# Loi de comportement FONDATION

**Résumé :**

Ce document décrit le comportement élasto-plastique non linéaire d'une fondation superficielle rectangulaire soumise à une sollicitation tridimensionnelle statique ou sismique. Cette loi de comportement est affectée sur les éléments discrets 3D composé d'un unique nœud en translation/rotation (DIS_TR) affecté d'une matrice de raideur diagonale (K_TR_D_N) au moyen de la relation FONDATION appelée par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires STAT_NON_LINE [R5.03.01] ou DYNA_NON_LINE [R5.05.05]. Le mot clé pour définir les caractéristiques du matériau dans DEFI_MATERIAU est FONDA_SUPERFI.

La loi représente à la fois le mécanisme de glissement, le mécanisme de perte de capacité portante ainsi que le mécanisme de décollement de la fondation. Avant de mettre en jeu un des mécanismes précédemment cités, toutes les directions de chargement présentent un comportement élastique linéaire décrit par des caractéristiques classiques de rigidité.

On distingue dans la loi de comportement trois mécanismes qui peuvent se combiner :

- le premier représentant le glissement entre la sous-face de la fondation et le sol (traité comme un mécanisme plastique avec écrouissage) ;
- le second représentant le phénomène de perte de capacité portante sous l'effet d'une charge verticale trop importante (traité, là aussi, comme un mécanisme plastique avec écrouissage) ;
- Le troisième représentant le phénomène de décollement-recollement de la fondation sous l'effet d'un moment important (traité comme un mécanisme élastique non linéaire).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des matières

1 Présentation des mécanismes mis en jeu....3
1.1 Repère global et mécanisme....3
1.2 Mécanisme de glissement....4
1.3 Mécanisme de perte de capacité portante....5
1.4 Mécanisme de décollement....8
2 Implantation dans Code_Aster....10
2.1 Détermination de l'incrément de chargement....10
2.1.1 Données d'entrées....10
2.1.2 Constitution de la matrice élastique tangente....11
2.1.3 Tir élastique....11
2.1.4 Calcul de l'écoulement plastique....11
2.2 Détermination de la matrice tangente....21
2.2.1 Données d'entrées....21
2.2.2 Constitution de la matrice tangente....21
3 Récapitulatif des paramètres de la loi de comportement....23
4 Récapitulatif des variables internes de la loi de comportement....24
5 Références bibliographiques....25
6 Description des versions du document....25



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Présentation des mécanismes mis en jeu

## 1.1 Repère global et mécanisme

La Figure 1.1-1 suivante présente le repère local avec les axes locaux de l'élément discret ainsi que les notations en force (forces et moments) et en déplacement (translation et rotation). Les flèches indiquent ici toujours des valeurs positives.

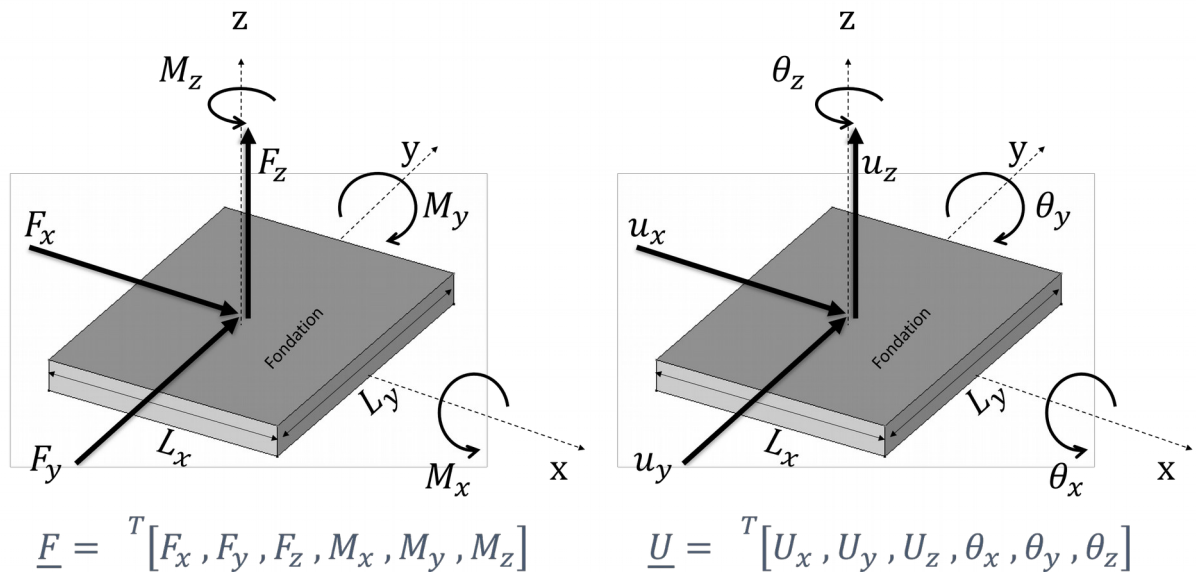



**Figure 1.1-1 : Repère local de la fondation et notation des efforts/déplacements globaux**

La Figure 1.1-2 suivante présente, quant à elle, les 3 mécanismes mis en jeu dont la formulation est donnée dans les 3 paragraphes suivants.

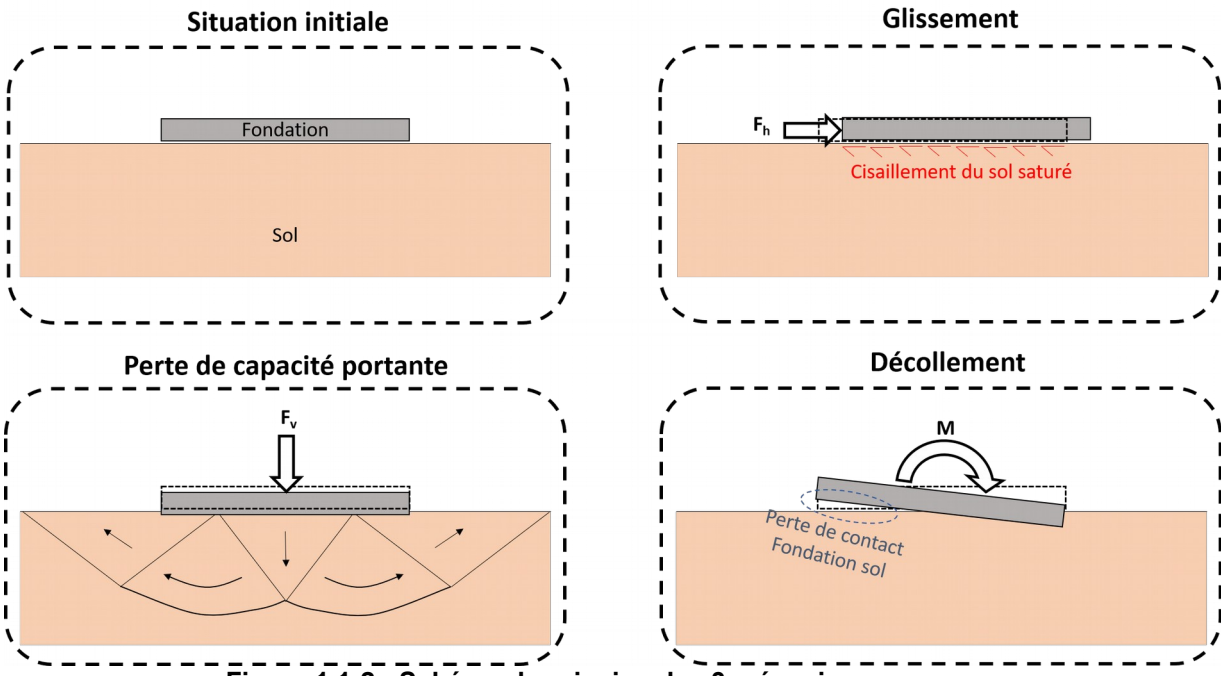



**Figure 1.1-2 : Schéma de principe des 3 mécanismes**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

## 1.2 Mécanisme de glissement

L'expression de la surface de plasticité de ce mécanisme est basée sur le modèle de frottement de Coulomb. La résistance au frottement est la somme d'un terme de frottement, fonction de l'effort vertical et d'un terme de cohésion calculé sur une surface réduite :

