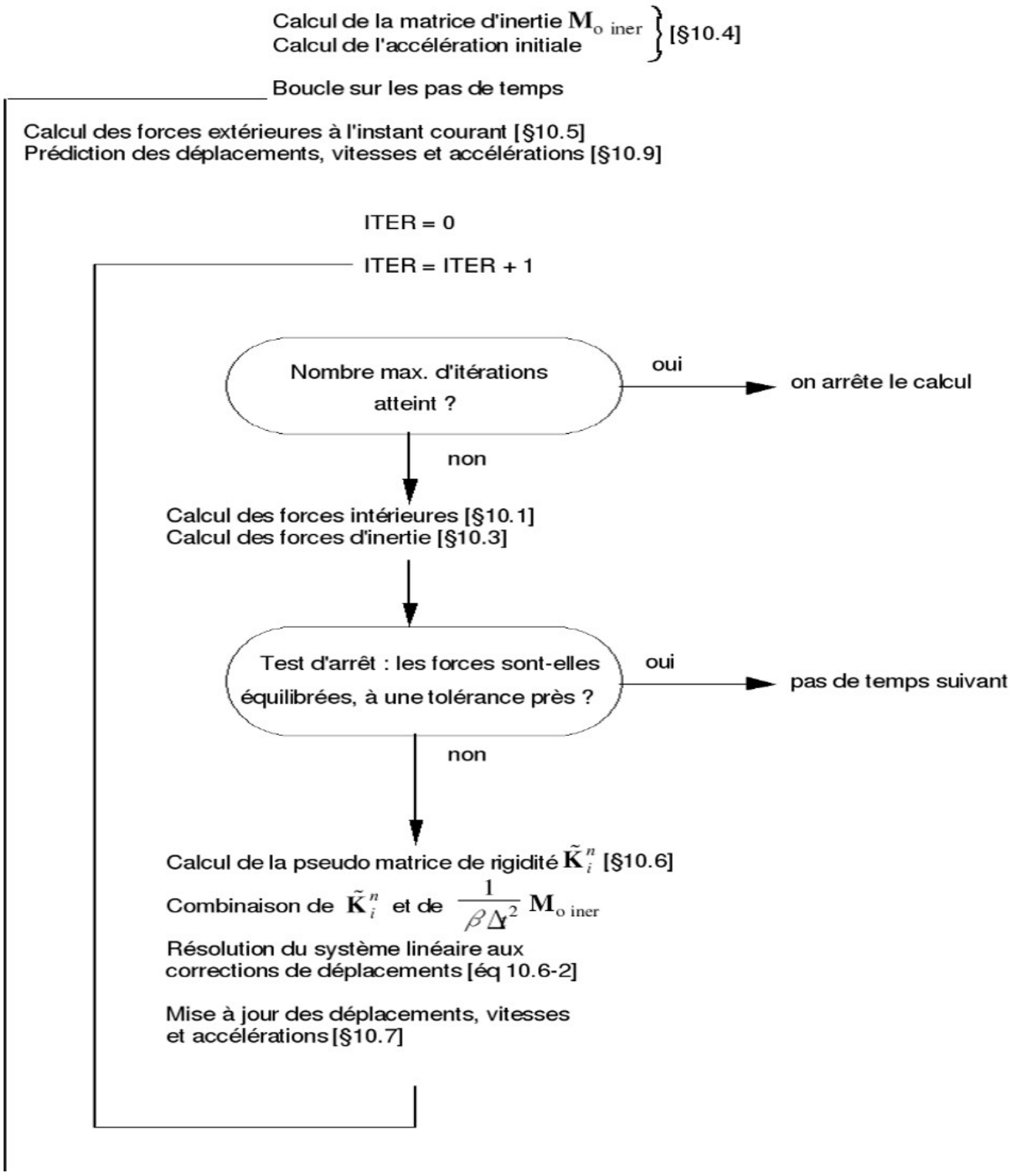
11.1 Calcul statique



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

11.2 Calcul dynamique



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

12 Utilisation par le *Code_Aster*

Ce paragraphe indique comment interviennent les poutres en grands déplacements dans les commandes du *Code_Aster*.

Commande	Mot-clé facteur	Mot-clé	Argument
AFFE_MODELE	AFFE	PHENOMENE	'MECANIQUE'
		MODELISATION	'POU_D_T_GD'
AFFE_CARA_ELEM	POUTRE	SECTION	'GENERALE'
			'RECTANGLE
			'CERCLE'
STAT_NON_LINE	COMPORTEMENT	RELATION	'ELAS_POUTRE_GD'
et		DEFORMATION	'GROT_GDEP'
DYNA_NON_LINE			

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13 Simulations numériques

On donne ci-dessous cinq simulations numériques reposant sur la formulation présentée dans cette note. Les trois premières portent sur des problèmes statiques, les deux dernières sur des problèmes dynamiques.

13.1 Poutre droite encastrée soumise à un moment concentré en extrémité (cas-test SSNL103)

Soit $\mathbf{M}$ ce moment. La poutre n'est le siège que d'un moment constant et l'équation [éq 6.4-2] montre que la variation de courbure $\mathbf{X}$ est également constante. La poutre se déforme donc en cercle de rayon :

$$r=\frac{E I_3}{\|\mathbf{M}\|},$$

dans un plan perpendiculaire au vecteur moment.

La figure [fig 13.1-a] montre les déformées d'une poutre de longueur unité, dont $E I_3=2$ et soumise aux moments $\pi, 2\pi$ et 4π

La poutre est découpée en 10 éléments finis du 1er ordre. On applique d'emblée le moment final et la convergence est atteinte en 3 itérations.

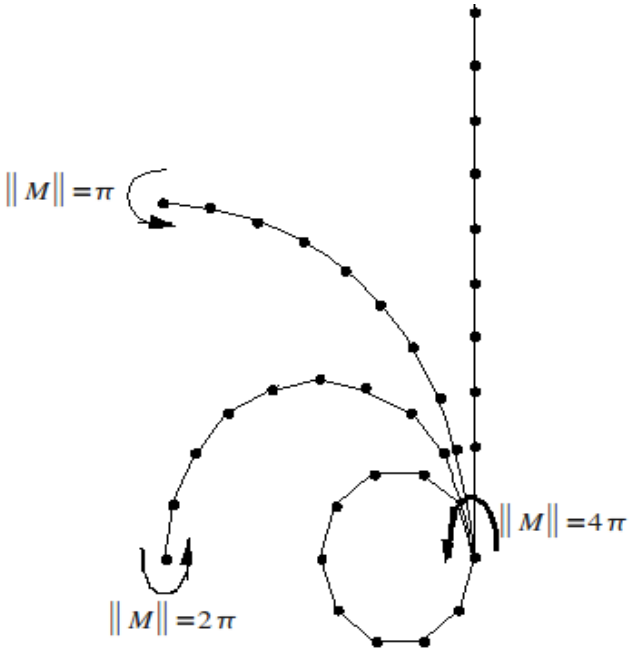


Figure 13.1-a : Poutre soumise à un moment en bout

13.2 Arc encastré-rotulé chargé au sommet

La figure [fig 13.2-a] montre les déformées d'un arc de 215° d'ouverture, encastré à droite, rotulé à gauche et soumis à une force croissante concentrée au sommet. La solution de ce problème est donnée dans [bib11] pour un rayon initial de 100 et les caractéristiques suivantes de poutre :

$$EA=GA=5\times10^7 \text{ et } EI=10^6$$

L'arc est modélisé par 40 éléments du 1er ordre. On a fait croître la force jusqu'à 890 par huit incréments de 100, un incrément de 50 et quatre incréments de 10. Au-delà apparaît le **flambage**, c'est-à-dire que le déplacement continue à croître sous une force qui décroît brutalement. L'algorithme décrit ici ne permet pas de prendre en compte un tel phénomène, et diverge pour une force de 900. Da Deppo, dans [bib11], situe la force critique à 897.

On a le tableau de résultats comparatifs suivant :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	Force	Déplacement vertical du point d'application	Déplacement horizontal du point d'application
Nos calculs	890	–110.5	–60.2
Da Deppo	897	–113.7	–61.2

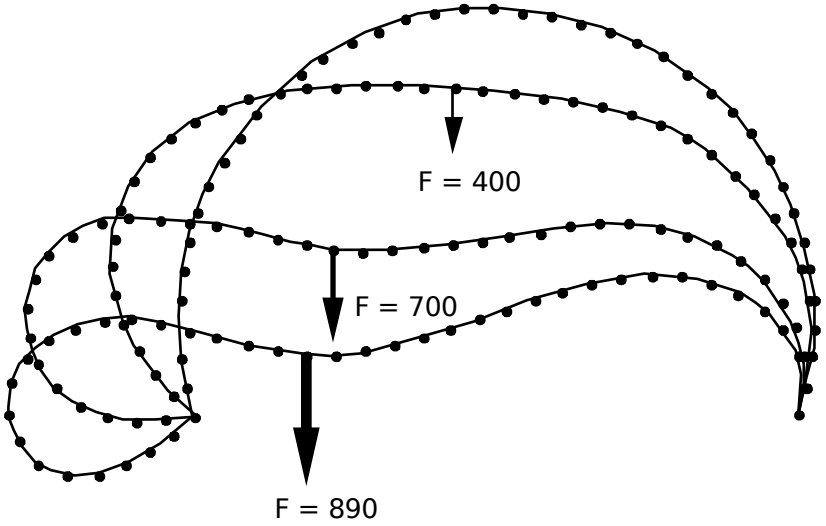


Figure 13.2-a : Arc encastré-rotulé chargé au sommet (Da Deppo)

