Homogénéisation de structures hétérogènes périodiques

Résumé :

On expose les hypothèses et les méthodes employées dans la commande CALC_MATE_HOMO [U4.43.07] qui effectue le calcul des propriétés thermiques et thermoélastiques linéaires homogénéisées pour des structures hétérogènes périodiques à pas rectangulaire avec des cellules de base possédant des symétries par rapport à des plans orthogonaux dans l'espace cartésien. Le cas à symétrie hexagonale peut aussi être traité.

On obtient une table des coefficients thermiques et thermoélastiques linéaires homogénéisés qu'on pourra employer pour définir des matériaux équivalents orthotropes, qui peuvent être paramétrés par des variables de commande, comme la température ou l'irradiation.
Tous les champs de correcteurs thermiques et thermoélastiques sont aussi produits, afin de permettre une exploitation ultérieure en vue de reconstituer la solution complète localisée à l'échelle microscopique à partir de la solution macroscopique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Introduction....2
2Hypothèses....4
3Méthodes....6
3.1Homogénéisation en thermique linéaire tridimensionnelle....6
3.2Homogénéisation en thermoélasticité linéaire tridimensionnelle....7
3.3Homogénéisation en élasticité linéaire de plaque de Love-Kirchhoff en flexion-membrane....9
4Résultats....11
4.1Homogénéisation en thermique linéaire tridimensionnelle....12
4.2Homogénéisation en thermoélasticité linéaire tridimensionnelle....12
4.3Homogénéisation en élasticité linéaire de plaque de Love-Kirchhoff en flexion-membrane....12
5E xemples....13
5.1Plaque élastique stratifiée....13
6Bibliographie....14

1 Introduction

On considère des milieux continus ou des structures hétérogènes, dont les propriétés géométriques et/ou physiques varient « rapidement » et périodiquement en espace par rapport à l'échelle des chargements exercés, ici avec un pas rectangulaire. Ils sont donc caractérisés par une « cellule de base » tridimensionnelle, appelée aussi « volume élémentaire représentatif », possédant dans le cadre étudié ici des symétries géométriques et matérielles par rapport à des plans orthogonaux dans l'espace cartésien. On s'intéresse au comportement « macroscopique » de ces structures, pour en déterminer la réponse globale , mais également on souhaite retourner à l'échelle « microscopique » sur une « cellule de base », pour accéder à des grandeurs d'intérêt à cette échelle.

Cela peut être des plaques multi-perforées, des composites à fibre, constitués d'un motif répétitif...

L'objectif est d'établir les propriétés homogénéisées en thermique linéaire tridimensionnelle, et, selon le type de structure hétérogène, cf. [bib4], en thermoélasticité linéaire tridimensionnelle, cf. [bib5], ou en élasticité linéaire de plaque de Love-Kirchhoff en flexion-membrane, cf. [bib3]. On utilise pour cela la « méthode des moyennes », justifiée par développement asymptotique, cf. [bib6].

En thermique linéaire tridimensionnelle, on admet pouvoir considérer pour la structure hétérogène étudiée des transitoires suffisamment lents, de sorte à pouvoir séparer les échelles spatiales sur l'effet de la dérivée temporelle de la température sur l'évolution de l'enthalpie volumique macroscopique. L'effet d'un choc thermique ne peut donc pas être traité ainsi.

En thermo-élasticité, on distingue les situations :

- des solides tridimensionnels hétérogènes périodiques dans les trois directions de l'espace cartésien ;
- des solides tridimensionnels hétérogènes élancés, de géométrie plane ou courbe : plaque ou coque, périodiques dans les deux directions du plan tangent. On se place dans le cas « standard » , cf. [bib 3] et Figure 1-a , où le pas de périodicité est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque ou de la coque, et où on considère que ce pas de périodicité est faible devant la courbure moyenne de la coque, de sorte d'admettre une métrique cartésienne dans la cellule de base .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

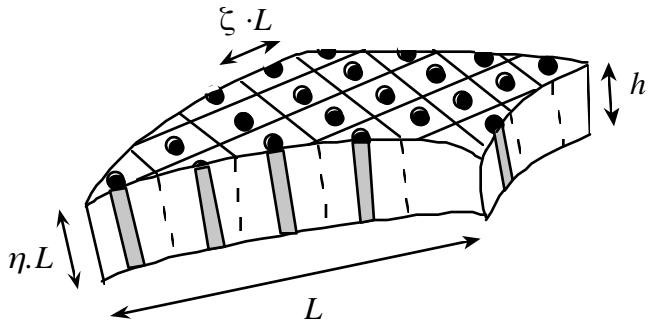


Figure 1-a : Schéma d'une plaque hétérogène périodique : pas de périodicité du même ordre de grandeur que l'épaisseur.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Hypothèses

On présente les hypothèses admises dans le traitement proposé par la commande CALC_MATE_HOMO [U4.43.07]. Le solide hétérogène tridimensionnel étudié peut être :

- de dimensions quelconques dans les trois directions spatiales : on réalise alors une homogénéisation tridimensionnelle, cf. [bib1] , [bib2] .
- élancé, avec une dimension faible devant les deux autres, de type plaque ou coque mince : on réalise alors une homogénéisation dans le cadre de la théorie des plaques hétérogènes, en cinématique de Love-Kirchhoff, en flexion-membrane, cf. [bib2], [bib 3].