$$f_s=\sqrt{(F_x-q_{h_x})^2+(F_y-q_{h_y})^2}+F_z\tan(\phi_{inter})-c_{inter}A'$$

Où la surface réduite s'écrit de la manière suivante avec prise en compte de la division par 0 :

$$A'=L_xL_y\times\begin{cases}\left(1+\dfrac{2|M_x|}{L_yF_z}\right)\left(1+\dfrac{2|M_y|}{L_xF_z}\right) & si\ \ F_z<0\\ 1 & si\ \ (F_z=0)et\ \ (M_x=0)et(M_y=0)\\ 0 & si\ \ (F_z>0)ou\ \ ((F_z=0)et(M_y,M_x)\neq(0,0))\end{cases}$$

Dans le plan des efforts $(-F_z,F_x)$ , cette surface est donnée sur la figure ci-dessous :

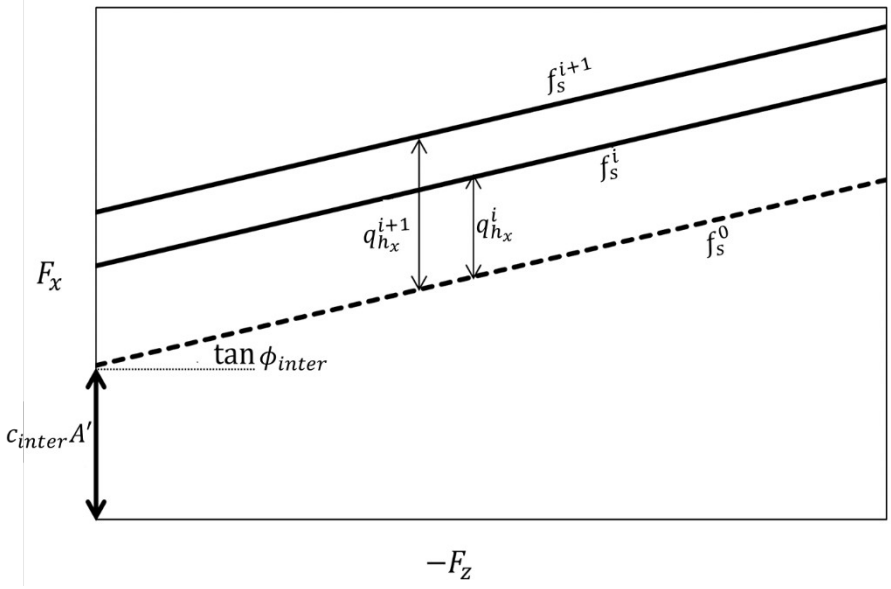



**Figure 1.2-1 : Evolution de la surface du mécanisme de glissement**

A ce critère de rupture est associé un déplacement plastique spécifique notée $\underline{U_p^{sl}}$ avec les coordonnées suivantes :

$$\underline{U_{sl}^{pl}}={}^T(U_{x,s}^{pl},U_{y,s}^{pl},U_{z,s}^{pl},\theta_{x,s}^{pl},\theta_{y,s}^{pl},\theta_{z,s}^{pl}=0)$$

La variable d'écrouissage en glissement $\boldsymbol{Q_{sl}}={}^T(q_{h_x},q_{h_y})$ sont ajoutées pour prendre en compte les effets cycliques. Ces variables évoluent quand le point représentant le torseur d'efforts à la fondation dépasse la surface $f_{sl}$ . Leur évolution est décrite par la loi d'écrouissage suivante :

$$\mathrm{d}q_{h_x}=H_h\cdot dU_{x,s}^{pl}\ \exp(-\gamma v_{x,s}^{pl})\quad \text{où}\quad U_{x,s}^{pl}=\sum dU_{x,s}^{pl}\ \text{ et }\ v_{x,s}^{pl}=\sum|dU_{x,s}^{pl}|$$
$$\mathrm{d}q_{h_y}=H_h\cdot dU_{y,s}^{pl}\ \exp(-\gamma v_{y,s}^{pl})\quad \text{où}\quad U_{y,s}^{pl}=\sum dU_{y,s}^{pl}\ \text{ et }\ v_{y,s}^{pl}=\sum|dU_{y,s}^{pl}|$$

Que l'on peut noter avec la relation matricielle suivante :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}={}^T(\mathrm{d}q_{h_x},\mathrm{d}q_{h_y}),\quad \mathrm{d}\boldsymbol{U_{sl}^{pl}}={}^T(\mathrm{d}U_{x,s}^{pl},\mathrm{d}U_{y,s}^{pl},\mathrm{d}U_{z,s}^{pl},\mathrm{d}\theta_{x,s}^{pl},\mathrm{d}\theta_{y,s}^{pl},\mathrm{d}\theta_{z,s}^{pl}=0)$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}=\boldsymbol{H_{sl}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U_{sl}^{pl}}\ \text{ avec }\ \boldsymbol{H_{sl}}=\begin{pmatrix}H_h\exp(-\gamma v_{x,s}^{pl}) & 0 & 0&0&0&0\\ 0 & H_h\exp(-\gamma v_{y,s}^{pl}) & 0&0&0&0\end{pmatrix}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$H_h$ et $\gamma$ sont deux paramètres caractéristiques de cette loi, définis comme suit :

- $H_h$ est le module d'écrouissage quand le mécanisme est activé pour la première fois $\left(U_{x,s}^{pl}=v_{x,s}^{pl}=U_{y,s}^{pl}=v_{y,s}^{pl}=0\right)$. Pour assurer une continuité avec le comportement élastique, il est recommandé de choisir $H_h$ du même ordre de grandeur que la raideur en translation horizontale.
- le coefficient $\gamma$, homogène à l'inverse d'un déplacement, est calculé de manière à avoir $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}\approx\boldsymbol{0}$ lorsque $v_{x,s}^{pl}$ ou $v_{y,s}^{pl}$ s'approche d'une valeur limite $U_{max,s}^{pl}$ définit au préalable. D'après les propriétés de la fonction exponentielle, on peut estimer que $\gamma=\dfrac{5}{U_{max,s}^{pl}}$.