13.3 Arc circulaire de 45° encastré et soumis en extrémité à une force perpendiculaire à son plan

Le problème est tridimensionnel. Il a été proposé dans [bib12]. La figure [fig 13.3-a] montre trois configurations successives de la poutre de rayon initial 100, de section carrée et de caractéristiques :

$$EA=10^7, GA_1=GA_2=5\times10^6, \quad GI_1=EI_2=EI_3=8.333\times10^5.$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

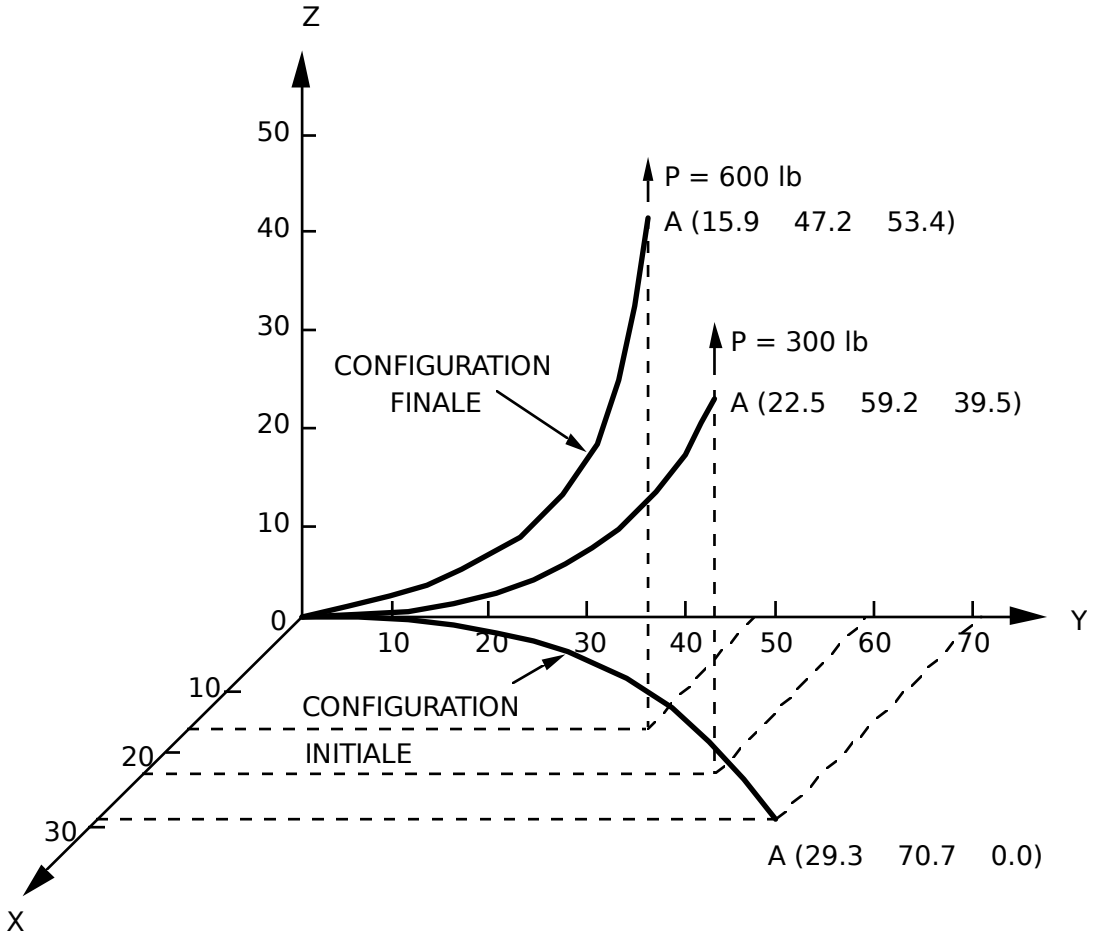


Figure 13.3-a : Trois configurations de la poutre (extrait de [bib12])

Nous avons modélisé la poutre par 8 éléments du 1er ordre. La force croît par incréments de 20. On a les résultats comparatifs suivants, pour les coordonnées du point d'application de la force, dans les configurations de la figure [fig 13.3-a].

FORCE		X	Y	Z
300	Nos calculs	22.3	58.9	40.1
	BATHE-BOLOURCHI	22.5	59.2	39.5
600	Nos calculs	15.7	47.3	53.4
	BATHE-BOLOURCHI	15.9	47.2	53.4

13.4 Mouvement d'une potence

Il s'agit d'un problème dynamique tridimensionnel traité dans [bib3].
Une potence est constituée d'un poteau et d'une traverse de longueur 10 [fig 13.4-a] (a). Le pied du poteau est encastré et l'on applique au raccord une force non-suiveuse, perpendiculaire au plan de la potence au repos [fig 13.4-a] (b).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

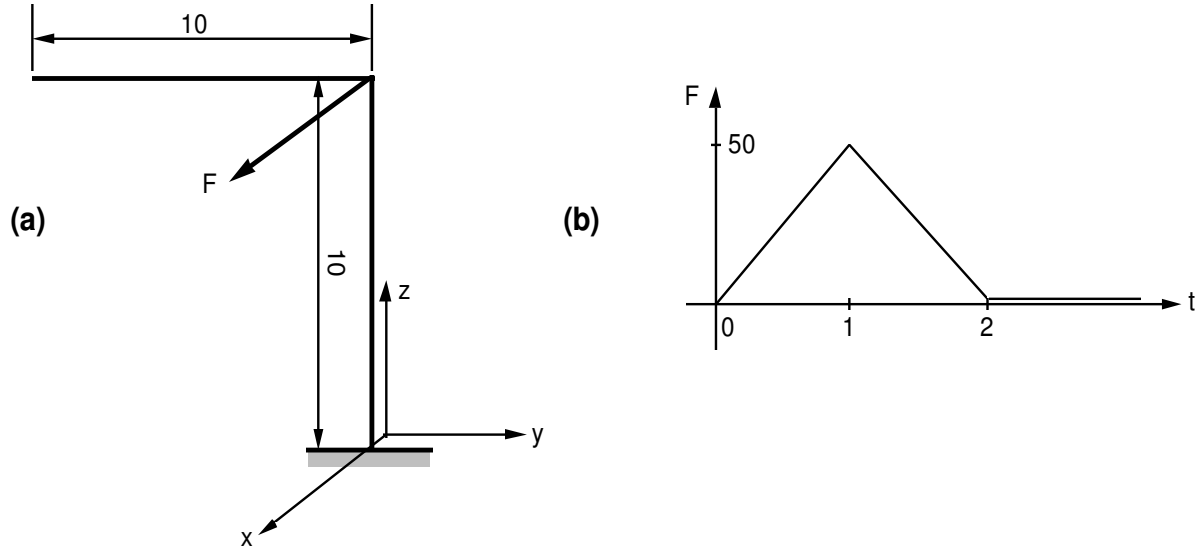


Figure 13.4-a : Potence soumise à une force dynamique perpendiculaire à son plan

Les caractéristiques des éléments fournis par [bib3] sont les suivantes :

$$EA = G A_1 = G A_2 = 10^6$$
$$G I_1 = E I_2 = E I_3 = 10^3$$
$$\rho A = 1$$
$$\rho I_2 = \rho I_3 = 10 \; ; \rho I_1 = 20$$

On remarque que ces données ne permettent pas d'identifier un matériau et une section de poutre, car on a à la fois :

$$\frac{EI_2}{\rho I_2} = 10^2 = \frac{E}{\rho} \text{ et } \frac{E A}{\rho A} = 10^6 = \frac{E}{\rho}$$

On ne peut donc traiter ce problème qu'en imposant, par programme, une caractéristique : on a choisi d'imposer le produit EA .

Le poteau et la traverse sont modélisés chacun par 4 éléments du 1er ordre et la durée de l'analyse comporte 120 pas égaux de 0.25.