La « cellule de base » tridimensionnelle, ou aussi « volume élémentaire représentatif », correspond à un motif de périodicité à pas rectangulaire, constituant la géométrie du solide hétérogène étudié :

- dans les trois directions spatiales, pour une homogénéisation tridimensionnelle. Le maillage de la cellule de base tridimensionnelle est constitué de mailles tridimensionnelles, sur lesquelles seront affectées des éléments finis massifs isoparamétriques P1 ou P2. Comme on se restreint au cas de symétries par rapport aux plans du référentiel spatial, le maillage se limite à l'octant de la cellule de base $(X>0, Y>0, Z>0)$;
- dans deux directions spatiales, et sur la demi- épaisseur de la plaque , selon la troisième direction spatiale (on doit spécifier X ou Y ou Z), pour une homogénéisation de type plaque ou coque. Le maillage de la cellule de base est constitué de mailles tridimensionnelles, sur lesquelles seront affectées des éléments finis massifs isoparamétriques P1 ou P2. La dimension de la cellule de base selon la troisième direction spatiale est utilisée pour définir l'épaisseur de celle-ci. Il est possible cependant dans le cas d'une cellule de base de la plaque ou coque hétérogène, d e traiter une situation de frontière libre selon la troisième direction spatiale qui constitue l'épaisseur n'est pas plane : pour cela on ajoutera un matériau fictif de propriétés physiques négligeables devant celles des autres parties de la cellule de base de sorte de « remplir » ces vides pour obtenir une frontière plane. Comme on se restreint au cas de symétries par rapport aux plans du référentiel spatial, le maillage se limite à l'octant de la cellule de base $(X>0, Y>0, Z>0)$.

Les cas de type périodique à « pas hexagonal » peuvent également être traités en définissant une « sous-cellule » périodique et symétrique à pas carré.

La cellule de base, notée C , est donc bornée par des frontières planes. Elle est constituée de sous-domaines portant chacun un matériau donné et éventuellement une ou plusieurs cavités non maillées : voir Figure 2-a, qui peuvent intersecter les frontières de la cellule de base.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

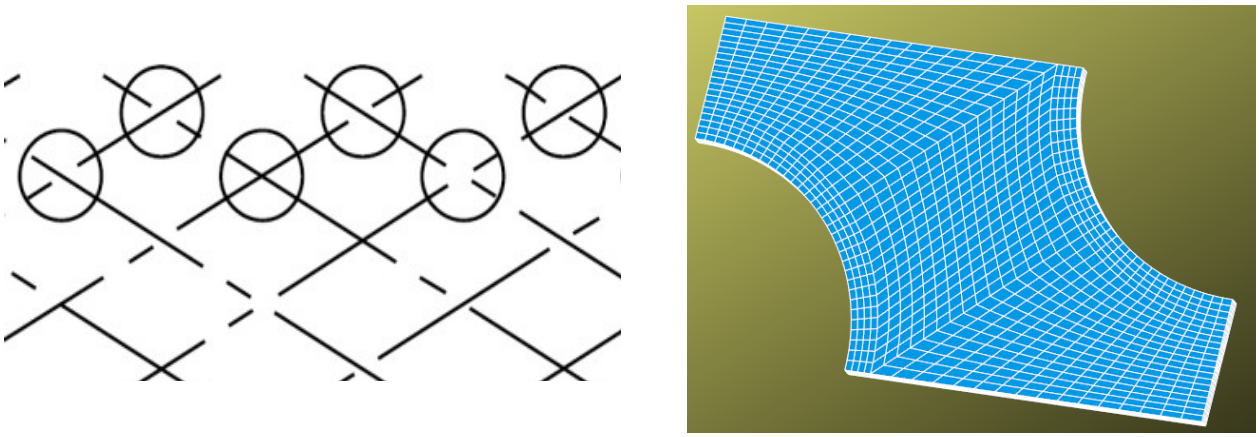


Figure 2-a : Schéma de la structure hétérogène ; positionnement de la cellule de base sur le réseau périodique ; à droite : maillage de cellule de base périodique.

Les différents matériaux constituants la cellule de base sont définis par des caractéristiques de masse volumique, de conduction thermique isotrope, de capacité calorifique et des caractéristiques thermoélastiques linéaires isotropes, qui sont définies comme des fonctions de variables de commande : température, ou irradiation.