## 1.3 Mécanisme de perte de capacité portante

L'expression de la surface de plasticité de ce mécanisme (abrégé « CP ») est inspirée des critères usuels. Elle se base sur la justification de l'effort vertical par rapport à une limite d'élasticité donnée $V_{lim}$. Cette limite d'élasticité est réduite en fonction de l'inclinaison et l'excentrement de la charge, fonctions respectives de l'effort horizontal et du moment :

$$f_{CP}=-F_z-V_{lim}\left(1+\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}{F_z}\right)^3\left(1+\frac{2\left|M_x\right|}{L_y F_z}\right)\left(1+\frac{2\left|M_y\right|}{L_x F_z}\right)$$

A ce critère de rupture est associé un déplacement plastique spécifique notée $\boldsymbol{U_{CP}^{pl}}$ avec les coordonnées suivantes :

$$\boldsymbol{U_{CP}^{pl}}={}^T\left(U_{x,CP}^{pl},U_{y,CP}^{pl},U_{z,CP}^{pl},\theta_{x,CP}^{pl},\theta_{y,CP}^{pl},\theta_{z,CP}^{pl}=0\right)$$

Quand le point représentant le torseur d'efforts de la fondation dépasse la surface de charge, la surface évolue en fonction du tassement vertical irréversible à l'aide de 4 variables d'écrouissage cinématiques $R_{h,x}$, $R_{h,y}$, $R_{m,x}$, $R_{m,y}$ respectivement pour la translation selon x, la translation selon y, la rotation selon x et la rotation selon y, et d'une variable d'écrouissage isotrope $R$ avec la notation vectorielle suivante $\boldsymbol{Q_{CP}}={}^T\left(R_{h,x},R_{h,y},R,R_{m,x},R_{m,y}\right)$. L'expression de cette surface devient :

$$f_{CP}=-F_z-\left(V_{lim}+R\right)\begin{cases}\left(1+\dfrac{\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}}{F_z}\right)^3\left(1+\dfrac{2\left|M_x-R_{m,x}\right|}{L_y F_z}\right)\left(1+\dfrac{2\left|M_y-R_{m,y}\right|}{L_x F_z}\right) & \text{si } F_z<0\\ 1 \quad \text{si } \left(\left(F_x-R_{h,x}\right),\left(F_y-R_{h,y}\right),F_z,\left(M_x-R_{m,x}\right),\left(M_y-R_{m,x}\right)\right)=\left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right) & \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les figures suivantes montrent l'évolution de la surface du critère pour la variable d'écrouissage isotrope et pour les variables d'écrouissage cinématique :

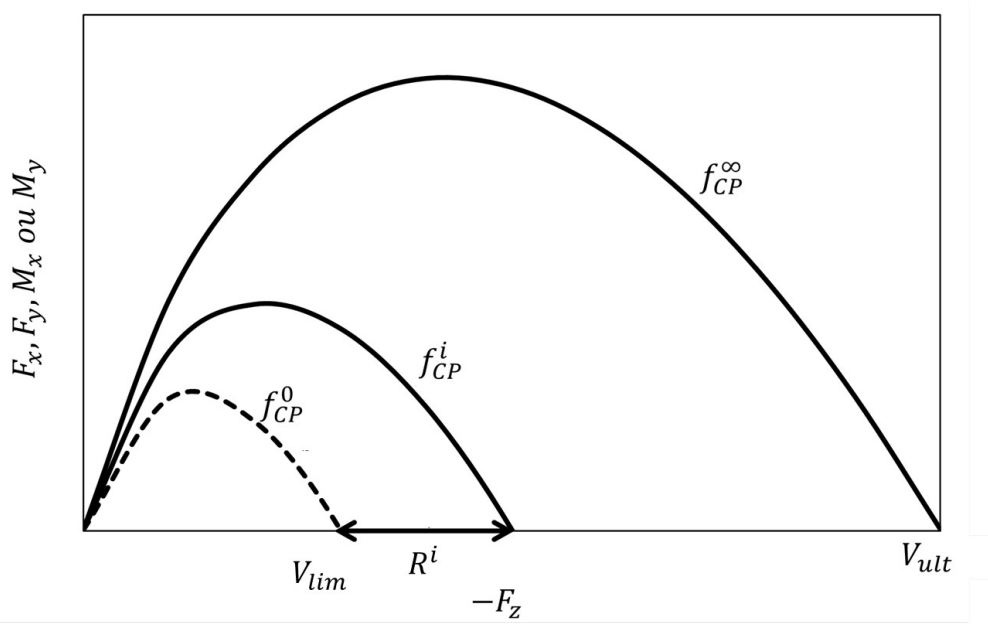



**Figure 1.3-1 : Evolution de la surface du mécanisme CP avec écrouissage isotrope**

La variable d'écrouissage isotrope est directement déduite du tassement plastique par la relation :

$$R=\left(V_{ult}-V_{lim}\right)\left(\frac{v_{z,CP}^{pl}}{v_{z,CP}^{pl}+v_{r,CP}^{pl}}\right) \text{ avec } U_{z,CP}^{pl}=\sum d\,U_{z,CP}^{pl} \text{ et } v_{z,CP}^{pl}=\sum\left|d\,U_{z,CP}^{pl}\right|$$

$$\text{D'où}\frac{\partial R}{\partial U_{z,CP}^{pl}}=\frac{\delta_z^{CP}\left(V_{ult}-V_{lim}\right)v_{r,CP}^{pl}}{\left(v_{z,CP}^{pl}+v_{r,CP}^{pl}\right)^2} \text{ avec } \begin{cases} v_{z,CP}^{pl}=\sum\left|\mathrm{d}\,U_{z,CP}^{pl}\right| \\ \delta_z^{CP}=\begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{d}\,U_{z,CP}^{pl}>0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$V_{ult}$ et $v_{r,CP}^{pl}$ sont deux paramètres caractéristiques de cette loi d'écrouissage, définis comme suit :

- $V_{ult}$ est la capacité portante du terrain sous la fondation, définies à partir d'essais in situ ou de simulations par éléments finis.
- La valeur de $v_{r,CP}^{pl}$ désigne un tassement de référence, cette valeur peut être de l'ordre de 10 % de la petite dimension de la fondation.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

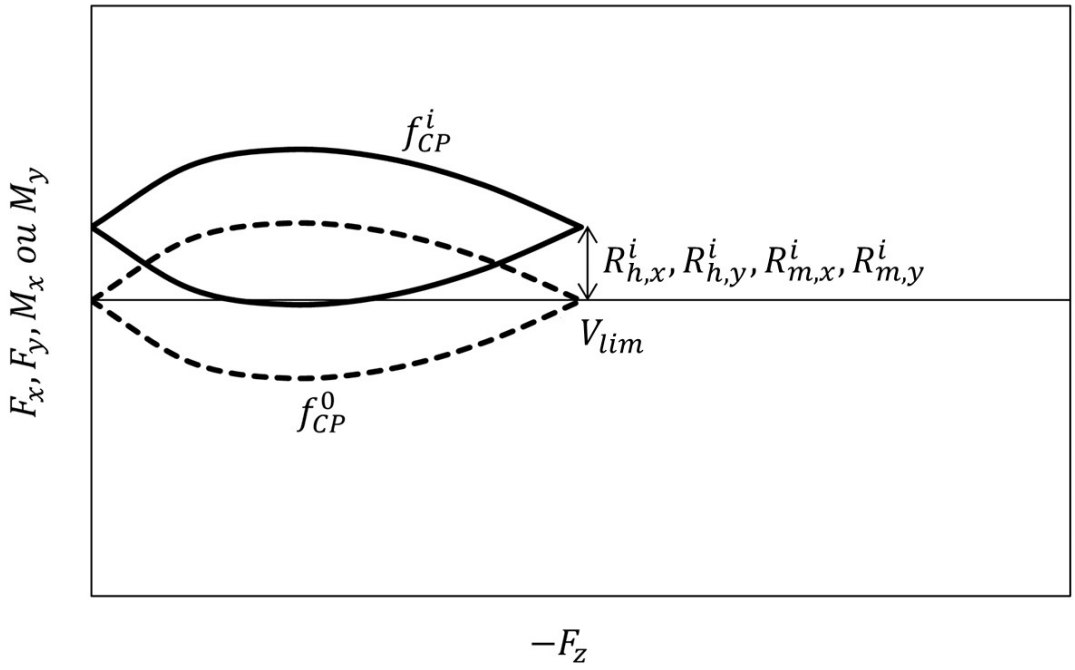



**Figure 1.3-2 : Evolution de la surface du mécanisme CP avec écrouissage cinématique seul**

L'évolution des variables d'écrouissage est semblable à celle du glissement (pour l'écrouissage cinématique) :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}R_{h,x} = I_{h,x}\exp\left(-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}\right)\mathrm{d}U_{x,CP}^{pl} \\ \mathrm{d}R_{h,y} = I_{h,y}\exp\left(-\gamma_{h,y}v_{z,CP}^{pl}\right)\mathrm{d}U_{y,CP}^{pl} \\ \mathrm{d}R = \dfrac{\partial R}{\partial U_{z,CP}^{pl}}\mathrm{d}U_{z,CP}^{pl} \\ \mathrm{d}R_{m,x} = I_{m,x}\exp\left(-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}\right)\mathrm{d}\theta_{x,CP}^{pl} \\ \mathrm{d}R_{m,y} = I_{m,y}\exp\left(-\gamma_{m,y}v_{z,CP}^{pl}\right)\mathrm{d}\theta_{y,CP}^{pl} \end{pmatrix}$$