Les figures [fig 13.4-b] et [fig 13.4-c] donnent l'évolution de la composante suivant $\mathbf{x}$ du déplacement respectivement pour le raccord et pour l'extrémité de la traverse. En cartouche, on a reproduit les courbes correspondantes données dans [bib3] pour deux modélisations.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

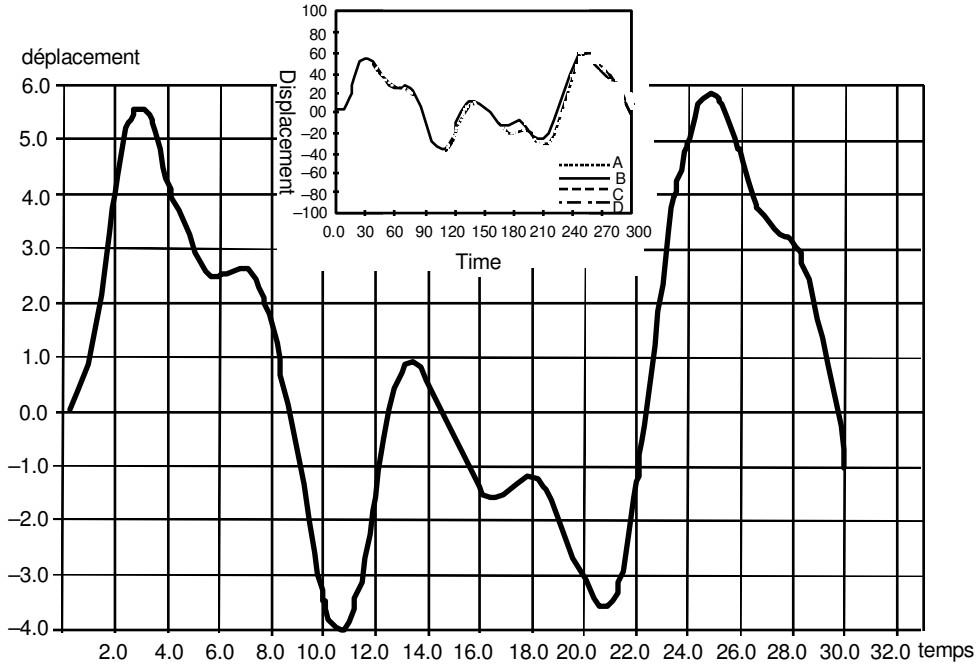


Figure 13.4-b : Potence de SIMO - Déplacement du raccord perpendiculairement au plan initial.

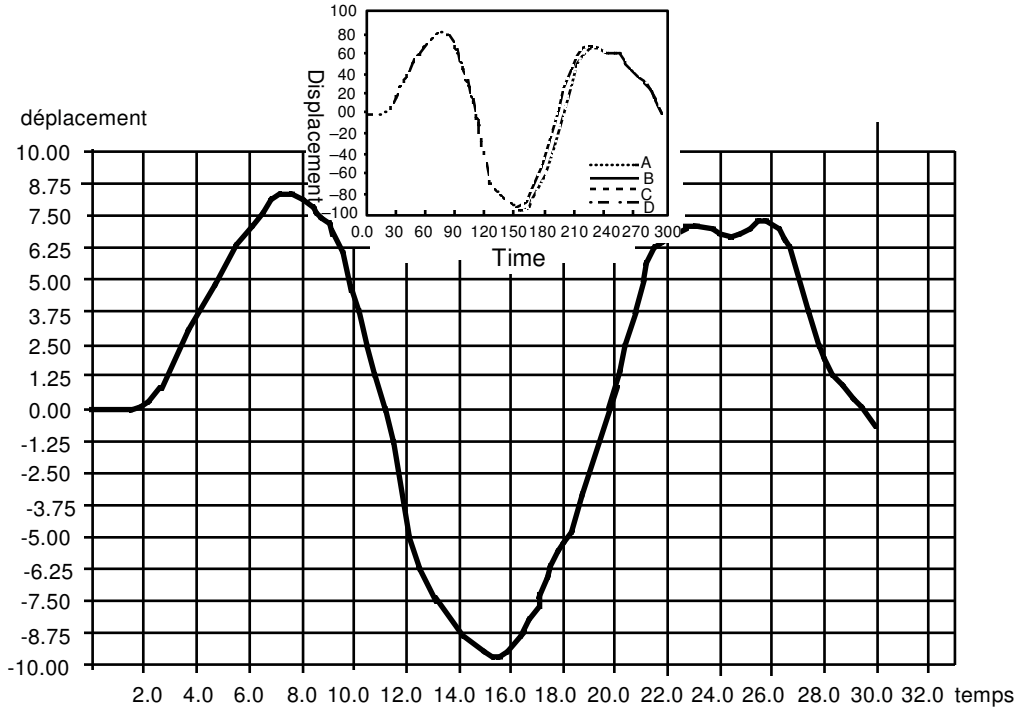


Figure 13.4-c : Potence de SIMO - Déplacement de l'extrémité perpendiculairement au plan initial.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

13.5 Mise en rotation d'un bras de robot

Un bras de robot OA est mis en mouvement dans le plan $e_1 e_2$ par une rotation $\Psi(t)$ imposée à son axe 0 [fig 13.5-a]. On veut calculer le déplacement de l'extrémité A dans un système d'axes $e_1' e_2'$ entraîné dans la rotation $\Psi(t)$.

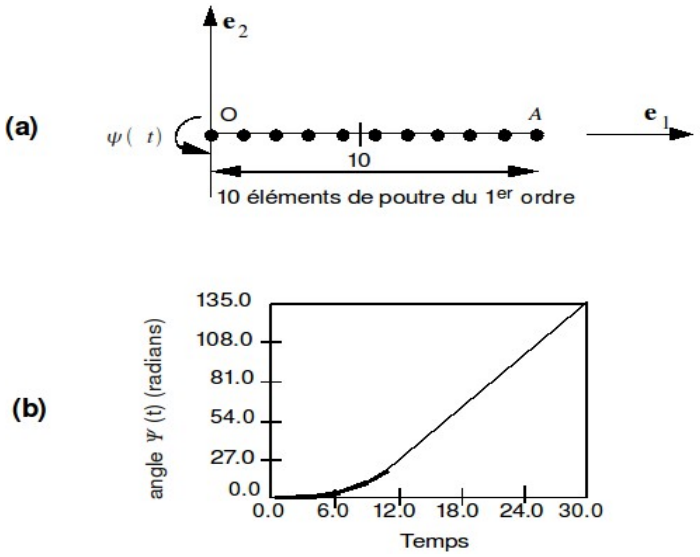


Figure 13.5-a : Bras de robot soumis à une rotation imposée.

Caractéristiques du matériau :

$$EA = 2.8\,10^7$$
$$GA_2 = 10^7$$
$$EI = 1.4\,10^4$$
$$A\rho = 1.2$$
$$I\rho = 6\,10^{-4}$$

Le pas de temps évolue de 0,05 au début de l'analyse à 0,001 à la fin.

Les figures [fig 13.5-b] et [fig 13.5-c] donnent l'évolution du déplacement suivant $\mathbf{e}_1'$ et suivant la direction perpendiculaire. On a reproduit, en cartouche, la courbe correspondante de [bib3]. Lorsque la vitesse de rotation devient constante, le bras subit un allongement permanent dû à la force centrifuge et il est soumis à une oscillation de flexion de faible amplitude.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