Le modèle de comportement homogénéisé produit sera selon le cas :

- thermique linéaire homogénéisée tridimensionnelle,
- thermoélasticité linéaire homogénéisée tridimensionnelle orthotrope,
- thermoélasticité linéaire homogénéisée flexion-membrane de plaque de Love-Kirchhoff, sans couplage flexion-membrane à cause de la symétrie par rapport au feuillet moyen.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Méthodes

3.1 Homogénéisation en thermique linéaire tridimensionnelle

Pour l'homogénéisation en thermique linéaire tridimensionnelle, on calcule trois champs de correcteurs thermiques, associés chacun à trois gradients de température unitaires dans chacune des trois directions spatiales, homogènes dans le volume de la cellule de base C tridimensionnelle.
Comme le maillage de la cellule de base est restreint à l'octant $(X>0, Y>0, Z>0)$, les conditions de symétrie matérielle et géométrique et de périodicité imposent les conditions de Dirichlet suivantes :

Correcteur	conditions de Dirichlet	Paroi considérée	Gradient de température imposé $\boldsymbol{g}$
ζ^1	$T=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_GRAD_TEMP=_F(FLUX_X=-1)
ζ^2	$T=0$	y_{min} et y_{max}	PRE_GRAD_TEMP=_ F(FLUX_Y= -1)
ζ^3	$T=0$	z_{min} et z_{max}	PRE_GRAD_TEMP=_ F(FLUX_Z= -1)

Les trois problèmes élémentaires de conduction thermique sur la cellule de base C , qui fournissent les trois champ s de correcteurs, s'écrivent sous forme variationnelle :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \zeta^i(x,y,z)\in V_{pér}, \text{ tel que :}\\&\int_C K.\zeta^i_{,j}.v_{,j}\,dV=-\int_C K.g^i_j v_{,j}\,dV \qquad \forall v\in V_{pér}\end{aligned} \tag{1}$$

l'espace des champs admissibles périodiques $V_{pér}$ se restreignant ici à ceux vérifiant les conditions de Dirichlet rapportées au tableau ci-dessus.

En notant z le vecteur position dans la cellule de base C , placée au point macroscopique $\boldsymbol{x}_0$, le champ de température microscopique s'écrit alors comme la somme du champ de température macroscopique T^0 développée sur la cellule de base via son gradient $\boldsymbol{g}^0$ et de la contribution des correcteurs :

$$T(\boldsymbol{x}_0, z)=T^0(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{g}^0(\boldsymbol{x}_0)\underline{\otimes}\,z+\sum_k \boldsymbol{g}^0_k(\boldsymbol{x}_0)\underline{\otimes}\,\zeta^k(z) \tag{2}$$

Après avoir calculé les trois champs de correcteurs, on effectue la moyenne spatiale sur la cellule de base C de la capacité calorifique, du coefficient de conduction thermique isotrope. Ces termes correspondent à la « loi des mélanges », auxquels on va retrancher la contribution des correcteurs pour obtenir les composantes du tenseur de conduction homogénéisée. Pour ce faire, on effectue le calcul des énergies de dissipation par conduction thermique W_{ther} associées aux combinaisons linéaires des champs de correcteurs thermiques, qui viennent en déduction des termes de la loi des mélanges :

$$\boldsymbol{g}^0_i\cdot\mathbf{K}^{hom}\cdot\boldsymbol{g}^0_j=\underbrace{\frac{1}{|C|}\int_C \boldsymbol{g}^0_i\cdot\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{g}^0_j\,dV}_{\text{loi des mélanges}}-\underbrace{\frac{1}{|C|}\int_C \vec{\nabla}\,\zeta^i\cdot\mathbf{K}\cdot\vec{\nabla}\,\zeta^j\,dV}_{\text{contribution des correcteurs}} \tag{3}$$

avec :

$$\int_C \vec{\nabla}\,\zeta^i\cdot\mathbf{K}\cdot\vec{\nabla}\,\zeta^j\,dV=W_{ther}(\zeta^i+\zeta^j)-W_{ther}(\zeta^i)-W_{ther}(\zeta^j) \tag{4}$$

Les composantes du tenseur de conduction homogénéisée orthotrope sont exprimés dans les axes du référentiel de la cellule de base :

$$\mathbf{K}^{hom}=\begin{pmatrix}K^{hom}_{11} & 0 & 0\\ 0 & K^{hom}_{22} & 0\\ 0 & 0 & K^{hom}_{33}\end{pmatrix} \tag{5}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarques :

Les composantes extra-diagonales de cette matrice sont nulles suite aux symétries de la cellule de base considérée.

Si la cellule de base C comporte une symétrie géométrique et matérielle supplémentaire, par rapport à un plan faisant un angle $\theta=\pm\pi/3,\pm\pi/4$ avec le plan $X=0$, ou une invariance par rotation $2\pi/3$ autour de l'axe OZ par exemple, alors on aura nécessairement : $K_{11}^{hom}=K_{22}^{hom}$.