Que l'on peut noter avec la relation matricielle suivante :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{CP}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{pl}} \text{ avec } \begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}} = {}^{T}\left(\mathrm{d}R_{h,x}\ ,\ \mathrm{d}R_{h,y}\ ,\ \mathrm{d}R\ ,\ \mathrm{d}R_{m,x}\ ,\ \mathrm{d}R_{m,y}\right) \\ \mathrm{d}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{pl}} = {}^{T}\left(\mathrm{d}U_{x,CP}^{pl}\ ,\mathrm{d}U_{y,CP}^{pl}\ ,\ \mathrm{d}U_{z,CP}^{pl}\ ,\ \mathrm{d}\theta_{x,CP}^{pl}\ ,\ \mathrm{d}\theta_{y,CP}^{pl}\right) \end{cases} \text{ et}$$

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{CP}} = \begin{pmatrix} I_{h,x}e^{-\gamma_{h,x}v_{z,CP}^{pl}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{h,y}e^{-\gamma_{h,y}v_{z,CP}^{pl}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial R}{\partial U_{z,CP}^{pl}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m,x}e^{-\gamma_{m,x}v_{z,CP}^{pl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{m,y}e^{-\gamma_{m,y}v_{z,CP}^{pl}} \end{pmatrix}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Pour chaque loi d'écrouissage cinématique, $I_{hou\,m,x\,ou\,y}$ et $\gamma_{hou\,m,x\,ou\,y}$ sont deux paramètres caractéristiques de cette loi, définis comme suit :

- $I_{hou\,m,x\,ou\,y}$ est le module d'écrouissage quand le mécanisme est activé pour la première fois $\left(U_{z,CP}^{pl}=v_{z,CP}^{pl}=0\right)$ Pour assurer une continuité avec le comportement élastique, il est recommandé de choisir $I_{CP}$ du même ordre de grandeur que la raideur du degré de liberté considéré.
- le coefficient $\gamma_{hou\,m,x\,ou\,y}$, homogène à l'inverse d'un déplacement, est calculé de manière à avoir $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}\approx\boldsymbol{0}$ lorsque $v_{z,CP}^{pl}$ s'approche d'une valeur limite $v_{max,CP}^{pl}$ définit au préalable. D'après les propriétés de la fonction exponentielle, on peut estimer que $\gamma_{CP}=\dfrac{5}{v_{max,CP}^{pl}}$.

## 1.4 Mécanisme de décollement

Le mécanisme de décollement (uniquement activé si le paramètre DECOLLEMENT est égal à 'OUI') considéré comme étant un mécanisme purement géométrique, est décrit par une dégradation de la raideur en rotation. Cette dégradation est supposée être réversible. Différentes expressions peuvent être utilisées selon que l'on considère la raideur sécante ou la raideur tangente. En pratique, la raideur en rotation $K_{rx,rx}$ ou $K_{ry,ry}$ varie en fonction de l'excentrement $e_{x,y}=-|M_{x,y}|/F_z$. Ci-dessous la valeur de la raideur sécante en rotation :

$$K_{rx,rx}^{séc}=\frac{M_x}{\theta_x}=K_{rx,rx}^{0}\begin{cases}1 & \text{si}\,|M_x|\le-\dfrac{F_z L_y}{6}\\ -\dfrac{27}{4}\cdot\dfrac{2|M_x|}{F_z L_y}\cdot\left(1+\dfrac{2|M_x|}{F_z L_y}\right)^2 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$K_{ry,ry}^{séc}=\frac{M_y}{\theta_y}=K_{ry,ry}^{0}\begin{cases}1 & \text{si}\,|M_y|\le-\dfrac{F_z L_x}{6}\\ -\dfrac{27}{4}\cdot\dfrac{2(M_y)}{F_z L_x}\cdot\left(1+\dfrac{2(M_y)}{F_z L_x}\right)^2 & \text{sinon}\end{cases}$$

Où $K_{rx,rx}^{0}$ et $K_{ry,ry}^{0}$ sont les raideurs en rotations sans décollement.
Ce décollement est uniquement implanté sous code aster sous forme de raideur tangente :

$$K_{rx,rx}^{tan}=\frac{\partial M_x}{\partial\theta_x}=K_{rx,rx}^{0}\begin{cases}1 & \text{si}\,|M_x|\le-\dfrac{F_z L_y}{6}\\ \dfrac{27}{8}\left(1+\dfrac{2|M_x|}{F_z L_y}\right)^3 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$K_{ry,ry}^{tan}=\frac{M_y}{\theta_y}=K_{ry,ry}^{0}\begin{cases}1 & \text{si}\,|M_y|\le-\dfrac{F_z L_x}{6}\\ \dfrac{27}{8}\left(1+\dfrac{2|M_y|}{F_z L_x}\right)^3 & \text{sinon}\end{cases}$$

Ainsi le moment ne peut dépasser le moment ultime :

$$M_x^{ult}=\left|\frac{F_z L_y}{2}\right|\quad et\quad M_y^{ult}=\left|\frac{F_z L_x}{2}\right|$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La variation des raideurs sécantes et tangentes en fonction du moment sont données sur la figure ci-dessous.