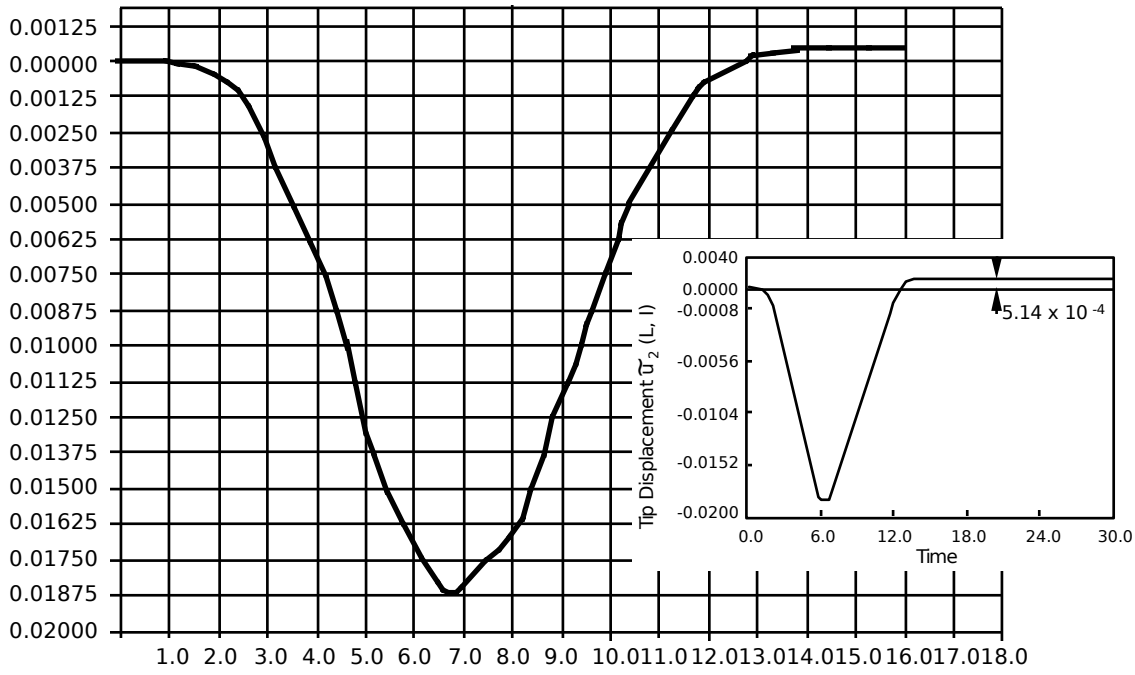


Figure 13.5-b : Déplacement suivant $\mathbf{e}_1'$

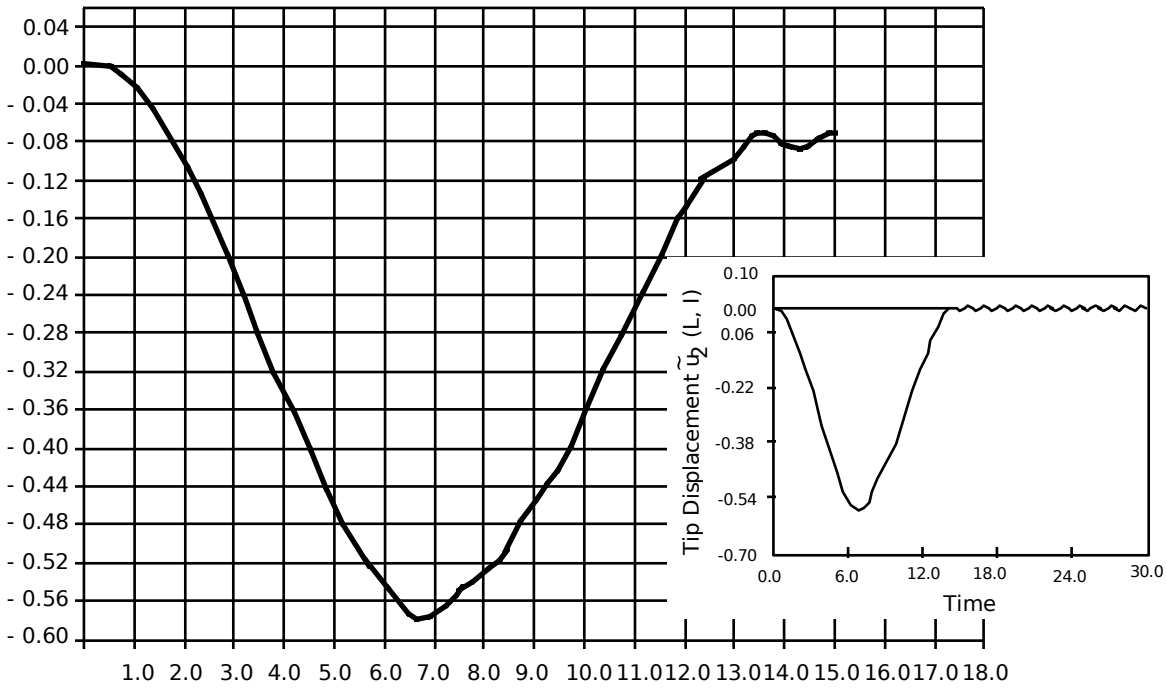


Figure 13.5-c : Déplacement suivant $\mathbf{e}_2'$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

14 Bibliographie

1) J.C. SIMO : A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. Comput. Meth. appl. Mech. Engng. 49, 55-70 (1985).

2) J.C. SIMO and L. VU-QUOC : A three-dimensional finite-strain rod model. Part II :computational aspects. Comput. Meth. appl. Mech. Engng. 58, 79-116 (1986).

3) J.C. SIMO and L. VU-QUOC : On the dynamics in space of rods undergoing large motions. A geometrically exact approach. Comput. Meth. appl. Mech. Engng. 66, 125-161 (1988).

4) A. CARDONA and M. GERADIN : A beam finite element nonlinear theory with finite rotations. Int. J. Numer. Meth. Engng. 26, 2403-2438 (1988).

5) A. CARDONA : An integrated approach to mechanism analysis. Thèse, Université de Liège (1989).

6) J. DUC et D. BELLET : Mécanique des solides réels. Elasticité. Cepadues-éditions (2e édition, 1984).

7) H. CHENG and K.C. GUPTA : An historical note on finite rotations. Journal of Applied Mechanics 56, 139-145 (1989).

8) E. REISSNER : On one-dimensional finite-strain beam theory : the plane problem. Journal of Applied Mathematics and Physics 23, 795-804 (1972).

9) H. CABANNES : Cours de Mécanique générale. Dunod (1961).

10) M. AUFAURE : Algorithme non linéaire dynamique du *Code_Aster*. Note HI-75/95/044/A.

11) D.A. DADEPPO and R. SCHMIDT : Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. Trans. *ASME* 97 (3) (1975).

12) K.J. BATHE and S. BOLOURCHI : Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. Int. J. Numer. Meth. Engng. 14, 961-986 (1979).

13) K.J. BATHE : Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall (1982).

14) D. HENROTIN : Rapport de stage à l'Institut Montefiore (Université de Liège). Communication privée.

15) P. de CASTELJAU : Les quaternions. Hermès (1987).

15 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	M.Aufaure EDF-R&D/MMN	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1 : Quelques définitions et résultats concernant les matrices antisymétriques d'ordre 3

A tout vecteur $\mathbf{u}$ d'ordre 3 et de composantes u_x, u_y, u_z on peut associer la matrice antisymétrique $\hat{\mathbf{u}}$ d'ordre 3 suivante :

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{éq A1-1}$$

Inversement, toute matrice antisymétrique d'ordre 3 peut s'écrire sous la forme [A1-1] et on peut donc lui associer un vecteur $\mathbf{u}$. Ce vecteur s'appelle le **vecteur axial** de la matrice.

On voit sans difficulté que :

$$\hat{\mathbf{u}}\,\mathbf{u} = 0 \qquad \textbf{éq A1-2}$$

autrement dit le vecteur axial est vecteur propre de l'antisymétrique associée pour la valeur propre 0.

- Quel que soit le vecteur $\mathbf{v}$:

$$\hat{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \qquad \textbf{éq A1-3}$$

$$\hat{\mathbf{u}}\,\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\,\mathbf{u}^T - (\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{1}. \qquad \textbf{éq A1-4}$$

- Si $\mathbf{u}$ est unitaire :

$$\hat{\mathbf{u}}^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}^T \text{ (matrice symétrique)}$$
$$\hat{\mathbf{u}}^3 = -\hat{\mathbf{u}} \text{ (matrice antisymétrique)}$$

D'où :

$$\hat{\mathbf{u}}^{2p} = (-1)^{p-1}\,\hat{\mathbf{u}}^2 \text{ (matrice symétrique)} \qquad \textbf{éq A1-5}$$

$$\hat{\mathbf{u}}^{2p-1} = (-1)^{p-1}\,\hat{\mathbf{u}} \text{ (matrice antisymétrique)} \qquad \textbf{éq A1-6}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 2 : Traitement des forces d'amortissement

Ces forces ne sont pas prises en compte actuellement dans le *Code_Aster*.

A2.1 Hypothèses et éléments de réduction au centre de la section

On fait l'hypothèse que l'élément de volume dv avoisinant un point $\mathbf{M}$ intérieur à la poutre est soumis à une force d'amortissement se composant de deux parties :

- pour le mouvement de translation de la section d'abscisse s à laquelle appartient $\mathbf{M}$:

$$d\,\bar{\mathbf{f}}_1 = -\xi_1 \dot{\mathbf{x}}_o(s,t)\,\mathrm{dv};$$

- pour le mouvement de rotation de vitesse angulaire ω autour du centre P' de la section :

$$d\,\bar{\mathbf{f}}_2 = -\xi_2 \boldsymbol{\omega}(s,t) \wedge \vec{P'M}\, dv.$$

Intégrées sur le volume de poutre de longueur ds, ces forces admettent pour éléments de réduction en P' :

- la force :

$$d\,\bar{\mathbf{f}} = -\xi_1 A \dot{\mathbf{x}}_o(s,t)\,\mathrm{ds};$$

- le moment :

$$d\,\bar{\mathbf{m}} = -\xi_2 ds \int_{section} \vec{P'M} \wedge \left[\boldsymbol{\omega}(s,t) \wedge \vec{P'M}\right] d\sigma = \frac{-\xi_2}{\rho} \mathbf{I}_\rho\, \boldsymbol{\omega}(s,t)\, ds$$

A2.2 Forces d'amortissement élémentaires

Le travail virtuel des forces d'amortissement est :

$$W_{amor} = -\int_{S_1}^{S_2} \begin{Bmatrix} \xi_1 A \dot{\mathbf{x}}_0 \\ \frac{\xi_2}{\rho} \mathbf{I}_\rho\, \omega \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{x}_0 \\ \delta \Psi \end{Bmatrix} ds$$

Si l'on prend l'amortissement en compte, W_{amor} doit être retranché au second membre de l'équation [éq 9-1].

Il en découle, comme au [§10.3] pour les forces d'inertie, que la contribution de l'élément e à la force d'amortissement au nœud i est :

$$\mathbf{F}^e_{\mathrm{amor}\ i} = -\int_e \begin{Bmatrix} N_i \xi_1 A \dot{\mathbf{x}}_0 \\ N_i \frac{\xi_2}{\rho} \mathbf{I}_\rho\, \boldsymbol{\omega} \end{Bmatrix} ds$$

Si l'on prend l'amortissement en compte, ces forces doivent s'ajouter au second membre de l'équation [éq 10.6-1].