3.2 Homogénéisation en thermoélasticité linéaire tridimensionnelle

Pour l'homogénéisation en thermoélasticité linéaire tridimensionnelle, on calcule six champs de correcteurs élastiques, associés chacun aux six composantes du tenseur symétrique d'ordre deux de déformation tridimensionnelle unitaires homogènes $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{0}$ dans le volume de la cellule de base tridimensionnelle, et un champ de correcteurs de dilatation thermique, pour une déformation égale au coefficient de dilatation dans chaque sous-domaine de la cellule de base tridimensionnelle.

Comme le maillage de la cellule de base est restreint à l'octant $(X>0, Y>0, Z>0)$, les conditions de symétrie matérielle et géométrique et de périodicité, cf. [bib1], imposent les conditions de Dirichlet suivantes :

Correcteur	conditions de Dirichlet	Paroi considérée	Déformation imposée
χ_{11} , χ_{22} , χ_{33} , χ_{dil}	$U_x=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI=_F(EPXX=-1) PRE_EPSI=_F(EPYY=-1) PRE_EPSI=_F(EPZZ=-1) PRE_EPSI=_F(EPXX=ALPHA, EPYY=ALPHA,EPZZ=ALPHA,)
	$U_y=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_z=0$	z_{min} et z_{max}	
χ_{12}	$U_y=U_z=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI=_F(EPXY=-1)
	$U_x=U_z=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_z=0$	z_{min} et z_{max}	
χ_{13}	$U_y=U_z=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI=_F(EPXZ= -1)
	$U_y=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_x=U_y=0$	z_{min} et z_{max}	
χ_{23}	$U_x=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI = _F(EPYZ= -1)
	$U_x=U_z=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_x=U_y=0$	z_{min} et z_{max}	

Dans le cas où il y a une cavité – ou plusieurs -- au sein de la cellule de base, on effectue également le calcul d'un autre champ de correcteurs élastiques χ_p^{int} , sous l'action d'une pression unitaire exercée au sein de ces cavités, de sorte d'avoir un accès complet aux contraintes à l'échelle microscopique .

Les six problèmes élémentaires d élasticité sur la cellule de base C , qui fournissent les six champs de correcteurs, s'écrivent sous forme variationnelle :

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \chi^{ij}(x,y,z)\in V_{pér}, \text{ tel que :}\\&\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\chi^{ij}).\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\,dV=-\int_C \boldsymbol{\varepsilon}_{ij.}^{0}\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\,dV \qquad \forall\,\mathbf{v}\in V_{pér}\end{aligned} \tag{6}$$

l'espace des champs admissibles périodiques $V_{pér}$ se restreignant ici à ceux vérifiant les conditions de Dirichlet rapportées au tableau ci-dessus.

Le problème élémentaire d'élasticité sur la cellule de base C , qui fournit le champ de correcteur de dilatation thermique, s'écrit sous forme variationnelle :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } \chi_{dil}(x,y,z)\in V_{pér}\text{, tel que :}\\&\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\chi_{dil}).\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})dV=\int_C \alpha(x,y,z).\mathbf{Id}.\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})dV \qquad \forall\,\mathbf{v}\in V_{pér}\end{aligned} \tag{7}$$

On notera que si le coefficient de dilatation thermique α est uniforme dans toute la cellule de base, alors on aura : $\chi_{dil}=-\alpha.(\chi^{11}+\chi^{22}+\chi^{33})$.

En notant z le vecteur position dans la cellule de base C , placée au point macroscopique x_0 , le champ de déplacement microscopique s'écrit alors comme la somme du champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u}^0$ développée sur la cellule de base via la déformation associée $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et de la contribution des correcteurs , en ne conservant que le terme macroscopique T^0 de la température sur la cellule de base :

$$\mathbf{u}(x_0,z)=\mathbf{u}^0(x_0)+\boldsymbol{\varepsilon}^0(x_0)\underline{\otimes}\,z+\sum_{k,l}\boldsymbol{\varepsilon}^0_{kl}(x_0)\underline{\otimes}\,\chi^{kl}(z)-(T^0(x_0)-T_{réf}).\chi_{dil}(z)+p_{app}.\chi^{\text{int}}_p(z) \tag{8}$$

Et le champ de contraintes microscopiques s'en déduit :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}(x_0,z)=\\&\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}^0(x_0)+\sum_{k,l}\boldsymbol{\varepsilon}^0_{kl}(x_0)\underline{\otimes}\,\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\chi^{kl}(z))-(T^0(x_0)-T_{réf}).\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\chi_{dil}(z))+p_{app.}\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\chi^{\text{int}}_p(z))\end{aligned} \tag{9}$$