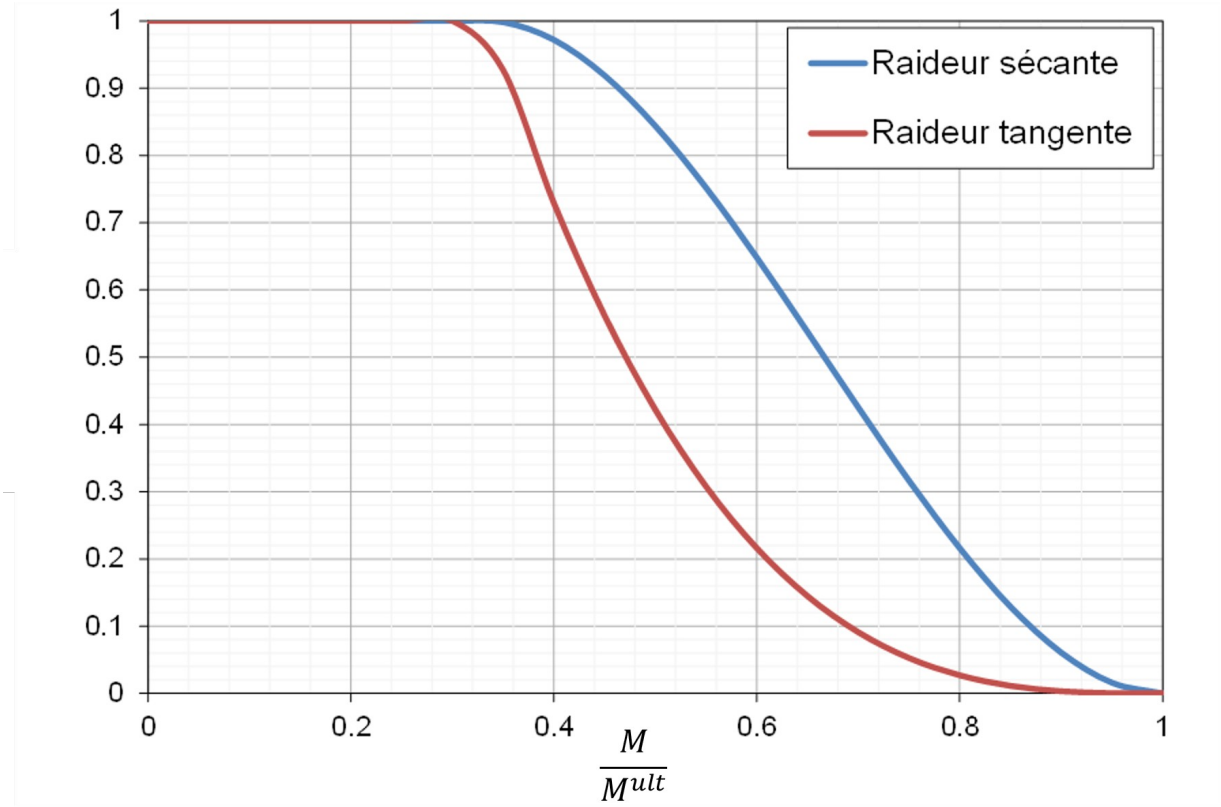



**Figure 1.4-1 : Raideur en rotation en fonction du moment**



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Implantation dans *Code_Aster*

La relation de comportement FONDA_SUPERFI est affectée à des éléments discrets de modélisation DIS_TR en 1 nœud. Cette relation est appelée par les opérateurs de résolution de problèmes non linéaires STAT_NON_LINE [R5.03.01] ou DYNA_NON_LINE [R5.05.05].

Les axes locaux de ces éléments x, y, z sont définis comme sur la Figure 1.1-1.

L'intégration de cette relation de comportement des assemblages dans l'opérateur STAT_NON_LINE de *Code_Aster* nécessite la formulation de l'incrément de force $\Delta F$ et les opérateurs tangents $K_o^{tan}$ et $K_n^{tan}$.

1) $\Delta F$ est l'incrément de chargement pendant le pas de temps (soit entre $t$ et $t+dt$) provoqué par un incrément de déplacement $\Delta U$ à ce même pas de temps.
2) $K_n^{tan}$ est la rigidité tangente à la fin du pas de temps, instant t+dt .
3) $K_o^{tan}$ est la rigidité tangente au début du pas de temps, instant $t$ égale à la rigidité tangente de la fin du pas précédent.

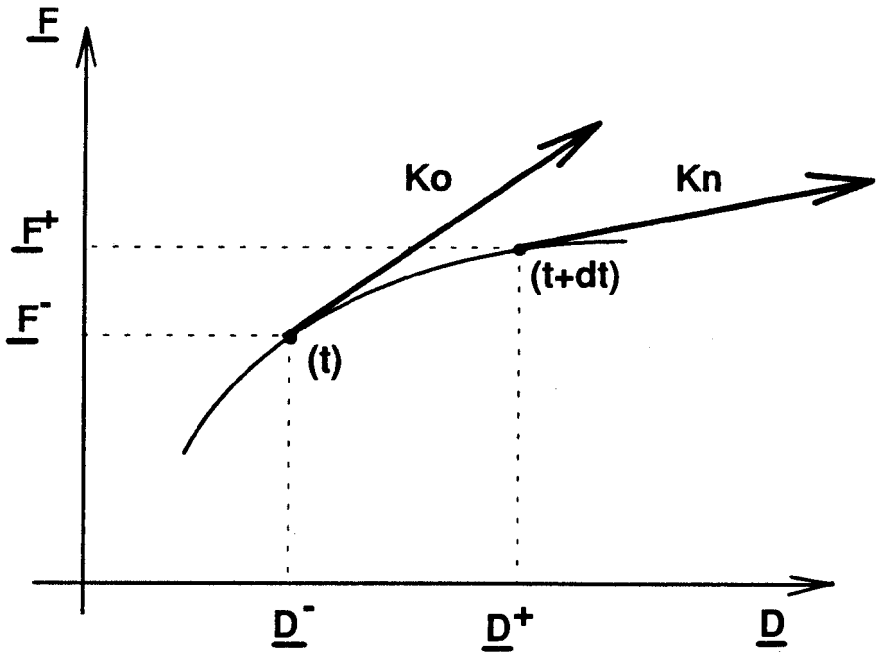



**Figure 2-1 : Définition des opérateurs $K_o^{tan}$ et $K_n^{tan}$**

## 2.1 Détermination de l'incrément de chargement

### 2.1.1 Données d'entrées

En plus des paramètres de la loi de comportement on dispose en entrée des variables au début du pas de temps (O) :

- de la force globale : $F^O = {}^T\left(F_x^o, F_y^o, F_z^o, M_x^o, M_y^o, M_z^o\right)$ ;
- du déplacement : $U^O = {}^T\left(u_x^o, u_y^o, u_z^o, \theta_x^o, \theta_y^o, \theta_z^o\right)$ ;
- des variables internes d'écrouissage en glissement : $Q_{sl}^o = {}^T\left(q_{h_x}^O, q_{h_y}^O\right)$ ;
- du déplacement plastique en glissement : $U_{sl}^O = {}^T\left(u_{x,s}^{pl,O}, u_{y,s}^{pl,O}, u_{z,s}^{pl,O}, \theta_{x,s}^{pl,O}, \theta_{y,s}^{pl,O}\right)$ ;



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- des variables d'écrouissage en capacité portante : $\boldsymbol{Q_{sl}^{o}}={}^{T}\left(R_{h,x}^{O},R_{h,y}^{O},R^{O},R_{m,x}^{O},R_{m,y}^{O}\right)$ ;
- du déplacement plastique en CP : $\boldsymbol{U_{CP}^{O}}={}^{T}\left(u_{x,CP}^{pl,O},u_{y,CP}^{pl,O},u_{z,CP}^{pl,O},\theta_{x,CP}^{pl,O},\theta_{y,CP}^{pl,O}\right)$ ;
- des variables internes intermédiaires en glissement et CP : $v_{x,s}^{pl,O}$, $v_{y,s}^{pl,O}$ et $v_{z,CP}^{pl,O}$ ;

Ainsi que le déplacement final à la fin du pas de temps : $\boldsymbol{U^{F}}={}^{T}\left(u_{x}^{F},u_{y}^{F},u_{z}^{F},\theta_{x}^{F},\theta_{y}^{F},\theta_{z}^{F}\right)$
Il faut l'ensemble des variables à la fin du pas de temps (notation « F » à la place de « O »)

### 2.1.2 Constitution de la matrice élastique tangente

Une matrice de rigidité initiale $\boldsymbol{K^{ini}}$ doit être affectée à l'élément discret. Cette matrice doit être symétrique et diagonale dans son repère local (les termes non diagonaux sont ignorés).
La première étape consiste à partir de la force globale $\boldsymbol{F^{O}}$ au début du pas de temps de calculer la raideur élastique tangente en rotation selon x $K_{rx,rx}^{tan,o}$ et y $K_{ry,ry}^{tan,o}$ avec la formulation vue au [§1.4] ainsi on obtient la matrice de raideur élastique tangente :

$$\boldsymbol{K_{élas}^{o,tan}}=\begin{pmatrix} K_{xx}^{ini} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy}^{ini} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}^{ini} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{rx,rx}^{tan,o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{ry,ry}^{tan,o} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{rz,rz}^{ini} \end{pmatrix}$$

### 2.1.3 Tir élastique

A partir de la matrice de rigidité élastique tangente, on calcule la force $\boldsymbol{F^{élas}}={}^{T}\left(F_{x}^{élas},F_{y}^{élas},F_{z}^{élas},M_{x}^{élas},M_{y}^{élas},M_{z}^{élas}\right)$ que l'on obtiendrait si aucun mécanisme de plasticité n'est sollicité (aussi nommé « tir élastique »). Soit :

$$\boldsymbol{F^{élas}}=\boldsymbol{F^{O}}+\boldsymbol{K_{élas}^{O,tan}}\cdot\left(\boldsymbol{U^{F}}-\boldsymbol{U^{O}}\right)$$

### 2.1.4 Calcul de l'écoulement plastique

Maintenant on calcule $f_{CP}\left(\boldsymbol{F^{élas}},\boldsymbol{Q_{CP}^{O}}\right)$ et $f_{s}\left(\boldsymbol{F^{élas}},\boldsymbol{Q_{sl}^{O}}\right)$, voir §1.3et §1.2.

