Intégration de la relation de comportement viscoélastique de Maxwell (VISC_MAXWELL et VISC_MAXWELL_MT)

Résumé

Ce document décrit le développement de la loi de comportement viscoélastiques de Maxwell. La loi de Maxwell (mot clé VISC_MAXWELL) est une loi viscoélastique basique. Sa variante (mot clé VISC_MAXWELL_MT) inclue une variation de ses paramètres avec la porosité selon une loi d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Cette dernière loi n'est donc disponible que pour les modèles poromécaniques (THM).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Introduction....3
2Relation continue....4
3Évolution des paramètres pour la loi VISC_MAXWELL_MT....5
4Intégration de la relation de comportement....6
5Bibliographie....7

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

On décrit ici l'implémentation du modèle de viscoélasticité de Maxwell (mot-clé VISC_MAXWELL). Une variante de ce modèle a été ajoutée pour la poromécanique (mot-clé VISC_MAXWELL_MT) qui prévoit l'évolution des paramètres avec la porosité selon un modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Cette loi a d'abord été développée et utilisée dans le cadre de la thèse de G. Mélot [1] sur les matériaux bitumineux.

Pour chacun de ces modèles, on suppose que le matériau est isotrope. Ils peuvent être utilisés en 3D, en déformations planes (D_PLAN) et en axisymétrique (AXIS).

On présente dans cette note les équations constitutives des modèles et leur implantation.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Relation continue

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et d'un milieu isotrope. Le modèle de Maxwell est représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort Hookéen en série. Ce modèle prend en compte une viscosité volumique et une viscosité déviatorique. Les équations sont alors simplement :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_v(t)&=\frac{1}{\eta_v}\sigma_m(t)+\frac{1}{K}\dot{\sigma}_m(t)\\ \dot{e}_{ij}(t)&=\frac{1}{\eta_d}s_{ij}(t)+\frac{1}{2G}\dot{s}_{ij}(t)\end{aligned} \quad (1)$$

avec :

ε_v : la déformation volumique

σ_m : la contrainte effective moyenne $\sigma=\frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma})I$

e_{ij} : les coefficients du tenseur des contraintes déviatoriques $e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\varepsilon_v\delta_{ij}$

s_{ij} : les coefficients du tenseur des contraintes effectives déviatoriques $s_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_m\delta_{ij}$

K : le module d'élasticité isostatique

G : le module de cisaillement

η_v : la viscosité volumique

η_d : la viscosité déviatorique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Évolution des paramètres pour la loi VISC_MAXWELL_MT

Le comportement d'un milieu poreux est fortement impacté par la proportion de vide qu'il contient. Pour certains matériaux (par exemple de type enrobé bitumineux) dont la porosité va être amenée à beaucoup évoluer, il est important d'inclure cette variation dans la viscosité. Les lois d'homogénéisation permettent, entre autres choses, de calculer les propriétés mécaniques d'un matériau poreux à partir des propriétés mécaniques du squelette et de la porosité. La méthode de Mori-Tanaka est appropriée pour rendre compte de l'interaction entre les pores en modifiant les conditions limites de déformation à l'infini dans le cadre du problème d'Eshelby. Dans la thèse de G. Melot [1], cette technique est appliquée, dans le cas de pores sphériques pris dans une matrice solide isotrope, à la partie élastique puis à la partie visqueuse. Le résultat est classique en élasticité et donne :

$$K^{mt}=K^{s}\frac{4\,G^{s}(1-\phi)}{3\,\phi\,K^{s}+4\,G^{s}}$$

$$G^{mt}=G^{s}\frac{(1-\phi)(9\,K^{s}+8\,G^{s})}{9\,K^{s}(1+\frac{2}{3}\phi)+8\,G^{s}(1+\frac{3}{2}\phi)}$$