Après avoir calculé les six champs de correcteurs, on effectue la moyenne spatiale sur la cellule de base C de la masse volumique, des coefficients de Lamé d'élasticité isotrope, et aussi de la rigidité de dilatation $3\alpha\cdot K$. Ces termes correspondent à la « loi des mélanges », auxquels on va retrancher la contribution des correcteurs pour obtenir les composantes du tenseur d'élasticité homogénéisée. Pour ce faire, on effectue le calcul des énergies de déformation élastique $W_{élas}$ associées aux combinaisons linéaires des champs de correcteurs élastiques, qui viennent en déduction des termes de la loi des mélanges :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0_{ij}\cdot\mathbf{A}^{hom}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0_{kl}=\underbrace{\frac{1}{|C|}\int_C \boldsymbol{\varepsilon}^0_{ij}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0_{kl}\,dV}_{\text{loi des mélanges}}-\underbrace{\frac{1}{|C|}\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\chi^{ij})\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\chi^{kl})\,dV}_{\text{contribution des correcteurs}} \tag{10}$$

avec :

$$\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\chi^{ij})\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\chi^{kl})\,dV=W_{élas}(\chi^{ij}+\chi^{kl})-W_{élas}(\chi^{ij})-W_{élas}(\chi^{kl}) \tag{11}$$

Les composantes du tenseur d'élasticité homogénéisée orthotrope sont dans les axes du référentiel de la cellule de base :

$$\mathbf{A}^{hom}=\begin{pmatrix}A^{hom}_{1111} & A^{hom}_{1122} & A^{hom}_{1133} & 0 & 0 & 0\\ A^{hom}_{1122} & A^{hom}_{2222} & A^{hom}_{2233} & 0 & 0 & 0\\ A^{hom}_{1133} & A^{hom}_{2233} & A^{hom}_{3333} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & A^{hom}_{1212} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^{hom}_{2323} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{hom}_{3131}\end{pmatrix} \tag{12}$$

C e tenseur est inversé pour obtenir les modules d'élasticité et coefficients de Poisson orthotropes.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le matériau sera « isotrope transverse » si la cellule de base C comporte une symétrie géométrique et matérielle supplémentaire, par rapport à un plan faisant un angle $\theta=\pm\pi/3,\pm\pi/4$ avec le plan $X=0$, ou une invariance par rotation $2\pi/3$ autour de l'axe OZ par exemple. Il n'y a alors plus que 5 coefficients d'élasticité indépendants a priori :

$$\mathbf{A}^{hom}=\begin{pmatrix} A^{hom}_{1111} & A^{hom}_{1122} & A^{hom}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A^{hom}_{1122} & A^{hom}_{1111} & A^{hom}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ A^{hom}_{1133} & A^{hom}_{1133} & A^{hom}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(A^{hom}_{1111}-A^{hom}_{1122}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^{hom}_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A^{hom}_{3131} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Afin de s'en assurer, on calcule l'erreur relative sur l' expression du coefficient de rigidité élastique en distorsion A^{hom}_{1212} ci-dessus : c'est l'objet du calcul de `ISOTRANS` qui doit être numériquement nul dans ce cas.

O n rappelle que dans le cas élastique isotrope homogène on a :

$$\mathbf{A}^{hom}=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{14}$$

Les composantes du tenseur des dilatations thermiques homogénéisées orthotropes sont dans les axes du référentiel de la cellule de base :

$$\alpha^{hom}_{kk}=\left(\mathbf{A}^{hom}\right)^{-1}_{kkkk}\cdot\left(\frac{1}{|C|}\int_C \underbrace{3.\alpha\cdot K}_{\text{loi des mélanges}}\,dV-\frac{1}{|C|}\int_C \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\chi}^{dil}\right)\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\chi}^{dil}\right)}_{\text{contribution du correcteur}}\,dV\right) \tag{15}$$

Dans le cas « isotrope transverse » autour de l'axe OZ , on vérifiera : $\alpha^{hom}_{11}=\alpha^{hom}_{22}$.

Ainsi la relation de comportement macroscopique thermoélasti q ue linéaire homogénéisé e s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{0}}\left(\boldsymbol{x}_0\right)=\mathbf{A}^{hom}\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{0}\left(\boldsymbol{x}_0\right)-\left(T^{0}\left(\boldsymbol{x}_0\right)-T_{réf}\right).\boldsymbol{\alpha}^{hom}\right) \tag{16}$$

On rappelle que dans le cas thermoélastique isotrope homogène on a : $\boldsymbol{\alpha}=\alpha\,\mathbf{Id}$.

3.3 Homogénéisation en élasticité linéaire de plaque de Love-Kirchhoff en flexion-membrane

Pour l'homogénéisation en élasticité linéaire de plaque de Love-Kirchhoff en flexion-membrane, on calcule :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- trois champs de correcteurs élastiques, associés chacun aux trois composantes du tenseur symétrique d'ordre deux de déformation de membrane unitaires homogènes dans le volume de la cellule de base tridimensionnelle,
- trois champs de correcteurs élastiques, associés chacun aux trois composantes du tenseur symétrique d'ordre deux de déformation de flexion unitaires homogènes dans le volume de la cellule de base tridimensionnelle, et
- un champ de correcteur de dilatation thermique en membrane, pour une déformation égale au coefficient de dilatation dans chaque sous-domaine de la cellule de base tridimensionnelle.

