Lois de comportement plastique et viscoplastique à écrouissage isotrope non linéaire VMIS_ISOT_NL et VISC_ISOT_NL

Résumé :

Ce document décrit le modèle de comportement élasto-visco-plastique à écrouissage isotrope non linéaire, disponible en version locale et à gradient de variables internes (GRAD_VARI ou GRAD_INCO). Une modélisation des grandes déformations est accessible via la cinématique GDEF_LOG . La fonction d'écrouissage cumule plusieurs termes (un terme affine, deux termes exponentiels, un terme en puissance, un plateau de Lüders) à même de couvrir la plupart des réponses non linéaires d'un matériau métallique ; chacun peut facilement être annulé, ce qui offre une forme de modularité à la relation de comportement (par exemple : écrouissage linéaire ou écrouissage en loi puissance uniquement). Enfin, le comportement peut être indépendant du temps (VMIS_ISOT_NL) ou viscoplastique (VISC_ISOT_NL). Dans ce dernier cas, la plasticité évolue selon un modèle de Norton dans lequel intervient la fonction seuil.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Domaine d'application

1.1 Finalité

La loi de comportement VMIS_ISOT_TRAC permet de rendre compte de toute forme d'écrouissage isotrope non linéaire via la donnée de la réponse contrainte – déformation dans un essai de traction simple, sous la forme d'une fonction échantillonnée. Toutefois, l'identification de cette réponse peut s'avérer plus simple en se donnant une fonction préétablie qui dépend d'un petit nombre de paramètres. L'utilisateur est alors également dispensé de la phase d'échantillonnage, parfois délicate lorsque la fonction est à variations rapides. Les performances de l'intégration de la loi de comportement y gagnent également, notamment lorsque l'échantillonnage requis aurait été particulièrement fin.

C'est tout l'objet de la loi de comportement VMIS_ISOT_NL (plasticité) ou VISC_ISOT_NL (viscoplasticité), dédiée aux matériaux métalliques. La fonction d'écrouissage $R(\kappa)$ consiste en l'assemblage de plusieurs termes élémentaires :

$$R(\kappa)=\begin{cases}\hat{R}(\varepsilon_L^p) & \text{si } \kappa\leq\varepsilon_L^p\\ \hat{R}(\kappa) & \text{si } \kappa\geq\varepsilon_L^p\end{cases} \quad (1)$$

où κ désigne la variable d'écrouissage (qui coïncide généralement avec la déformation plastique cumulée), ε_L^p fixe la limite du plateau de Lüders (nulle en l'absence de plateau) et :

$$\hat{R}(\kappa)=R_0+R_H\kappa+R_1(1-e^{-\gamma_1\kappa})+R_2(1-e^{-\gamma_2\kappa})+R_K(p_0+\kappa)^{\gamma_K} \quad (2)$$

L'annulation du terme affine, de chaque terme exponentiel ou de terme en puissance s'effectue en fixant respectivement $R_H=0$, $R_1=0$ ou $R_2=0$ et enfin $R_K=0$, ce qui permet d'accéder à une fonction d'écrouissage plus simple le cas échéant.

Ce modèle de comportement est compatible :

- avec une cinématique de petites perturbations (HPP) ou de grandes déformations (GDEF_LOG) ;
- avec une réponse plastique indépendante de la vitesse de chargement (VMIS_ISOT_NL) ou viscoplastique (VISC_ISOT_NL) sur la base d'une loi de Norton ;
- avec une formulation locale ou à gradient de variable interne dans laquelle intervient le gradient de la variable d'écrouissage, cf. [Lorentz & Andrieux, 1999] et [Zhang et al., 2018].

Enfin, précisons que la partie élastique du modèle est exprimée de manière explicite, c'est-à-dire que la contrainte s'exprime comme une fonction de la déformation et de la déformation plastique à l'état courant. Il n'y a donc pas d'évolution incrémentale de la contrainte ; elle ne contribue pas à définir l'état mécanique du système, c'en est une conséquence (en particulier, la contrainte n'entre pas dans la définition d'un état initial du système).

Remarque: la conséquence pratique de ce formalisme est qu'une contrainte initiale donnée dans ETAT_INIT pour STAT_NON_LINE sera ignorée.