Avec K^{mt} et G^{mt} les paramètres effectifs du milieux poreux respectivement d'élasticité et de cisaillement, qui seront utilisés dans la loi de comportement.
La démonstration mathématique classiquement faite en élasticité est ensuite réalisée pour la dérivée du tenseur des déformations en lieu et place du tenseur de déformation.
Cela permet d'obtenir de manière similaire les équations suivantes :

$$\eta_{v}^{mt}=\eta_{v}^{s}\frac{4\,\eta_{d}^{s}(1-\phi)}{3\,\phi\,\eta_{v}^{s}+4\,\eta_{d}^{s}}$$

$$\eta_{d}^{mt}=\eta_{d}^{s}\frac{(1-\phi)(9\,\eta_{v}^{s}+8\,\eta_{d}^{s})}{9\,\eta_{v}^{s}(1+\frac{2}{3}\phi)+8\,\eta_{d}^{s}(1+\frac{3}{2}\phi)}$$

Avec η_{v}^{mt} et η_{d}^{mt} les paramètres effectifs de viscosité du milieux poreux.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Intégration de la relation de comportement

On utilise une discrétisation temporelle en différences finies, pour obtenir les expressions des composantes de la matrice des contraintes effectives. Les étapes de calculs permettant d'arriver aux résultats sont reprises ci-dessous.
On utilise les notations suivantes :

$$\dot{\sigma_m} = \frac{\sigma_{m_{n+1}} - \sigma_{mn}}{dt}$$

Où σ_{mn} et σ_{mn+1} sont respectivement les contraintes moyennes effectives au temps précédent et au temps courant et dt le pas de temps.
En utilisant la discrétisation temporelle de $\dot{\sigma_m}$ et $\dot{s_{ij}}$, on cherche les expressions de $\sigma_{m_{n+1}}$ et de $s_{ij_{n+1}}$:

$$\dot{\varepsilon}_{v_{n+1}} = \frac{1}{\eta_v}\sigma_{m_{n+1}} + \frac{1}{K}\frac{\sigma_{m_{n+1}} - \sigma_{mn}}{dt} = \left(\frac{1}{\eta_v} + \frac{1}{K\,dt}\right)\sigma_{m_{n+1}} - \frac{\sigma_{mn}}{K\,dt}$$

$$\dot{e}_{ij_{n+1}} = \frac{1}{\eta_d}s'_{ij_{n+1}} + \frac{1}{2G}\frac{s_{ij_{n+1}} - s_{ijn}}{dt} = \left(\frac{1}{\eta_d} + \frac{1}{2G\,dt}\right)s_{ij_{n+1}} - \frac{s_{ijn}}{2G\,dt}$$

Ce qui équivaut à :

$$\sigma_{m_{n+1}} = \left(\dot{\varepsilon}_{v_{n+1}} + \frac{\sigma_{mn}}{K\,dt}\right)\frac{K\,dt\,\eta_v}{\eta_v + K\,dt}$$

$$s_{ij_{n+1}} = \left(\dot{e}_{ij_{n+1}} + \frac{s_{ijn}}{2G\,dt}\right)\frac{2G\,dt\,\eta_d}{\eta_d + 2G\,dt}$$

Qui finalement équivaut à :

$$\sigma_{m_{n+1}} = \left(dt\,\dot{\varepsilon}_{v_{n+1}} + \frac{\sigma_{mn}}{K}\right)\frac{K}{1 + \frac{Kdt}{\eta_v}}$$

$$s_{ij_{n+1}} = \left(dt\,\dot{e}_{ij_{n+1}} + \frac{s_{ijn}}{2G}\right)\frac{2G}{1 + \frac{2Gdt}{\eta_d}}$$

que l'on peut écrire sous la forme incrémentale :

$$\sigma'_{m_{n+1}} = \left(\Delta\varepsilon_v(t) + \frac{\sigma'_{mn}}{K}\right)\frac{K}{1 + \frac{Kdt}{\eta_v}}$$

$$s'_{ij_{n+1}} = \left(\Delta e_{ij}(t) + \frac{s'_{ijn}}{2G}\right)\frac{2G}{1 + \frac{2Gdt}{\eta_d}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Bibliographie

1) G. Mélot, « Modélisation poromécanique du gonflement d'enrobés bitumineux par reprise d'eau », Thèse de l'université Paris-Est (2019)

2) T. Mori et K. Tanaka, « Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions » Acta metallurgica, vol. 21, n15, pp. 571-574, 1973.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)