Comme le maillage de la cellule de base est restreint à l'octant $(X>0, Y>0, Z>0)$, ayant adopté ici comme direction dans l'épaisseur l'axe OZ, les conditions de symétrie matérielle et géométrique et de périodicité imposent les conditions de Dirichlet suivantes :

Correcteur	conditions de Dirichlet	Paroi considérée	Déformation imposée
χ^m_{11}, χ^m_{22}, χ^m_{dil}	$U_x=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI=_F(EPXX=-1) PRE_EPSI=_F(EPYY=-1) PRE_EPSI=_F(EPXX=ALPHA, EPYY=ALPHA,EPZZ=ALPHA,)
	$U_y=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_z=0$	z_{min} et z_{max}	
χ^m_{12}	$U_y=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI=_F(EPXY=-1)
	$U_x=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_z=0$	z_{min} et z_{max}	
χ^f_{11}, χ^f_{22}	$U_x=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI=_F(EPXX= Z) PRE_EPSI=_F(EPYY= Z)
	$U_y=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_z=0$	z_{min} et z_{max}	
χ^f_{12}	$U_y=0$	x_{min} et x_{max}	PRE_EPSI = _F(EPXY= Z)
	$U_x=0$	y_{min} et y_{max}	
	$U_z=0$	z_{min} et z_{max}	

Les trois + trois problèmes élémentaires d'élasticité sur la cellule de base C, qui fournissent les six champ s de correcteurs en flexion-membrane, s'écrivent respectivement sous forme variationnelle :

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \chi^m_{\alpha\beta}(x,y,z)\in V_{pér}, \text{ tel que :}\\
&\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\chi^m_{\alpha\beta}).\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\,dV=-\int_C \boldsymbol{\varepsilon}^0_{\alpha\beta}.\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\,dV \qquad \forall\,\mathbf{v}\in V_{pér}\\
&\text{Trouver } \chi^f_{\alpha\beta}(x,y,z)\in V_{pér}, \text{ tel que :}\\
&\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\chi^f_{\alpha\beta}).\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\,dV=\int_C z.\boldsymbol{\varepsilon}^0_{\alpha\beta}.\mathbf{A}.\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\,dV \qquad \forall\,\mathbf{v}\in V_{pér}
\end{aligned} \tag{17}$$

l'espace des champs admissibles périodiques $V_{pér}$ se restreignant ici à ceux vérifiant les conditions de Dirichlet rapportées au tableau ci-dessus.

Après avoir calculé les six champs de correcteurs, on effectue la moyenne spatiale sur la cellule de base de la masse volumique, des coefficients de Lamé d'élasticité isotrope, et la moyenne spatiale sur la cellule de base du moment d'ordre un selon l'épaisseur des coefficients de Lamé d'élasticité isotrope.

Ensuite on effectue le calcul des énergies de déformation élastique associées aux combinaisons linéaires des champs de correcteurs élastiques de membrane, et de même de flexion, qui viennent en déduction des termes de la loi des mélanges. À cause de la symétrie de la cellule de base par rapport au feuillet moyen, il n'est pas utile d'effectuer les combinaisons linéaires croisées des champs de correcteurs élastiques de membrane et de flexion.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{A}^{memb}_{hom}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0_{\gamma\delta}=\frac{h}{|C|}\int_C \boldsymbol{\varepsilon}^0_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0_{\gamma\delta}dV-\frac{h}{|C|}\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^m_{\alpha\beta})\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^m_{\gamma\delta})\,dV \tag{18}$$

loi des mélanges — contribution des correcteurs

avec :

$$\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^m_{\alpha\beta})\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^m_{\gamma\delta})\,dV=W_{élas}(\boldsymbol{\chi}^m_{\alpha\beta}+\boldsymbol{\chi}^m_{\gamma\delta})-W_{élas}(\boldsymbol{\chi}^m_{\alpha\beta})-W_{élas}(\boldsymbol{\chi}^m_{\gamma\delta}) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^0_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{A}^{flex}_{hom}\cdot\boldsymbol{\kappa}^0_{\gamma\delta}=\frac{h}{|C|}\int_C z^2\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^0_{\gamma\delta}dV-\frac{h}{|C|}\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^f_{\alpha\beta})\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^f_{\gamma\delta})\,dV \tag{20}$$

loi des mélanges — contribution des correcteurs

avec :

$$\int_C \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^m_{\alpha\beta})\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\chi}^m_{\gamma\delta})\,dV=W_{élas}(\boldsymbol{\chi}^f_{\alpha\beta}+\boldsymbol{\chi}^f_{\gamma\delta})-W_{élas}(\boldsymbol{\chi}^f_{\alpha\beta})-W_{élas}(\boldsymbol{\chi}^f_{\gamma\delta}) \tag{21}$$

où on a noté h l'épaisseur totale la cellule de base C dans la direction de l'axe OZ , $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ le tenseur des déformations membranaires et $\boldsymbol{\kappa}^0$ le tenseur de variation de courbure macroscopique de la plaque ou de la coque .