A2.3 Matrices d'amortissement

D'après les relations [éq A4-3] et [éq A4-7] donnant les différentielles de Fréchet de $\dot{\mathbf{x}}_o$ et de $\boldsymbol{\omega}$ dans la direction $\Delta\phi$, et compte tenu que ([éq A4-5] et [éq A4-6]) :

$$\left(D\,\mathbf{I}_\rho . \Delta\Psi\right)\boldsymbol{\omega} = \left[-(\mathbf{I}_\rho \boldsymbol{\omega})^\wedge + \mathbf{I}_\rho \hat{\boldsymbol{\omega}}\right]\Delta\Psi$$

$$D W_{amor} . \Delta\Phi = -\int_{S_1}^{S_2} \delta\Phi . \begin{bmatrix} \xi_1 A \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\xi_2}{\rho} \mathbf{I}_\rho \end{bmatrix} \Delta\dot{\Phi}\, ds - \int_{S_1}^{S_2} \delta\Phi . \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-\xi_2}{\rho} \left(\mathbf{I}_\rho \boldsymbol{\omega}\right)^\wedge \end{bmatrix} \Delta\Phi\, ds$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On en déduit les matrices d'amortissement de l'élément e :

- au signe près, relation entre l'accroissement de vitesse au nœud j et l'accroissement de force d'amortissement au nœud i :

$$\mathbf{C}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{amor\ i\ j}}=\int_e N_i N_j \begin{bmatrix} \xi_1 A \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\xi_2}{\rho}\mathbf{I}_{\boldsymbol{\rho}} \end{bmatrix} ds$$

- au signe près, relation entre l'accroissement de déplacement au nœud j et l'accroissement de force d'amortissement au nœud i :

$$\mathbf{S}^{\mathbf{e}}_{\mathbf{amor\ i\ j}}=\int_e N_i N_j \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-\xi_2}{\rho}\left(\mathbf{I}_{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{\omega}\right)^{\wedge} \end{bmatrix} ds$$

Dans le crochet du premier membre de l'équation [éq 10.6.1], il faut ajouter :

- la matrice $\frac{\gamma}{\beta \Delta t}\mathbf{C}_{\text{amor}}$;
- la matrice $\mathbf{S}_{\text{amor}}$.

La matrice $\mathbf{C}^{e}_{\text{amor}}$. est symétrique, mais la matrice $\mathbf{S}^{e}_{\text{amor}}$. est antisymétrique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 3 : Algorithme de Newmark en grandes rotations

A3.1 Schéma classique de Newmark en translation

L'état de la ligne des centres (déplacement, vitesse et accélération) est supposé connu à l'instant $i-1$ L'algorithme de Newmark [bib10] et [bib13], repose sur les développements suivants du déplacement et de la vitesse, à l'itération $n+1$ de l'instant i :

$$\mathbf{x}_{o,i}^{n+1}=\mathbf{x}_{o,i-1}+\Delta t\,\dot{\mathbf{x}}_{o,i-1}+\frac{\Delta t^2}{2}\left[\left(1-2\beta\right)\ddot{\mathbf{x}}_{o,i-1}+2\beta\,\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}\right] \qquad \textbf{éq A3.1-1}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}=\dot{\mathbf{x}}_{o,i-1}+\Delta t\left[\left(1-\gamma\right)\ddot{\mathbf{x}}_{o,i-1}+\gamma\,\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}\right] \qquad \textbf{éq A3.1-2}$$

β et γ sont les paramètres de Newmark qui, dans le cas de la "règle du trapèze", valent $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$: les crochets dans les équations [éq A3.1-1] et [éq A3.1-2] sont alors les moyennes arithmétiques de $\ddot{\mathbf{x}}_{o,i-1}$ et de $\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}$

Récrivant chacune de ces relations à l'itération n de l'instant i et retranchant membre à membre des relations précédentes, il vient :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}=\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n}+\frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\mathbf{x}_{o,i}^{n+1}-\mathbf{x}_{o,i}^{n}\right) \text{ et } \dot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}=\dot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n}+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\mathbf{x}_{o,i}^{n+1}-\mathbf{x}_{o,i}^{n}\right)$$

Si l'on pose :

$$\mathbf{x}_{o,i}^{n+1}=\mathbf{x}_{o,i}^{n}+\Delta\,\mathbf{x}_{o,i}^{n+1}, \qquad \textbf{éq A3.1-3}$$

on a donc :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}=\ddot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n}+\frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\,\mathbf{x}_{o,i}^{n+1} \text{ et } \dot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n+1}=\dot{\mathbf{x}}_{o,i}^{n}+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\,\mathbf{x}_{o,i}^{n+1} \qquad \textbf{éq A3.1-4}$$

A3.2 Schéma de Newmark adapté aux grandes rotations

Pour unifier les calculs, on aimerait pouvoir écrire, en rotation, les relations analogues suivantes :

$$\omega_i^{n+1}=\omega_i^{n}+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\Psi_{i-1,i}^{n+1}-\Psi_{i-1,i}^{n}\right) \text{ et } \dot{\omega}_i^{n+1}=\dot{\omega}_i^{n}+\frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\Psi_{i-1,i}^{n+1}-\Psi_{i-1,i}^{n}\right)$$

où $\Psi_{i-1,i}^{n}$ et $\Psi_{i-1,i}^{n+1}$ sont respectivement les vecteurs incrément de rotation de la section considérée, entre l'instant $i-1$ et les itérations n et $n+1$ de l'instant i [A6].

Mais ces relations ne sont pas exactes parce qu'on ne peut pas combiner une vitesse (ou une accélération) angulaire à l'itération ($n+1$) de l'instant i avec la grandeur homologue à l'itération n et des vecteurs-rotation comptés à partir de la configuration à l'instant $i-1$ [A7]. On ne peut combiner qu'après avoir amené par rotation (on dit "transporté") toutes les grandeurs dans la même configuration. On choisit pour simplifier la configuration de référence.

Posons donc :

$$\mathbf{\Omega}_i^{n+1}=\mathbf{R}_i^{n+1,T}\,\omega_i^{n+1} \quad \mathbf{\Omega}_i^{n}=\mathbf{R}_i^{n,T}\,\omega_i^{n} \qquad \textbf{éq A3.2-1}$$

$$\mathbf{A}_i^{n+1}=\mathbf{R}_i^{n+1,T}\,\dot{\omega}_i^{n+1} \quad \mathbf{A}_i^{n}=\mathbf{R}_i^{n,T}\,\dot{\omega}_i^{n} \qquad \textbf{éq A3.2-2}$$

$$\mathbf{\Psi}_{i-1,i}^{n+1}=\mathbf{R}_{i-1}^{T}\,\Psi_{i-1,i}^{n+1} \quad \mathbf{\Psi}_{i-1,i}^{n}=\mathbf{R}_{i-1}^{T}\,\Psi_{i-1,i}^{n}$$

L'algorithme de Newmark en rotation se traduit par les relations suivantes :

- pour l'opérateur de rotation, [éq A6-1] :

$$\mathbf{R}_i^{n+1}=\exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\mathbf{R}_i^{n};$$

- pour l'incrément de vecteur-rotation depuis l'instant $i-1$, [éq A6-2] :

$$\exp\left(\hat{\Psi}_{i-1,i}^{n+1}\right)=\exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\exp\left(\hat{\Psi}_{i-1,i}^{n}\right);$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- pour la vitesse angulaire :

$$\Omega_i^{n+1}=\Omega_i^n+\frac{\gamma}{\beta\,\Delta t}\left(\mathbf{\Psi}^{n+1}_{i-1,i}-\mathbf{\Psi}^{n}_{i-1,i}\right);$$

- pour l'accélération angulaire :

$$\mathbf{A}_i^{n+1}=\mathbf{A}_i^n+\frac{1}{\beta\,\Delta t^2}\left(\mathbf{\Psi}^{n+1}_{i-1,i}-\mathbf{\Psi}^{n}_{i-1,i}\right).$$

Les deux précédentes relations donnent, par transport inverse sur la configuration $\begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix}$ et compte tenu des relations [éq A3.2-1] et [éq A3.2-2] :

$$\omega_i^{n+1}=\mathbf{R}_i^{n+1}\,\mathbf{R}_i^{n,T}\,\omega_i^n+\frac{\gamma}{\beta\,\Delta t}\,\mathbf{R}_i^{n+1}\,\mathbf{R}^T_{i-1}\left(\Psi^{n+1}_{i-1,i}-\Psi^{n}_{i-1,i}\right) \qquad \textbf{éq A3.2-3}$$

$$\dot{\omega}_i^{n+1}=\mathbf{R}_i^{n+1}\,\mathbf{R}_i^{n,T}\,\dot{\omega}_i^n+\frac{1}{\beta\,\Delta t^2}\,\mathbf{R}_i^{n+1}\,\mathbf{R}^T_{i-1}\left(\Psi^{n+1}_{i-1,i}-\Psi^{n}_{i-1,i}\right). \qquad \textbf{éq A3.2-4}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 4 : Calcul des différentielles de Fréchet

On aura à utiliser par la suite l'identité suivante, dite *crochet de Lie*, dont la démonstration est immédiate. Si $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ sont deux matrices antisymétriques du 3e ordre, de vecteurs axiaux $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, alors on a, pour tout vecteur $\mathbf{v}$:

$$\left(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}\right)\mathbf{v}=\left(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}\right)\wedge\mathbf{v} \qquad \textbf{éq A4-1}$$

Autrement dit : est le vecteur axial de la matrice antisymétrique $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$.

On appelle différentielle de Fréchet de la fonction $\mathbf{f}$ dans la direction $\Delta\mathbf{x}$, la quantité :

$$D\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right).\Delta\mathbf{x}=\operatorname{grad}\mathbf{f}.\Delta\mathbf{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\mathbf{f}\left(\mathbf{x}+\varepsilon\Delta\mathbf{x}\right).$$

C'est la partie principale de l'accroissement de $\mathbf{f}$ correspondant à l'accroissement $\Delta\mathbf{x}$ de la variable $\mathbf{x}$.