1.2 Paramètres matériaux

L'expression modulaire de la relation de comportement permet de regrouper les différents paramètres du modèle par catégories:

- la partie élastique est isotrope et dépend du module de Young E et du coefficient de Poisson ν définis sous le mot-clé facteur ELAS (E, NU) de la commande DEFI_MATERIAU ;
- les paramètres de l'écrouissage isotrope (1) sont définis sous le mot-clé facteur ECRO_NL (R0 , RH, R1, GAMMA_1, R2, GAMMA_2, RK, P0, GAMMA_K, EPSP_LUDERS) ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- les paramètres de la loi de viscosité de Norton, lorsqu'elle est présente, sont définis sous le mot-clé facteur NORTON (coefficient K et exposant N) ;
- en formulation non locale [R5.04.01], il faut également définir les paramètres correspondants sous le mot-clé facteur NON_LOCAL (C_GRAD_VARI et COEF_PENA_LAGR)

Les paramètres peuvent dépendre de la température (mots-clés facteur *_FO). La loi de comportement est exprimée en déformations mécaniques, c'est-à-dire qu'elle est compatible avec les termes de retrait usuels, notamment la déformation thermique.

1.3 Variables internes

La loi de comportement s'appuie sur huit variables internes : d'une part, le niveau d'écrouissage κ et les six composantes de la déformation plastique (qu'il n'est donc pas utile de calculer en post-traitement) ; et d'autre part, à des fins de post-traitements uniquement, on conserve également l'état du pas de temps courant, avec comme valeurs 0=élastique, 1=plastique à écoulement régulier, 2=plastique à écoulement singulier (on verra plus loin de quoi il s'agit).

Les variables internes sont regroupées dans le tableau suivant :

EPSEQ	V1	Variable d'écrouissage κ
INDIPLAS	V2	État du pas de temps courant (0, 1 ou 2)
EPSPXX - EPSPYZ	V3 - V8	Composantes de la déformation plastique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Modèle continu

2.1 Équations de comportement : modèle plastique local

Il s'agit d'un modèle de plasticité à seuil de von Mises et écrouissage isotrope classique. La déformation (mécanique) $\boldsymbol{\varepsilon}$ se décompose de manière additive en une partie plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et une partie élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, cette dernière étant liée à la contrainte par la relation élastique suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}=K\,tr(\boldsymbol{\varepsilon}^e)\boldsymbol{Id}+2\mu\,dev(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \quad ; \quad 3K=\frac{E}{1-2\nu} \quad 2\mu=\frac{E}{1+\nu} \tag{3}$$

où $tr()$ et $dev()$ désignent respectivement la trace et le déviateur d'un tenseur d'ordre deux.

On introduit maintenant la fonction seuil, où la fonction d'écrouissage $R(\kappa)$ a déjà été introduite en (1):

$$F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=\sigma_{eq}-R(\kappa) \quad ; \quad \sigma_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}dev(\boldsymbol{\sigma}):dev(\boldsymbol{\sigma})} \tag{4}$$

On reste dans le cadre de la plasticité à écrouissage positif si bien qu'on impose que la fonction d'écrouissage $R(\kappa)$ soit croissante.

L'évolution de la déformation plastique est gouvernée par l'équation d'écoulement. Lorsque la fonction seuil est dérivable par rapport à $\boldsymbol{\sigma}$, la direction d'écoulement est normale à la surface seuil :

$$si \quad \sigma_{eq}\neq 0 \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=\dot{\kappa}\boldsymbol{N} \quad ; \quad \boldsymbol{N}=\frac{3}{2}dev\frac{(\boldsymbol{\sigma})}{\sigma_{eq}} \tag{5}$$

Dans le cas singulier où $\sigma_{eq}=0$, la notion de dérivée est généralisée via des notions d'analyse convexe (sous-gradient). La direction d'écoulement n'est assujettie qu'à la condition suivante :

$$si \quad \sigma_{eq}=0 \quad \sqrt{\frac{2}{3}}\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\|\leq\dot{\kappa} \quad ; \quad tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)=0 \tag{6}$$