#### 2.1.4.1 Si $f_{CP}\leq 0$ et $f_{s}\leq 0$

Alors aucun mécanisme de plasticité n'est atteint, la fondation est dans le domaine élastique, le tir élastique correspond à la force à la fin du pas de temps : $\boldsymbol{F^{F}}=\boldsymbol{F^{élas}}$ et aucune variable de plasticité ne change :

$$\boldsymbol{Q_{sl}^{F}}=\boldsymbol{Q_{sl}^{O}}\ ,\boldsymbol{U_{sl}^{F}}=\boldsymbol{U_{sl}^{O}},v_{x,s}^{pl,F}=v_{x,s}^{pl,O},v_{y,s}^{pl,F}=v_{y,s}^{pl,O},\ \boldsymbol{Q_{CP}^{F}}=\boldsymbol{Q_{CP}^{O}}\ ,\boldsymbol{U_{CP}^{F}}=\boldsymbol{U_{CP}^{O}}\ et\ v_{z,CP}^{pl,F}=v_{z,CP}^{pl,O}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

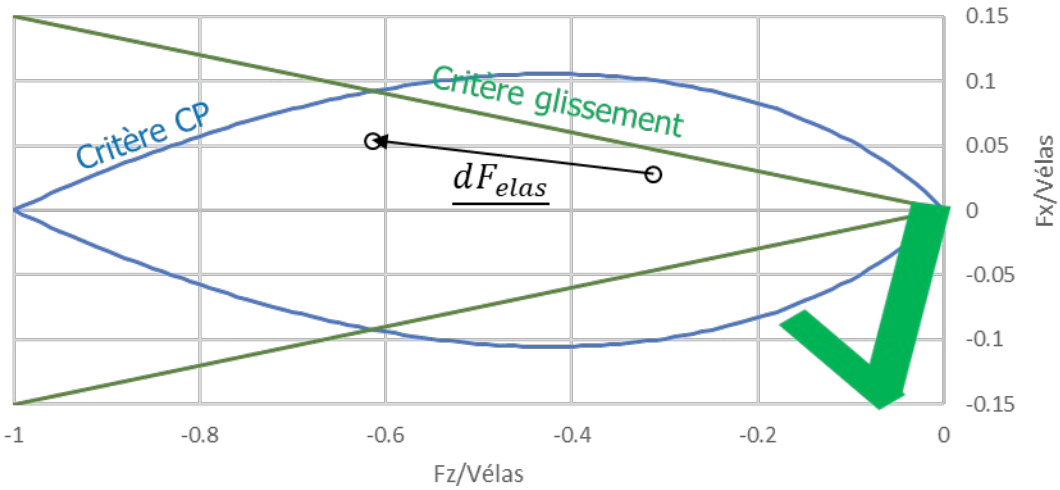



**Figure 2.1-1 : Illustration du tir élastique sans atteinte de mécanisme de rupture**

#### 2.1.4.2 Si $f_{CP}>0$ et $f_{sl}\leq 0$

Seul le mécanisme de perte de capacité portante est atteint, aucune variable de plasticité liée au glissement ne change :

$$\boldsymbol{Q}_{sl}^{F}=\boldsymbol{Q}_{sl}^{O}\ ,\boldsymbol{U}_{sl}^{F}=\boldsymbol{U}_{sl}^{O},v_{x,s}^{pl,F}=v_{x,s}^{pl,O},v_{y,s}^{pl,F}=v_{y,s}^{pl,O}$$

On cherche alors la correction en chargement $\boldsymbol{dF}^{cor}$ et l'évolution des variables d'écrouissage $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}$ nécessaire pour revenir sur le critère, à savoir :

$$f_{CP}\left(\boldsymbol{F}^{élas}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{CP}^{O}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}\right)=0$$

Cette équation est résolue par une boucle itérative jusqu'à convergence, en écrivant à l'itération k le développement limité de cette équation autour du point $\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)$ :

$$f_{CP}\left(\boldsymbol{F}^{élas}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{CP}^{O}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}\right)\approx\left\{\begin{array}{c} f_{CP}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right) \\ +{}^{T}\left(\dfrac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\right)\left(\boldsymbol{F}^{élas}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}-\boldsymbol{F}^{ité,k}\right) \\ +{}^{T}\left(\dfrac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{Q}_{CP}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\right)\left(\boldsymbol{Q}_{CP}^{O}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}-\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right) \end{array}\right\}=0$$

Avec pour commencer la boucle itérative : $\left(\boldsymbol{F}^{ité,0},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,0}\right)=\left(\boldsymbol{F}^{élas},\boldsymbol{Q}_{CP}^{O}\right)$

La correction en chargement et l'évolution de l'écrouissage peut être reliée à l'incrément de déplacement plastique $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}$ par les relations suivantes :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}=\boldsymbol{K}_{élas}^{O,tan}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}\ \text{ et }\ \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}=\boldsymbol{I}_{CP}^{O}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}$$

Où $\boldsymbol{I}_{CP}^{O}$ est calculée avec les paramètres du début du pas de temps (voir §1.3).
On fait l'hypothèse que l'écoulement plastique est normal à la surface de plasticité, ainsi, on relie l'incrément plastique à la variable d'écoulement plastique $\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}$ :


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}=\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}$$

Ainsi on peut écrire obtenir une approximation de l'écoulement plastique :

$$\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}=\frac{f_{CP}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)+{}^{T}\left(\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\right)\left(\boldsymbol{F}^{élas}-\boldsymbol{F}^{ité,k}\right)+{}^{T}\left(\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{Q}_{CP}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\right)\left(\boldsymbol{Q}_{CP}^{O}-\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)}{\left({}^{T}\left(\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\right)\boldsymbol{K}_{élas}^{O,tan}-{}^{T}\left(\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{Q}_{CP}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\right)\boldsymbol{I}_{CP}^{O}\right)\times\left(\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{ité,k},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k}\right)\right)}$$

A partir de l'écoulement plastique $\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}$, on déduit $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}$, on réévalue le critère de rupture :

- si $\left|f_{CP}\left(\boldsymbol{F}^{élas}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{CP}^{O}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}\right)\right|\leq \text{error}$ alors on a atteint la convergence de la correction ;
- sinon on refait tourner la boucle avec :

$$\left(\boldsymbol{F}^{ité,k+1},\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,k+1}\right)=\left(\boldsymbol{F}^{élas}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{CP}^{O}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}\right)$$