Les composantes du tenseur d'élasticité homogénéisée orthotrope de membrane et de flexion sont dans les axes du référentiel de la cellule de base :

$$\mathbf{A}^{memb}_{hom}=\begin{pmatrix} A^{memb}_{hom\,1111} & A^{memb}_{hom\,1122} & 0\\ A^{memb}_{hom\,1122} & A^{memb}_{hom\,2222} & 0\\ 0 & 0 & A^{memb}_{hom\,1212}\end{pmatrix}\quad ;\quad \mathbf{A}^{flex}_{hom}=\begin{pmatrix} A^{flex}_{hom\,1111} & A^{flex}_{hom\,1122} & 0\\ A^{flex}_{hom\,1122} & A^{flex}_{hom\,2222} & 0\\ 0 & 0 & A^{flex}_{hom\,1212}\end{pmatrix} \tag{22}$$

On rappelle que les unités de ces composantes de raideurs élastiques sont respectivement : contraintes*longueur en membrane et contraintes*longueur au cube en flexion .

O n rappelle que dans le cas élastique isotrope homogène on a :

$$\mathbf{A}^{memb}_{hom}=h\cdot\begin{pmatrix} E/(1-\nu^2) & \nu E/(1-\nu^2) & 0\\ \nu E/(1+\nu) & E/(1-\nu^2) & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}\quad ;$$
$$\mathbf{A}^{flex}_{hom}=\frac{h^3}{12}\cdot\begin{pmatrix} E/(1-\nu^2) & \nu E/(1-\nu^2) & 0\\ \nu E/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix} \tag{23}$$

4 Résultats

La commande produit l'ensemble des champs de correcteurs, solutions des problèmes de thermique linéaire puis d'élasticité linéaire effectués sur la cellule de base.

Les coefficients homogénéisés en thermique linéaire et en thermoélasticité linéaire sont donnés selon les axes du référentiel cartésien du maillage de la cellule de base.

Les correspondances de directions sont les suivantes :

x	y	z	xy	xz	yz

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

*_L	*_T	*_N	*_LT	*_LN	*_TN
*1	*2	*3	*12	*13	*23

4.1 Homogénéisation en thermique linéaire tridimensionnelle

Pour l'homogénéisation en thermique linéaire tridimensionnelle on calcule avec les trois champs de correcteurs les caractéristiques thermiques linéaires homogénéisées :

- de conduction thermique orthotrope : " LAMBDA_L ", " LAMBDA_T ", " LAMBDA_N ",
- de capacité calorifique volumique équivalente : " RHO_CP ".

4.2 Homogénéisation en thermoélasticité linéaire tridimensionnelle

Pour l'homogénéisation en thermoélasticité linéaire tridimensionnelle on calcule avec les six + u n champs de correcteurs les caractéristiques thermoélastiques linéaires homogénéisées :

- d'élasticité orthotrope (9 coefficients indépendants qui définissent les souplesses élastiques) : " E_L ", " E_T ", " E_N ", " NU_LT ", " NU_LN ", " NU_TN ", " G_LT ", " G_LN ", " G_TN ",
- d'élasticité orthotrope (9 coefficients indépendants du tenseur des raideurs élastiques) : " A1111 ", " A2222 ", " A3333 ", " A1122 ", " A1133 ", " A2233 ", " A1212 ", " A2323 ", " A3131 ",
- de dilatation thermique orthotrope : " ALPHA_L ", " ALPHA_T ", " ALPHA_N "
- de masse volumique équivalente : " RHO ".

On calcule enfin un scalaire ISOTRANS qui permet de s'assurer, s'il est nul, du cas où on obtient une isotropie transverse (par exemple en cas de symétrie hexagonale de la cellule de base) où l'on n'a plus que 5 coefficients élastiques indépendants.

4.3 Homogénéisation en élasticité linéaire de plaque de Love-Kirchhoff en flexion-membrane

Pour l'homogénéisation en élasticité linéaire de plaque de Love-Kirchhoff en flexion-membrane, on calcule avec les trois + trois + un champs de correcteurs les caractéristiques thermoélastiques linéaires homogénéisées en flexion-membrane :

- d'élasticité orthotrope en membrane (4 coefficients indépendants qui définissent les raideurs élastiques) : " MEMB_L ", " MEMB_T ", " MEMB_LT ", " MEMB_G_LT ",
- d'élasticité orthotrope en flexion (4 coefficients indépendants qui définissent les raideurs élastiques) : " FLEX_L ", " FLEX_T ", " FLEX_LT ", " FLEX_G_LT ",
- d'élasticité orthotrope en cisaillement transverse (2 coefficients indépendants qui définissent les raideurs élastiques) : " CISA_L ", " CISA_T ",
- de dilatation thermique orthotrope en membrane : " ALPHA_L ", " ALPHA_T ",
- de masse volumique équivalente : " RHO ".