Enfin, l'évolution de la variable d'écrouissage est fixée par la condition de cohérence :

$$\dot{\kappa}\geq 0 \quad ; \quad F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)\leq 0 \quad ; \quad \dot{\kappa}F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=0 \tag{7}$$

2.2 Prise en compte de la viscosité

En présence de viscosité, l'écoulement plastique est différé. Plus exactement, la vitesse d'évolution de l'écrouissage n'est plus fixée par la condition de cohérence (7) mais elle est dorénavant fonction de l'intensité de la fonction seuil suivant la loi de Norton :

$$\dot{\kappa}=\left(\frac{\langle F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)\rangle}{K}\right)^n \tag{8}$$

où les crochets de McAuley $\langle . \rangle$ désignent la partie positive. Les équations (1) à (6) restent inchangées. Lorsque $K\rightarrow 0$, on retrouve le modèle élastoplastique.

2.3 Prise en compte du gradient d'écrouissage

Une formulation non locale à gradient de variable interne est adaptée lorsque le gradient d'écrouissage $\nabla\kappa$ devient important. Elle consiste à introduire un terme supplémentaire Φ^{grad} dans l'énergie libre qui reflète les interactions entre points matériels voisins, voir [R5.04.01] :

$$\Phi^{grad}(\nabla\kappa)=\frac{1}{2}c(\nabla\kappa)^2 \tag{9}$$

En utilisant la formulation relaxée augmentée présentée dans [R5.04.01], l'impact sur la relation de comportement se traduit par une modification de la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage donc, en pratique, par une modification de la fonction d'écrouissage :

$$\widetilde{R}(\kappa)=R(\kappa)+r\kappa-\varphi \quad ; \quad \varphi=\lambda+ra \tag{10}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la relaxation, $r>0$ le coefficient d'augmentation et a l'interprétation de la variable d'écrouissage à l'échelle de la structure. Ces trois quantités sont des données pour ce qui concerne la relation de comportement. Au final, la fonction d'écrouissage est corrigée d'un terme affine, ce qui ne rajoute donc pas de complexité par rapport au traitement numérique du modèle. En revanche, le signe et l'amplitude de φ n'étant pas fixés, cela explique qu'il faille prendre en compte le cas d'un écoulement singulier pour lequel $\sigma_{eq}=0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Intégration numérique

Pour ce qui concerne l'intégration de la loi de comportement, c'est-à-dire le calcul des variables internes et des contraintes à histoire de déformation (mécanique) donnée, il n'y a plus lieu de distinguer s'il s'agit d'une formulation locale ou à gradient. En effet, l'impact de cette dernière se limite à modifier la fonction d'écrouissage selon (10). On continuera ici à la noter $R(\kappa)$ sans distinction.

En revanche, on distinguera les cas plastique et viscoplastique, même si on peut montrer que ce dernier se limite également à une correction de la fonction seuil dans les équations discrétisées.

Enfin, en présence d'un plateau de Lüders, on a choisi de simplifier la résolution en se ramenant à la situation sans plateau de Lüders. En effet, du fait de l'unicité de la solution du problème discrétisé, celle-ci se situe soit sur le plateau, soit au-delà. On commence par la chercher sur le plateau : on est alors ramené au cas de la plasticité parfaite (un cas particulier de fonction $\hat{R}$). Si la solution obtenue de cette manière s'avère au-delà du plateau, on ne la prend pas en compte (ce n'est pas la solution du problème) et on répète la résolution mais cette fois en cherchant la solution sur la partie $\hat{R}(\kappa)$ de la fonction d'écrouissage, c'est-à-dire sans se préoccuper du plateau de Lüders (par unicité, on est alors certain que cette nouvelle solution est effectivement au-delà du plateau). C'est pourquoi on se contente de décrire ci-dessous la méthode de résolution en l'absence de plateau de Lüders.

3.1 Équations discrétisées

La discrétisation en temps des équations de comportement s'appuie sur un schéma d'Euler implicite (même en viscoplasticité), c'est-à-dire que les différentes variables du problème sont exprimées à l'instant final du pas de temps considéré. On note Q_n la valeur d'une quantité Q au début du pas de temps, ΔQ son incrément pendant le pas de temps et (simplement) Q sa valeur en fin de pas de temps. L'état mécanique au début du pas de temps $(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon^p}_n, \kappa_n)$ est supposé connu ainsi que l'incrément de déformation $\boldsymbol{\Delta\varepsilon}$ (et donc également la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$). Il s'agit alors de calculer les incréments de variables internes $\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p}_n$ et $\Delta\kappa$, ainsi que la contrainte à la fin du pas de temps $\boldsymbol{\sigma}$.