Voici le catalogue des différentielles de Fréchet intervenant dans cette note.

$$D\mathbf{x}_o'.\Delta\mathbf{x}_o=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathbf{x}_o+\varepsilon\Delta\mathbf{x}_o\right)'=\left(\Delta\mathbf{x}_o\right)'=\Delta\mathbf{x}_o' \qquad \textbf{éq A4-2}$$

$$D\dot{\mathbf{x}}_o.\Delta\mathbf{x}_o=\Delta\dot{\mathbf{x}}_o \qquad \textbf{éq A4-3}$$

$$D\ddot{\mathbf{x}}_o.\Delta\mathbf{x}_o=\Delta\ddot{\mathbf{x}}_o \qquad \textbf{éq A4-4}$$

$$D\mathbf{R}.\Delta\boldsymbol{\Psi}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\exp\left(\varepsilon\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right)\mathbf{R}\right]=\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\,\mathbf{R} \qquad \textbf{éq A4-5}$$

$$D\mathbf{R}^T.\Delta\boldsymbol{\Psi}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\mathbf{R}^T\exp\left(-\varepsilon\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right)\right]=-\mathbf{R}^T\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}} \qquad \textbf{éq A4-6}$$

car, d'après l'équation [éq 4.2-6] :

$$\left[\exp\left(\varepsilon\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right)\right]^T=\exp\left(-\varepsilon\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right).$$

$$\hat{\omega}=\dot{\mathbf{R}}\,\mathbf{R}^T.$$

Or :

$$D\dot{\mathbf{R}}.\Delta\boldsymbol{\Psi}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\left[\exp\left(\varepsilon\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right)\mathbf{R}\right]^{\cdot}=\Delta\hat{\dot{\boldsymbol{\Psi}}}\,\mathbf{R}+\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\,\dot{\mathbf{R}}.$$

Donc, d'après [éq A4-6] :

$$D\hat{\omega}.\Delta\boldsymbol{\Psi}=\left(D\dot{\mathbf{R}}.\Delta\boldsymbol{\Psi}\right)\mathbf{R}^T+\dot{\mathbf{R}}\left(D\mathbf{R}^T.\Delta\boldsymbol{\Psi}\right)=\Delta\hat{\dot{\boldsymbol{\Psi}}}+\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}\,\hat{\omega}-\hat{\omega}\Delta\hat{\boldsymbol{\Psi}}.$$

Soit, en utilisant le **crochet de Lie** [éq A4-1] :

$$D\omega.\Delta\boldsymbol{\Psi}=\Delta\dot{\boldsymbol{\Psi}}-\omega\wedge\boldsymbol{\Psi} \qquad \textbf{éq A4-7}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 5 : Compléments sur le calcul des matrices de rigidité

Cette annexe développe les calculs du [§9.1].

A5.1 Matrice de rigidité géométrique

$$\left[D\left(\mathbf{B}\,\delta\phi\right).\Delta\phi\right].\Pi\begin{Bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{M}\end{Bmatrix}+\left(\mathbf{B}\,\delta\phi\right).\left[D\,\Pi.\Delta\phi\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{M}\end{Bmatrix}=$$
$$\left(\Delta\mathbf{x}_o'\wedge\delta\Psi\right).\mathbf{f}+\left(\delta\mathbf{x}_o'+\mathbf{x}_o'\wedge\delta\Psi\right).\Delta\hat{\Psi}\,\mathbf{f}+\delta\Psi'.\Delta\hat{\Psi}\,\mathbf{m}.$$

En réarrangeant les termes et en utilisant l'identité vectorielle :

$$\mathbf{a}.\left(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\right)=\mathbf{c}.\left(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\right),$$

Le second membre précédent s'écrit :

$$-\delta\mathbf{x}_o'.\mathbf{f}\wedge\Delta\Psi-\delta\Psi'.\mathbf{m}\wedge\Delta\Psi+\delta\Psi.\mathbf{f}\wedge\Delta\mathbf{x}_o'+\delta\Psi.\left(\hat{\mathbf{x}}_o'\hat{\mathbf{f}}\right)\Delta\Psi=\mathbf{Y}\,\delta\phi.\mathbf{E}\,\mathbf{Y}\Delta\phi.$$

A5.2 Matrices de rigidité matérielle et complémentaire

Comme il est montré au [§9.1] :

$$D\begin{Bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{M}\end{Bmatrix}.\Delta\phi=\mathbf{C}\,\Pi^T\mathbf{B}\Delta\phi-\mathbf{C}\,\Pi^T\begin{pmatrix}\Delta\hat{\Psi} & 0\\ 0 & \Delta\hat{\Psi}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \chi\end{Bmatrix}.$$

Or :

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \chi\end{Bmatrix}=\Pi\,\mathbf{C}^{-1}\,\Pi^T\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\left(\mathbf{B}\,\delta\phi\right).\Pi\left(D\begin{Bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{M}\end{Bmatrix}.\Delta\phi\right)=\left(\mathbf{B}\,\delta\phi\right).\Pi\,\mathbf{C}\,\Pi^T\mathbf{B}\Delta\phi \qquad \textbf{éq A5.2-1}$$
$$-\left(\mathbf{B}\,\delta\phi\right).\Pi\,\mathbf{C}\,\Pi^T\begin{pmatrix}\Delta\hat{\Psi} & 0\\ 0 & \Delta\hat{\Psi}\end{pmatrix}\Pi\,\mathbf{C}^{\pm1}\,\Pi^T\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}.$$

Le terme :

$$\left(\mathbf{B}\,\delta\phi\right).\Pi\,\mathbf{C}\,\Pi^T\mathbf{B}\Delta\phi$$

conduit immédiatement à la **matrice de rigidité matérielle**.

D'autre part :

$$\begin{pmatrix}\Delta\hat{\Psi} & 0\\ 0 & \Delta\hat{\Psi}\end{pmatrix}\Pi\,\mathbf{C}^{-1}\,\Pi^T\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{m}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\left(\mathbf{R}_{\text{tot}}\,\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{R}_{\text{tot}}^T\mathbf{f}\right)^{\wedge}\Delta\Psi\\ \left(\mathbf{R}_{\text{tot}}\,\mathbf{C}_2^{-1}\,\mathbf{R}_{\text{tot}}^T\mathbf{m}\right)^{\wedge}\Delta\Psi\end{Bmatrix}.$$

Le second terme de l'équation [éq A5.2-1] s'écrit donc :

$$\mathbf{B}\,\delta\phi.\begin{bmatrix}0 & \mathbf{R}_{\text{tot}}\,\mathbf{C}_1\,\mathbf{R}_{\text{tot}}^T\left(\mathbf{R}_{\text{tot}}\,\mathbf{C}_1^{\pm1}\mathbf{R}_{\text{tot}}^T\mathbf{f}\right)^{\wedge}\\ 0 & \mathbf{R}_{\text{tot}}\,\mathbf{C}_2\,R_{\text{tot}}^T\left(\mathbf{R}_{\text{tot}}\,\mathbf{C}_2^{\pm1}\mathbf{R}_{\text{tot}}^T\,m\right)^{\wedge}\end{bmatrix}\Delta\phi.$$

En désignant par $\mathbf{Z}$ la matrice entre crochets de l'expression qui précède, $\mathbf{B}^{\mathbf{t}}\mathbf{Z}$ **est la matrice de rigidité complémentaire**.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 6 : Principe du calcul itératif des rotations

Cette annexe visualise l'opération d'exponentiation, définit les vecteurs incrément de rotation qui interviennent dans l'annexe 3 et donne la relation entre eux.

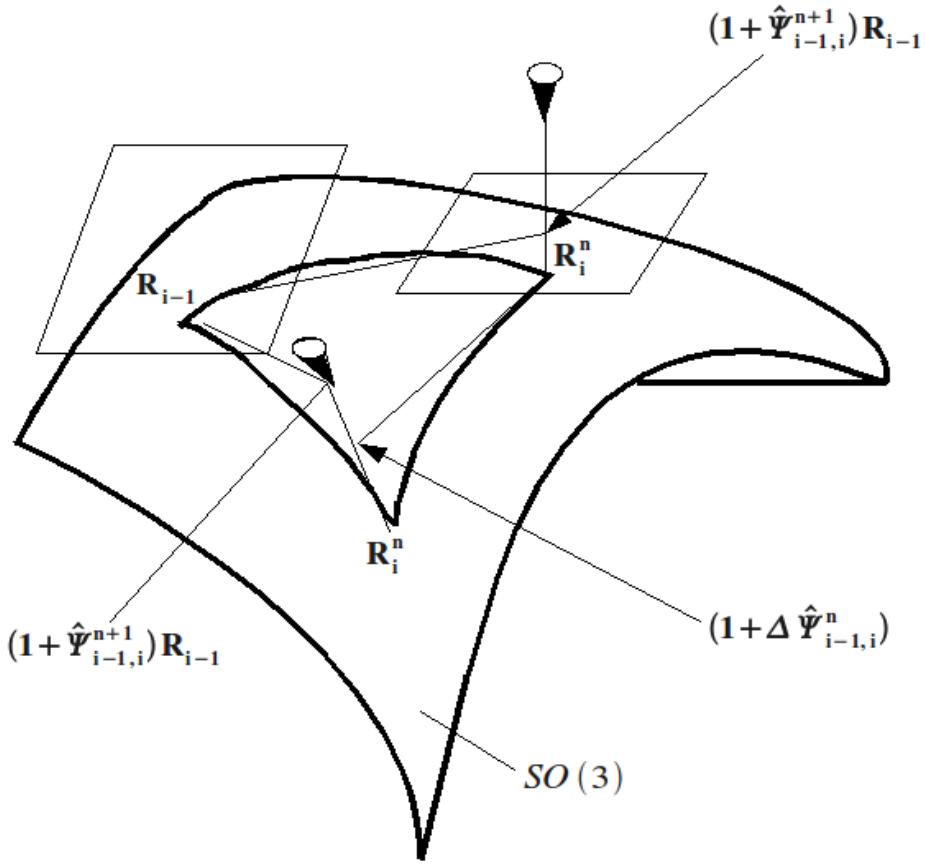


Figure A6-a : Représentation des opérateurs intervenant dans la rotation des sections. : symbole de la projection exponentielle

La surface courbe de la figure [fig. A6-a] représente l'ensemble $SO(3)$ des opérateurs de rotation $\mathbf{R}$. On a figuré les espaces tangents à $SO(3)$ en $\mathbf{R_{i-1}}$, rotation calculée à l'instant $i-1$, et en, n $\mathbf{R^n_i}$-ième itération dans le calcul de la rotation à l'instant i.