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Exemples

On pourra consulter les cas-tests :

nom	intitulé	documentation
HPLV105	Paramètres homogénéisés de plaques à tubes de GV	[V7.03.105]
HPLV106	Paramètres homogénéisés d'un composite fibre de verre/résine	[V7.03.106]
HPLV107	Paramètres homogénéisés de plaques à tubes N4 sur cellule entière	[V7.03.107]
HPLV108	Paramètres homogénéisés d'une plaque percée avec matériaux unitaires et comparaison	[V7.03.108]

On pourra aussi effectuer une vérification triviale avec le cas-test HPLV101a intitulé « *Homogénéisation d'un matériau homogène* » [V7.03.101], en thermique stationnaire isotrope et en élasticité isotrope .

5.1 Plaque élastique stratifiée

On considère un m atériau stratifié en 3 couches d'épaisseurs différentes de matériaux isotropes. On note en particulier les épaisseurs des couches successives : $e_K = z_K - z_{K-1}$, cf. Figure 5.1-a. Les couches sont supposées symétriques par rapport au feuillet moyen, de sorte d'annuler le coulage flexion-membrane.

Dans ce cas, la cellule de base a une périodicité quelconque sur les directions du plan tangent (X, Y). Par conséquent, les champs de correcteurs en membrane χ^m_{11} , χ^m_{22} dépendent de manière affine par morceaux de la position Z dans l'épaisseur de la plaque, tandis que le correcteur en membrane χ^m_{12} associé à la distorsion est nul partout. Et les champs de correcteurs en flexion χ^f_{11} , χ^f_{22} sont paraboliques par morceaux en Z dans l'épaisseur de la plaque, tandis que le correcteur en flexion χ^f_{12} est nul partout.

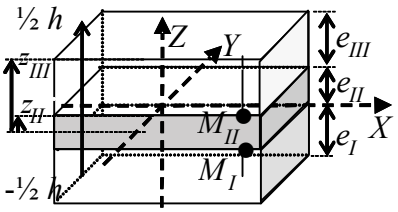


Figure 5.1-a : Schéma d'une plaque stratifiée à trois couches symétriques.

La résolution analytique des problèmes élémentaires en membrane puis en flexion fournit les expressions analytiques des caractéristiques élastiques linéaires homogénéisées suivant :

$$A^{memb}_{hom\,1111} = A^{memb}_{hom\,2222} = \sum_K e_K \cdot \frac{E_K}{1-\nu_K^2} \qquad A^{flex}_{hom\,1111} = A^{flex}_{hom\,2222} = \frac{1}{3}\sum_K \left(z_K^3 - z_{K-1}^3\right) \cdot \frac{E_K}{1-\nu_K^2}$$

$$A^{memb}_{hom\,1122} = \sum_K e_K \cdot \frac{\nu_K E_K}{1-\nu_K^2} \quad ; \quad A^{flex}_{hom\,1122} = \frac{1}{3}\sum_K \left(z_K^3 - z_{K-1}^3\right) \cdot \frac{\nu_K E_K}{1-\nu_K^2} \qquad (24)$$

$$A^{memb}_{hom\,1212} = \sum_K e_K \cdot \frac{E_K}{2(1+\nu_K)} \qquad A^{flex}_{hom\,1212} = \frac{1}{3}\sum_K \left(z_K^3 - z_{K-1}^3\right) \cdot \frac{E_K}{2(1+\nu_K)}$$

On peut également effectuer cette analyse en c isaillement transverse .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie

1) VOLDOIRE F., BAMBERGER Y. – *Mécanique des structures. Initiation, approfondissements, applications.* Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2008.

2) VOLDOIRE F. *Homogénéisation des structures hétérogènes* . Collection de notes internes de la Direction des Études et Recherches, 66 pages, 1994. http://books.google.fr/books?id=3VTxPgAACAAJ&dq=voldoire&hl=fr&sa=X&ei=xhEJUeHKKsOQhQeI3YGYCA&ved=0CDsQ6AEwAg

3) ANDRIEUX S., MARIGO J.J . – *Application des méthodes asymptotiques au problème de la conduction thermique dans les plaques minces.* Note interne EDF-DER, HI-71/5963, 1987.

4) CAILLERIE D . – Étude *de quelques problèmes de perturbation en théorie de l'élasticité et de conduction thermique .* Thèse d'État , Paris, 1982.

5) FRANCFORT G . – *Homogenization and linear thermoelasticity.* SIAM J. Math. Anal., Vol.14, n°3, pp. 696-708, 1983.

6) SUQUET P . – *Plasticité et homogénéisation.* Thèse d'État , Paris, 1982.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)