La discrétisation de la relation contrainte – déformation (3) s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} = K\,tr(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon^p}_n - \boldsymbol{\Delta\varepsilon^p})\,\boldsymbol{Id} + 2\mu\,dev(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon^p}_n - \boldsymbol{\Delta\varepsilon^p}) \tag{11}$$

Quel que soit le régime d'écoulement, régulier (5) ou singulier (6), on constate que la trace de l'incrément de déformation plastique est nul, si bien qu'il en va de même pour la déformation plastique à tout instant (déformation plastique isochore). La relation (11) se simplifie et on peut y faire apparaître une contrainte élastique (ou contrainte d'essai élastique), notée $\boldsymbol{\sigma^e}$ et qui est connue :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma^e} - 2\mu\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma^e} = K\,tr(\boldsymbol{\varepsilon})\,\boldsymbol{Id} + 2\mu\,dev(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon^p}_n) \tag{12}$$

Dans le cas d'un écoulement régulier, la discrétisation temporelle de (5) s'écrit :

$$\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p} = \frac{3}{2}\frac{\Delta\kappa}{\sigma_{eq}}\,dev(\boldsymbol{\sigma^e} - 2\mu\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p}) \tag{13}$$

Après quelques manipulations algébriques, on en déduit :

$$\sigma_{eq} = \sigma^e_{eq} - 3\mu\Delta\kappa \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p} = \frac{3}{2}\Delta\kappa\,\frac{dev(\boldsymbol{\sigma^e})}{\sigma^e_{eq}} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma^e})\,\boldsymbol{Id} + (\sigma^e_{eq} - 3\mu\Delta\kappa)\frac{dev(\boldsymbol{\sigma^e})}{\sigma^e_{eq}} \tag{16}$$

Le régime régulier n'est valide que si $\sigma_{eq} > 0$, soit d'après (14) :

$$3\mu\,\Delta\kappa < \sigma^e_{eq} \tag{17}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas d'un écoulement singulier, $\sigma_{eq}=0$. Compte tenu de la définition de la contrainte équivalente de von Mises, c'est équivalent à $dev(\boldsymbol{\sigma})=0$. En particulier, la contrainte s'écrit simplement :

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma^e})\boldsymbol{Id} \quad ; \quad \sigma_{eq}=0 \tag{18}$$

Par ailleurs, en injectant $dev(\boldsymbol{\sigma})=0$ dans (12), on en déduit l'incrément de déformation plastique :

$$2\mu\,\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p}=dev(\boldsymbol{\sigma^e}) \tag{19}$$

Et l'écoulement est assujetti à (6), c'est-à-dire après discrétisation :

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p}\|\leq\Delta\kappa \tag{20}$$

En reportant (19) dans (20), il vient :

$$\sigma^e_{eq}\leq 3\mu\,\Delta\kappa \tag{21}$$

On peut noter que les conditions (17) et (21) permettent de discriminer le cas régulier du cas singulier. On introduit en particulier la valeur de séparation entre les deux régimes :

$$\kappa^s=\kappa_n+\frac{\sigma^e_{eq}}{3\mu} \tag{22}$$

3.2 Résolution du problème discrétisé – Cas plastique sans viscosité

À ce stade, il ne reste plus qu'à déterminer l'incrément $\Delta\kappa$ via la condition de cohérence (7) qui s'écrit après discrétisation :

$$\Delta\kappa\geq 0 \quad ; \quad F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)\leq 0 \quad ; \quad \Delta\kappa\,F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=0 \tag{23}$$

Pour cela, on commence par envisager l'hypothèse d'une solution élastique, c'est-à-dire $\Delta\kappa=0$ et $\boldsymbol{\Delta\varepsilon^p}$. Dans ce cas, $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma^e}$ et cette solution est valide d'après (23) tant que $F^e=F(\boldsymbol{\sigma^e},\kappa_n)\leq 0$.