Soit Ψ_{i-1} le vecteur rotation correspondant à . $\mathbf{R_{i-1}}$ Il existe un vecteur incrément de rotation $\Psi^n_{i-1,i}$ tel que :

$$\mathbf{R}^n_i = \exp\left(\hat{\Psi}^n_{i-1,i}\right)\mathbf{R}_{i-1}.$$

Si l'équation d'équilibre de la poutre n'est pas satisfaite, à l'instant i, par $\mathbf{R^n_i}$, on cherche une correction $\Delta\Psi^{n+1}_i$ de $\Psi^n_{i-1,i}.\Delta\Psi^{n+1}_i$ s'obtient par **linéarisation**, en remplaçant dans l'équation d'équilibre, d'après l'équivalence [éq 4.2-5] :

$$\exp\Delta\hat{\Psi}^{n+1}_i\mathbf{R}^n_i \text{ par } \left(1+\Delta\hat{\Psi}^{n+1}_i\right)\mathbf{R}^n_i.$$

La seconde des expressions précédentes n'est pas un opérateur de rotation, mais se trouve dans l'espace tangent à $SO(3)$ en $\mathbf{R^n_i}$ [fig A6-a]. Ayant calculé $\Delta\Psi^{n+1}_i$, $\mathbf{R}^{n+1}_i$ s'en déduit en projetant par exp sur $SO(3)$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{R}_i^{n+1}=\exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\mathbf{R}_i^n. \qquad \textbf{éq A6-1}$$

L'incrément d'angle de rotation $\Psi_{i-1,i}^{n+1}$ faisant passer de $\mathbf{R_{i-1}}$ à $\mathbf{R}_i^{n+1}$ est tel que :

$$\mathbf{R}_i^{n+1}=\exp\left(\hat{\Psi}_{i-1,i}^{n+1}\right)\mathbf{R}_{i-1}.$$

Les vecteurs-rotation n'étant pas additifs, **on n'a pas** :

$$\Psi_{i-1,i}^{n+1}=\Delta\Psi_i^{n+1}+\Psi_{i-1,i}^n,$$

mais on a :

$$\exp\left(\hat{\Psi}_{i-1,i}^{n+1}\right)=\exp\left(\Delta\hat{\Psi}_i^{n+1}\right)\exp\left(\hat{\Psi}_{i-1,i}^n\right) \qquad \textbf{éq A6-2}$$

Au [§10.7.2], on résout l'équation précédente par rapport à $\Psi_{i-1,i}^{n+1}$ en utilisant les propriétés des quaternions.

Les incréments d'angle de rotation $\Psi_{i-1,i}^n$ et $\Psi_{i-1,i}^{n+1}$ servent à calculer les corrections de vitesse et d'accélération de $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix}$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 7 : Nécessité du transport dans un espace de référence pour les opérations vectorielles relatives au mouvement de rotation

Les grandeurs cinématiques, vitesses et accélérations, dans une configuration donnée se trouvent dans l'espace vectoriel tangent à $SO(3)$ au point défini par la rotation de la configuration par rapport à la position de référence. On ne peut combiner les grandeurs relatives à deux configurations distinctes qu'après les avoir transportées dans un même espace vectoriel pris pour référence. L'exemple qui suit fera comprendre cette nécessité.

Examinons la vitesse angulaire d'un gyroscope à trois instants t_1, t_2 et t_3 [fig A7-a]. Supposons qu'on passe de la configuration 1 à la configuration 2 par la rotation d'angle $-\pi$ autour de $\mathbf{e}_1$, et de la configuration 1 à la configuration 3 par la rotation d'angle $-\pi/2$ autour du même axe. En 1, la vitesse angulaire est portée par l'axe du gyro et a pour composantes $(0,0,\omega)$ dans les axes généraux $\mathbf{e}_1$ $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$. En 2, la vitesse angulaire est également portée par l'axe et a pour composantes générales $(0,0,-3\omega)$. On veut déterminer les composantes générales de la vitesse en 3, sachant que cette vitesse est la moyenne des vitesses en 1 et 2.

Que la vitesse angulaire en 3 soit la moyenne des vitesses angulaires en 1 et 2 ne signifie pas qu'elle soit la moyenne dans les axes généraux, mais dans les axes liés au gyro. Dans l'exemple, puisque le gyro tourne autour de son axe, en 1 avec la vitesse ω, en 2 avec la vitesse 3 ω, alors en 3 il tourne autour de cet axe avec la vitesse 2ω. Donc, en 3, les composantes générales de la vitesse angulaire sont $(0,2\omega,0)$.

Compte tenu du [§5], on obtient le résultat précédent en "transportant" le vecteur vitesse angulaire de la configuration 2 sur la configuration 1, prise pour référence, c'est-à-dire en faisant tourner ce vecteur de l'angle π autour de $\mathbf{e}_1$. Ses composantes générales sont alors $(0,0,3\omega)$. On fait la moyenne de ce vecteur et du vecteur vitesse angulaire en 1, pour obtenir le vecteur de composantes $(0,0,2\omega)$. On "transporte" enfin ce dernier vecteur sur la configuration 3 en le faisant tourner de $-\pi/2$ autour de $\mathbf{e}_1$, et l'on aboutit bien au vecteur vitesse angulaire de composantes générales $(0,2\omega,0)$.

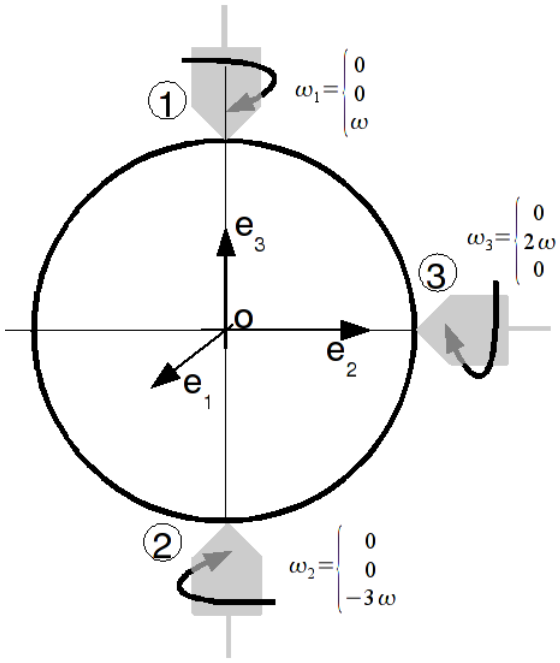


Figure A7-a : Évolution de la vitesse angulaire d'un gyroscope.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 8 : Utilisation des quaternions en modélisation des grandes rotations [bib14] [bib15]

A8.1 Définitions

Un **quaternion**, noté $(\mathbf{q})$ ou $(x_o, \mathbf{x})$, est défini par l'ensemble d'un scalaire x_o et d'un vecteur à trois dimensions $\mathbf{x}(x_1 \ x_2 \ x_3)$:

$$(x_o, \mathbf{x}) = x_o + x_1 \iota + x_2 \kappa + x_3 \lambda, \ ,$$

ι, κ et λ étant trois nombres satisfaisant aux relations :

$$\iota^2 = \kappa^2 = \lambda^2 = -1 ;$$
$$\iota\kappa = -\kappa\iota = \lambda ; \kappa\lambda = -\lambda\kappa = \iota ; \lambda\iota = -\iota\lambda = \kappa .$$

Quaternion conjugué

Le conjugué, noté *, d'un quaternion s'obtient en changeant le signe de la partie vectorielle :

$$(x_o, \mathbf{x})^* = (x_o, -\mathbf{x}).$$

Quaternion purement vectoriel

Un quaternion est dit purement vectoriel quand sa partie scalaire est nulle et qu'il est donc de la forme : $(0, \mathbf{x})$. Un quaternion $(\mathbf{v})$ est purement vectoriel si et seulement si :

$$(\mathbf{v}) + (\mathbf{v})^* = (\boldsymbol{0}).$$

A8.2 Éléments d'algèbre des quaternions

Multiplication

En appliquant la définition, on montre immédiatement que la multiplication, notée $\circ$, de deux quaternions est :

$$(x_o, \mathbf{x}) \circ (y_o, \mathbf{y}) = (x_o y_o - \mathbf{x}.\mathbf{y}, x_o \mathbf{y} + y_o \mathbf{x} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}).$$