Après convergence de la boucle à l'itération « m », on met à jour les paramètres de plasticité liés à la capacité portante :

$$\boldsymbol{Q}_{CP}^{F}=\boldsymbol{Q}_{CP}^{ité,m+1},\boldsymbol{U}_{CP}^{F}=\boldsymbol{U}_{CP}^{O}+\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{m},v_{z,CP}^{pl,F}=v_{z,CP}^{pl,O}+\left|\mathrm{d}U_{z,CP}^{pl,m+1}\right|$$

On récupère aussi la force à la fin du pas de temps :

$$\boldsymbol{F}^{F}=\boldsymbol{F}^{ité,m+1}$$

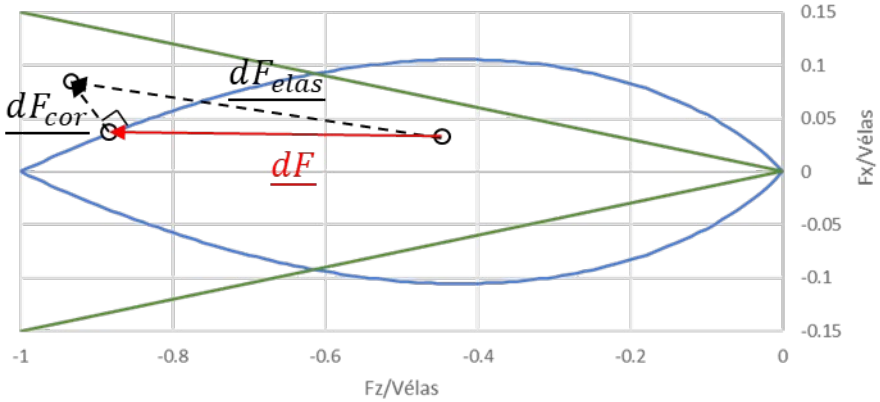



**Figure 2.1-2 : Illustration du retour sur le critère CP**

### 2.1.4.3 Si $f_{CP}\leq 0$ et $f_{s}>0$

Seul le mécanisme de perte de capacité portante est atteint, aucune variable de plasticité liée au glissement ne change :

$$\boldsymbol{Q}_{CP}^{F}=\boldsymbol{Q}_{CP}^{O},\boldsymbol{U}_{CP}^{F}=\boldsymbol{U}_{CP}^{O},v_{z,CP}^{pl,F}=v_{z,CP}^{pl,O}$$

On résout la situation de la même façon qu'au §2.1.4.2, on cherche alors la correction en chargement $\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}$ et l'évolution des variables d'écrouissage $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}$ nécessaire pour revenir sur le critère, à savoir :

$$f_{sl}\left(\boldsymbol{F}^{élas}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{sl}^{O}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}\right)=0$$


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette équation est résolue par une boucle itérative jusqu'à convergence, en écrivant à l'itération k le développement limité de cette équation autour du point $\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)$ :

$$f_s\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}\right)\approx\left\{\begin{array}{c} f_s\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right) \\ +{}^T\left(\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\right)\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}-\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}\right) \\ +{}^T\left(\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\right)\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}-\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right) \end{array}\right\}=0$$

Avec pour commencer la boucle itérative : $\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,0}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,0}}\right)=\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}\right)$

La correction en chargement et l'évolution de l'écrouissage peut être reliée à l'incrément de déplacement plastique $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}$ par les relations suivantes :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{O},tan}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}\text{ et }\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}$$

Où $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}$ est calculée avec les paramètres du début du pas de temps (voir §1.2).

On fait l'hypothèse que l'écoulement plastique est normal à la surface de plasticité, ainsi, on relie l'incrément plastique à la variable d'écoulement plastique $d\lambda_{sl}^{k}$ :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}=\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\mathrm{d}\lambda_{sl}^{k}$$

Ainsi on peut écrire obtenir une approximation de l'écoulement plastique :

$$\mathrm{d}\lambda_{sl}^{k}=\frac{f_s\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)+{}^T\left(\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\right)\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)+{}^T\left(\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\right)\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}}-\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)}{\left({}^T\left(\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\right)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{O},tan}-{}^T\left(\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\right)\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}\right)\times\left(\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}}\right)\right)}$$

A partir de l'écoulement plastique $\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}$, on déduit $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}$, on réévalue le critère de rupture :

- si $\left|f_s\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}\right)\right|\leq\mathrm{error}$ alors on a atteint la convergence de la correction ;
- sinon on refait tourner la boucle avec : $\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k+1}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k+1}}\right)=\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}\right)$

Après convergence de la boucle à l'itération « m », on met à jour les paramètres de plasticité liés au glissement :

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,m+1}},\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{m},v_{x,s}^{pl,F}=v_{x,s}^{pl,O}+\left|\mathrm{d}U_{x,s}^{pl,m+1}\right|\ ,v_{y,s}^{pl,F}=v_{y,s}^{pl,O}+\left|\mathrm{d}U_{y,s}^{pl,m+1}\right|$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On récupère aussi la force à la fin du pas de temps :

$$\boldsymbol{F}^{F}=\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},\boldsymbol{m+1}}$$

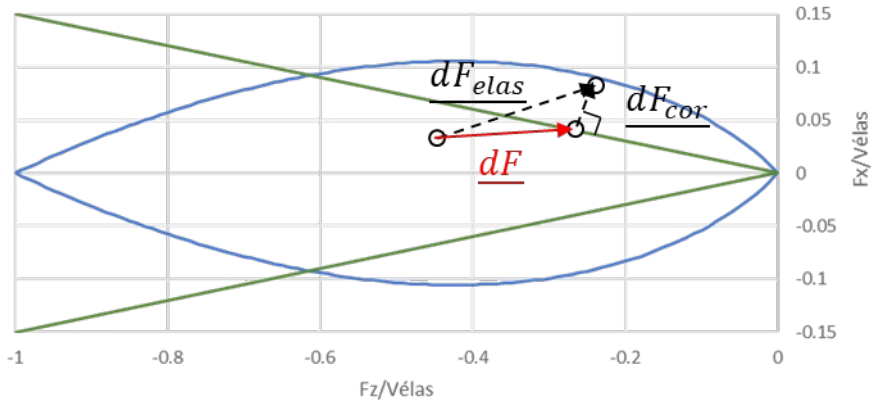



**Figure 2.1-3 : Illustration du retour sur le critère de glissement**

### 2.1.4.4 Si $f_{CP}>0$ et $f_{sl}>0$

Alors les deux mécanismes de plasticité sont atteints. On résout alors la situation de la même façon qu'aux §2.1.4.2 et §2.1.4.3 mais en écrivant les deux critères au lieu d'un, en écrivant à l'itération k le développement limité de cette équation autour du point $\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité},k}\right)$ :

$$f_{CP}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}\right)\approx\left\{\begin{array}{c} f_{CP}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité},k}\right) \\ +{}^{T}\left(\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité},k}\right)\right)\left(\underline{F^{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}-\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k}\right) \\ +{}^{T}\left(\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité},k}\right)\right)\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}-\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité},k}\right) \end{array}\right\}=0$$

$$f_{s}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}\right)\approx\left\{\begin{array}{c} f_{s}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité},k}\right) \\ +{}^{T}\left(\frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité},k}\right)\right)\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}}-\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}-\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k}\right) \\ +{}^{T}\left(\frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité},k}\right)\right)\left(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}+\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}-\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité},k}\right) \end{array}\right\}=0$$

Avec pour commencer la boucle itérative : $\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},0},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité},0}\right)=\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}\right)$

La correction en chargement et l'évolution de l'écrouissage peut être reliée aux incréments de déplacement plastique $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}$ par les relations suivantes :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{O},tan}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}+\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}\right)\quad\text{et}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}=\mathrm{I}_{\mathrm{CP}}^{\mathrm{O}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}\quad\text{et}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl}=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}$$