Supposons maintenant que $F^e>0$. Il s'agit de trouver $\Delta\kappa>0$ tel que $F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=0$. Dans l'hypothèse d'un écoulement régulier ($\kappa_n<\kappa<\kappa^s$), on peut injecter (14) dans l'expression de la fonction seuil qui vaut alors :

$$F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=\sigma^e_{eq}-3\mu\,\Delta\kappa-R(\kappa)=\hat{M}(\kappa) \tag{24}$$

Comme la fonction d'écrouissage R est croissante, la fonction $\hat{M}$ est strictement décroissante. Par ailleurs, $\hat{M}(\kappa_n)=F^e>0$. Il existe une (unique) solution en régime d'écoulement régulier si et seulement si $\hat{M}(\kappa^s)<0$. Une méthode de Newton à bornes contrôlées permet alors de la déterminer.

Dans le cas d'un écoulement singulier ($\kappa^s\leq\kappa$), $\sigma_{eq}=0$ et la condition de cohérence s'écrit simplement :

$$F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=-R(\kappa)=0 \tag{25}$$

On peut remarquer que $-R$ est une fonction (strictement) décroissante. En outre, Lorsque $\kappa\rightarrow+\infty$, $-R$ est négative. En effet, dans le cas local, $R(+\infty)\geq R(0)>0$. Et dans le cas non local, $r>0$ si bien que la fonction R tend vers l'infini. Il existe donc une (unique) solution en régime d'écoulement singulier si et seulement si $-R(\kappa^s)=\hat{M}(\kappa^s)\geq 0$. Là encore, une méthode de Newton permet de déterminer cette solution.

Finalement, il existe une solution unique au problème d'intégration de la loi de comportement. Le régime dépend des valeurs $\hat{M}^e=\hat{M}(\kappa_n)$ et $\hat{M}^s=\hat{M}(\kappa^s)$, où $\hat{M}^e\geq\hat{M}^s$:

- si $0\geq\hat{M}^e\geq\hat{M}^s$: solution élastique ;
- si $\hat{M}^e\geq 0\geq\hat{M}^s$: solution plastique à écoulement régulier ;
- si $\hat{M}^e\geq\hat{M}^s\geq 0$: solution plastique à écoulement singulier.

3.3 Résolution du problème discrétisé : cas viscoplastique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En présence de viscosité, la condition de cohérence (7) est remplacée par la loi d'évolution de Norton (8). Une fois discrétisée, cette dernière s'écrit :

$$\frac{\Delta\kappa}{\Delta t}=\left(\frac{\langle F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)\rangle}{K}\right)^n \tag{26}$$

Et en inversant cette relation :

$$C_{\Delta t}\Delta\kappa^q=\langle F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)\rangle \quad ; \quad C_{\Delta t}=\frac{K}{\Delta t^{1/n}} \quad ; \quad q=\frac{1}{n} \tag{27}$$

Elle peut encore s'exprimer de manière équivalente sous la forme d'une relation de Kuhn et Tucker :

$$\Delta\kappa\geq 0 \quad ; \quad F_v(\boldsymbol{\sigma},\kappa)\leq 0 \quad ; \quad F_v(\boldsymbol{\sigma},\kappa)\Delta\kappa=0 \tag{28}$$

$$\text{où} \quad F_v(\boldsymbol{\sigma},\kappa)=F(\boldsymbol{\sigma},\kappa)-C_{\Delta t}\Delta\kappa^q=\sigma_{eq}-R_v(\kappa) \quad ; \quad R_v(\kappa)=R(\kappa)+C_{\Delta t}(\kappa-\kappa_n)^q \tag{29}$$

Après discrétisation, la prise en compte de la viscosité se réduit à l'ajout d'un terme (positif et croissant) dans la fonction d'écrouissage.

On pourrait être tenté d'appliquer la même méthode de résolution que précédemment mais, malheureusement, ce nouveau terme n'est pas dérivable en κ_n car $q<1$ en général ($n>1$).C'est pourquoi on propose de commencer à chercher la solution du problème sans viscosité (de manière grossière) et on bascule ensuite sur la solution avec viscosité par une méthode de Newton moyennant le changement de variable $\Delta\kappa \rightarrow C_{\Delta t}\Delta\kappa^q$, éliminant ainsi le problème de non dérivabilité (et les fortes pentes qui sont pénalisantes pour une méthode de Newton).