On vérifie que cette multiplication est :

- associative :

$$\left[(x_o, \mathbf{x}) + (y_o, \mathbf{y})\right] \circ (z_o, \mathbf{z}) = (x_o, \mathbf{x}) \circ (z_o, \mathbf{z}) + (y_o, \mathbf{y}) \circ (z_o, \mathbf{z}) ;$$

- non commutative car :

$$(x_o, \mathbf{x}) \circ (y_o, \mathbf{y}) - (y_o, \mathbf{y}) \circ (x_o, \mathbf{x}) = (0, 2\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}).$$

Norme d'un quaternion, notée $\|.\|$:

$$\|(x_o, \mathbf{x})\|^2 = (x_o, \mathbf{x}) \circ (x_o, \mathbf{x})^* = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Un **quaternion** est **unitaire** si sa norme est égale à l'unité. On vérifie que :

$$\left[(\mathbf{q_1}) \circ (\mathbf{q_2})\right]^* = (\mathbf{q_2})^* \circ (\mathbf{q_1})^*.$$

A8.3 Représentation d'une rotation par un quaternion

Si $(\mathbf{v_1})$ est un quaternion purement vectoriel et $(\mathbf{u})$ un quaternion unitaire, alors le quaternion $(\mathbf{v_2})$ tel que :

$$(\mathbf{v_2}) = (\mathbf{u}) \circ (\mathbf{v_1}) \circ (\mathbf{u})^* \qquad \textbf{éq A8.3-1}$$

est purement vectoriel et a même norme que $(\mathbf{v_1})$. En effet :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_2)+(\mathbf{v}_2)^*&=(\mathbf{u})\circ(\mathbf{v}_1)\circ(\mathbf{u})^*+(\mathbf{u})\circ(\mathbf{v}_1^*)\circ(\mathbf{u})^*\\&=(\mathbf{u})\circ\left[(\mathbf{v}_1)+(\mathbf{v}_1)^*\right]\circ(\mathbf{u})^*=(0);\\(\mathbf{v}_2)\circ(\mathbf{v}_2)^*&=(\mathbf{u})\circ(\mathbf{v}_1)\circ(\mathbf{u})^*\circ(\mathbf{u})\circ(\mathbf{v}_1)^*\circ(\mathbf{u})^*=\|(\mathbf{v}_1)\|^2.\end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$(\mathbf{v}_1)=(0,\mathbf{x});(\mathbf{v}_2)=(0,\mathbf{y})\ ,$$

on voit que, par la relation [éq A8.3-1], le quaternion unitaire $(\mathbf{u})$ définit une transformation orthogonale du vecteur $\mathbf{x}$ sur le vecteur $\mathbf{y}$. Cette transformation est la rotation dont la matrice est définie par [éq A8.5-1].

La **rotation inverse** est définie par le quaternion $(\mathbf{u})^*$, car :

$$(\mathbf{u})^*\circ(\mathbf{v}_2)\circ(\mathbf{u})=(\mathbf{u})^*\circ(\mathbf{u})\circ(\mathbf{v}_1)\circ(\mathbf{u})^*\circ(\mathbf{u})=(\mathbf{v}_1).$$

A8.4 Rotations successives

Faisons subir au quaternion purement vectoriel $(\mathbf{v}_1)$ deux rotations successives définies par les quaternions unitaires $(\mathbf{u}_1)$ et $(\mathbf{u}_2)$:

$$(\mathbf{v}_2)=(\mathbf{u}_1)\circ(\mathbf{v}_1)\circ(\mathbf{u}_1)^*$$

et :

$$(\mathbf{v}_3)=(\mathbf{u}_2)\circ(\mathbf{v}_2)\circ(\mathbf{u}_2)^*=(\mathbf{u}_2)\circ(\mathbf{u}_1)\circ(\mathbf{v}_1)\circ\left[(\mathbf{u}_2)\circ(\mathbf{u}_1)\right]^* \qquad \textbf{éq A8.4-1}$$

On voit sur le dernier membre de [éq A8.4-1] que **le quaternion unitaire définissant le produit de deux rotations est égal au produit des quaternions de ces rotations**.

A8.5 Expressions matricielles

Soit $(\mathbf{q})$ un quaternion :

$$(\mathbf{q})(\mathbf{q})=(x_o,\mathbf{x})\ .$$

Posons :

$$\underline{(\mathbf{q})}=\begin{Bmatrix}x_o\\\mathbf{x}\end{Bmatrix},$$

$\underline{(\mathbf{q})}$ est le vecteur formé des quatre composantes du quaternion.

Définissons deux matrices construites sur $(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{q})}=\begin{bmatrix}x_o & -\mathbf{x}^T\\\mathbf{x} & x_o\mathbf{1}+\hat{\mathbf{x}}\end{bmatrix}\text{ et }\mathbf{B}_{(\mathbf{q})}=\begin{bmatrix}x_o & -\mathbf{x}^T\\\mathbf{x} & x_o\mathbf{1}-\hat{\mathbf{x}}\end{bmatrix}.$$

On vérifie sans peine, d'après la règle de multiplication, que :

$$\underline{(\mathbf{q}_1)\circ(\mathbf{q}_2)}=\mathbf{A}_{(\mathbf{q}_1)}\underline{(\mathbf{q}_2)}=\mathbf{B}_{(\mathbf{q}_2)}\underline{(\mathbf{q}_1)}\ .$$

Prenons maintenant la rotation définie par le quaternion unitaire $(\mathbf{u})=(e_o,\mathbf{e})$. Si :

$$(\mathbf{v}_2)=(\mathbf{u})(\mathbf{v}_1)(\mathbf{u})^*\ .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Alors :

$$\underline{\left(\mathbf{v}_2\right)}=\mathbf{A}_{(\mathbf{u})}\mathbf{B}_{(\mathbf{u})}^{\mathbf{T}}\underline{\left(\mathbf{v}_1\right)} .$$

D'autre part :

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{u})}\mathbf{B}_{(\mathbf{u})}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{R}\end{bmatrix},$$

avec :

$$\mathbf{R}=\mathbf{e}\mathbf{e}^T+e_o^2\mathbf{1}+2e_o\hat{\mathbf{e}}+\hat{\mathbf{e}}^2 ,$$

soit, en utilisant la relation [éq A1-4] :

$$\mathbf{R}=\left(2e_o^2-1\right)\mathbf{1}+2\left(\mathbf{e}\mathbf{e}^T+e_o\hat{\mathbf{e}}\right) \qquad \textbf{éq A8.5-1}$$

En rapprochant la relation précédente de l'équation [éq 4.2-3], on voit que les composantes du quaternion unitaire définissant une rotation ne sont autres que les paramètres d'Euler de cette rotation.

A8.6 Passage d'un vecteur-rotation au quaternion associé et vice-versa

L'opérateur $\mathbf{Q}$ qui fait passer d'un vecteur rotation $\mathbf{\Psi}$ au quaternion associé est défini par les relations [éq 4.2-2] :

$$e_o=\cos\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{\Psi}\|\right) \qquad \textbf{éq A8.6-1}$$

$$\mathbf{e}=\sin\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{\Psi}\|\right)\frac{\mathbf{\Psi}}{\|\mathbf{\Psi}\|} \qquad \textbf{éq A8.6-2}$$

L'opérateur $\mathbf{Q}^{-1}$ est moins simple car l'inverse d'une fonction trigonomitrique n'a pas une détermination unique.

Mais on remarque sur [éq 10.7.2-1] et [éq 10.7.2-2] que $\mathbf{Q}^{-1}$ sert à calculer le vecteur-rotation $\mathbf{\Psi}^{n+1}$ déduit du vecteur-rotation $\mathbf{\Psi}^n$ par la **correction** $\Delta\mathbf{\Psi}^{n+1}$. En général :

$$\|\Delta\mathbf{\Psi}^{n+1}\|<<\|\mathbf{\Psi}^n\| .$$

Nous avons donc adopté la stratégie suivante : parmi toutes les déterminations du vecteur $\mathbf{\Psi}^{n+1}$ on prend celle dont le module est le plus proche de :

$$\|\Delta\mathbf{\Psi}^{n+1}+\mathbf{\Psi}^n\| .$$

Dans le cas plan, cette stratégie est rigoureuse [§ 4.1], mais dans le cas tridimensionnel elle ne l'est pas parce-que :

$$\Delta\mathbf{\Psi}^{n+1}+\mathbf{\Psi}^n\neq\mathbf{\Psi}^{n+1} .$$

De [éq A8.6-1], on tire :

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{\Psi}^{n+1}\|=\pm\cos^{-1}\left(e_o\right)+2\mathrm{k}\pi .$$

La stratégie adoptée conduit à une seule détermination de $\frac{1}{2}\|\mathbf{\Psi}^{n+1}\|$.

[éq A8.6-2] donne alors :

$$\mathbf{\Psi}^{n+1}=2\frac{\frac{1}{2}\|\mathbf{\Psi}^{n+1}\|}{\sin\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{\Psi}^{n+1}\|\right)}\mathbf{e} .$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)