3.4 Matrice tangente

Dans le cas local, il s'agit de déterminer le tenseur d'ordre quatre $\boldsymbol{H_{\sigma\varepsilon}}=\boldsymbol{\delta\sigma}/\boldsymbol{\delta\varepsilon}$. Dans le cas non local, il faut également construire les tenseurs d'ordre deux $\boldsymbol{H_{\sigma\varphi}}=\boldsymbol{\delta\sigma}/\delta\varphi$ et $\boldsymbol{H_{\kappa\varepsilon}}=\delta\kappa/\boldsymbol{\delta\varepsilon}$ ainsi que le scalaire $H_{\kappa\varphi}=\delta\kappa/\delta\varphi$.

L'opérateur tangent dépend du régime d'écoulement. Dans le cas élastique, il se réduit à :

$$\boldsymbol{\delta\sigma}=K\,tr(\boldsymbol{\delta\varepsilon})\,\boldsymbol{Id}+2\mu\,dev(\boldsymbol{\delta\varepsilon}) \quad ; \quad \delta\kappa=0 \tag{30}$$

Dans le cas du régime singulier, l'expression est là aussi très simple :

$$\boldsymbol{\delta\sigma}=K\,tr(\boldsymbol{\delta\varepsilon})\,\boldsymbol{Id} \quad ; \quad \delta\kappa=\left(\frac{\partial\widetilde{R}_v}{\partial\kappa}\right)^{-1}\delta\varphi \tag{31}$$

où la fonction d'écrouissage contient le cas échéant les termes liés au non local et à la viscosité (d'où le tilde et l'indice pour le rappeler explicitement).

Le régime d'écoulement régulier conduit à un opérateur tangent plus complexe. L'usage d'un critère de von Mises conduit aux dérivées suivantes :

$$\delta\sigma_{eq}=3\mu\,\boldsymbol{N}:\boldsymbol{\delta\varepsilon} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\delta N}=\frac{1}{\sigma_{eq}}\left[2\mu\,dev(\boldsymbol{\delta\varepsilon})-\delta\sigma_{eq}\boldsymbol{N}\right] \tag{33}$$

En appliquant ensuite des dérivées de fonctions composées, on obtient :

$$\boldsymbol{\delta\sigma}=K\,tr(\boldsymbol{\delta\varepsilon})\,\boldsymbol{Id}+2\mu\left[1-\frac{3\mu\,\Delta\kappa}{\sigma_{eq}}\right]dev(\boldsymbol{\delta\varepsilon})+\frac{9\mu^2\Delta\kappa}{\sigma_{eq}}\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N}:\boldsymbol{\delta\varepsilon}-3\mu\,\boldsymbol{N}\,\delta\kappa \tag{34}$$

$$\delta\kappa=\left[3\mu+\frac{\partial\widetilde{R}_v}{\partial\kappa}\right]^{-1}\left[\delta\sigma_{eq}+\delta\varphi\right] \tag{35}$$

En phase de prédiction ($\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_n$), deux spécificités sont à noter :

- En présence de viscosité, $\delta\kappa=0$ car la dérivée $\partial\widetilde{R}_v/\partial\kappa$ est infinie.
- Les opérateurs tangents ne sont pas continus aux transitions entre régimes ($\hat{M}^e\approx 0$ et $\hat{M}^s\approx 0$) et dans ce cas on opte pour le domaine correspondant au régime du pas précédent. En revanche, si l'état

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

mécanique du début du pas de temps n'est pas au voisinage d'une transition pour, alors le régime est fixé comme pour l'intégration de la loi.

4 Bibliographie

- Lorentz E., Andrieux S. (1999) A variational formulation for nonlocal damage models. Int. J. Plas. 15, 119-138.
- Zhang Y., Lorentz E., Besson J. (2018) Ductile damage modelling with locking-free regularised GTN model. Int. J. Numer. Methods Eng. 113, 1871-1903.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)