On fait l'hypothèse que l'écoulement plastique est normal à la surface de plasticité, ainsi, on relie l'incrément plastique aux variables d'écoulement plastique $\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}$ et $d\lambda_{sl}^{k}$ :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}=\frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité},k}\right)\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}\quad\text{et}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}=\frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité},k},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité},k}\right)\mathrm{d}\lambda_{sl}^{k}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On obtient ainsi le système :

$$\begin{pmatrix} m_{CP,CP} & m_{s,CP} \\ m_{s,CP} & m_{s,s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\lambda_{CP}^{k} \\ \mathrm{d}\lambda_{sl}^{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{f_{CP}^{k}} \\ \widetilde{f_{s}^{k}} \end{pmatrix} \text{ ou } \boldsymbol{M} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} = \widetilde{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{k}}$$

Avec :

- $m_{CP,CP} = \left( {}^{T}\left( \frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{O,tan}} - {}^{T}\left( \frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}} \right) \times \left( \frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right)$
- $m_{s,s} = \left( {}^{T}\left( \frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{O,tan}} - {}^{T}\left( \frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}} \right) \times \left( \frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right)$
- $m_{s,CP} = {}^{T}\left( \frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{O,tan}} \left( \frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right)$
- $\widetilde{f_{CP}^{k}} = f_{CP}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) + {}^{T}\left( \frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}} - \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) + {}^{T}\left( \frac{\partial f_{CP}}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \left( \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}} - \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right)$
- $\widetilde{f_{s}^{k}} = f_{s}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) + {}^{T}\left( \frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{F}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}} - \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) + {}^{T}\left( \frac{\partial f_{s}}{\partial \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right) \right) \left( \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}} - \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k}} \right)$

L'inversion de ce système permet d'obtenir les multiplicateurs plastiques $\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k}$ et $\mathrm{d}\lambda_{sl}^{k}$. On en déduit $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{k}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{k}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}$ et $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}$, on réévalue les critères de rupture :

- Si $\left| f_{CP}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}} - \mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}} + \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP} \right) \right| \leq \text{error}$ et $\left| f_{s}\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}} - \mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}} + \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl} \right) \right| \leq \text{error}$
  alors on a atteint la convergence de la correction, on vérifie alors que $\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k} > 0$ et $\mathrm{d}\lambda_{sl}^{k} > 0$, sinon :
  - Si $\mathrm{d}\lambda_{CP}^{k} < 0$, alors cela signifie qu'on n'atteint pas la rupture par capacité portante et on effectue le calcul comme un unique critère de glissement (cf. §1.2) ;
  - Si $\mathrm{d}\lambda_{sl}^{k} < 0$, alors cela signifie qu'on n'atteint pas la rupture par glissement et on effectue le calcul comme un unique critère de capacité portante (cf. §1.3) ;
- sinon on refait tourner la boucle avec :
  $\left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{ité,k+1}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,k+1}}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,k+1}} \right) = \left( \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{élas}} - \mathrm{d}\boldsymbol{F}^{cor}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}} + \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{CP}, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}} + \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{sl} \right)$

Après convergence de la boucle à l'itération « m », on met à jour les paramètres de plasticité liés à la capacité portante et au glissement :

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{ité,m+1}}, \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{sl}}^{\boldsymbol{O}} + \mathrm{d}\boldsymbol{U}_{sl}^{m}, v_{x,s}^{pl,F} = v_{x,s}^{pl,O} + \left| \mathrm{d}U_{x,s}^{pl,m+1} \right|, v_{y,s}^{pl,F} = v_{y,s}^{pl,O} + \left| \mathrm{d}U_{y,s}^{pl,m+1} \right|$$
$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{ité,m+1}}, \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{CP}}^{\boldsymbol{O}} + \mathrm{d}\boldsymbol{U}_{CP}^{m}, v_{z,CP}^{pl,F} = v_{z,CP}^{pl,O} + \left| \mathrm{d}U_{z,CP}^{pl,m+1} \right|$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On récupère aussi la force à la fin du pas de temps :

$$F^F = F^{ité,m+1}$$

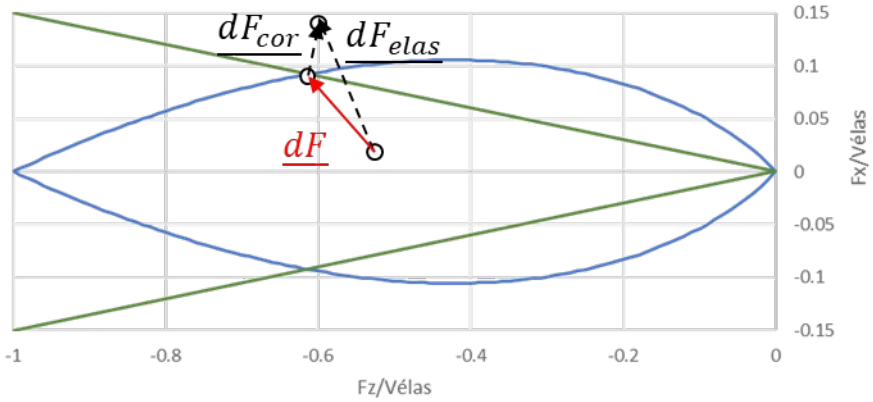



**Figure 2.1-4: Illustration du retour sur les deux critères**

### 2.1.4.5 Paramètres de convergence

Les paramètres de convergence de la boucle itérative utilisée aux [§2.1.4.2], [§2.1.4.3] et [§2.1.4.4] peuvent être renseignés par l'utilisateur via les mots clés ITER_INTE_MAXI et RESI_INTE_RELA associés au mot-cl facteur COMPORTEMENT :

- Le critère de convergence de la boucle est associé à la tolérance de convergence RESI_INTE_RELA et la limite d'élasticité de la loi de comportement $V_{lim}$, tel que

$$\text{error} = V_{lim} \times \text{RESI_INTE_RELA}$$

- Le nombre d'itérations de cette boucle ne peut dépasser ITER_INTE_MAXI (qui doit être supérieur à 0). Si le nombre d'itérations est dépassé, l'algorithme du comportement renvoie une erreur et une subdivision du pas de temps est appliquée si cette option est activée (via DEFI_LIST_INST). Il est d'ailleurs fortement recommandée d'activer la division automatique du pas de temps afin de s'assurer de la convergence du calcul.
- On vérifie par ailleurs dans le calcul que la valeur de l'écrouissage isotrope est exacte à savoir à l'itération k que :

$$R^k = \left(V_{ult} - V_{lim}\right)\left(\frac{v_{z,CP}^{pl,k}}{v_{z,CP}^{pl,k} + v_{r,CP}^{pl}}\right)$$

Sinon on effectue une itération supplémentaire en remplaçant dans $\boldsymbol{I}_{CP}^{O}$, le terme $\frac{\partial R}{\partial U_{z,CP}^{pl}}$ par :

$$\frac{\Delta R}{\Delta U_{z,CP}^{pl}} = \frac{\left(V_{ult} - V_{lim}\right)\left(\frac{v_{z,CP}^{pl,k}}{v_{z,CP}^{pl,k} + v_{r,CP}^{pl}}\right) - R^O}{U_{z,CP}^{pl,k} - U_{z,CP}^{pl,O}}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

### 2.1.4.6 Gestion des points d'inflexion

Le critère de capacité portante, présente deux points d'inflexion et le critère de glissement présente un point d'inflexion. Au niveau de ces points d'inflexion, les méthodes de résolution des paragraphes précédents ne sont pas suffisantes, il faut alors séparer le critère en plusieurs sous-critères afin de pouvoir converger sur les points d'inflexion comme le montre la figure ci-dessous :

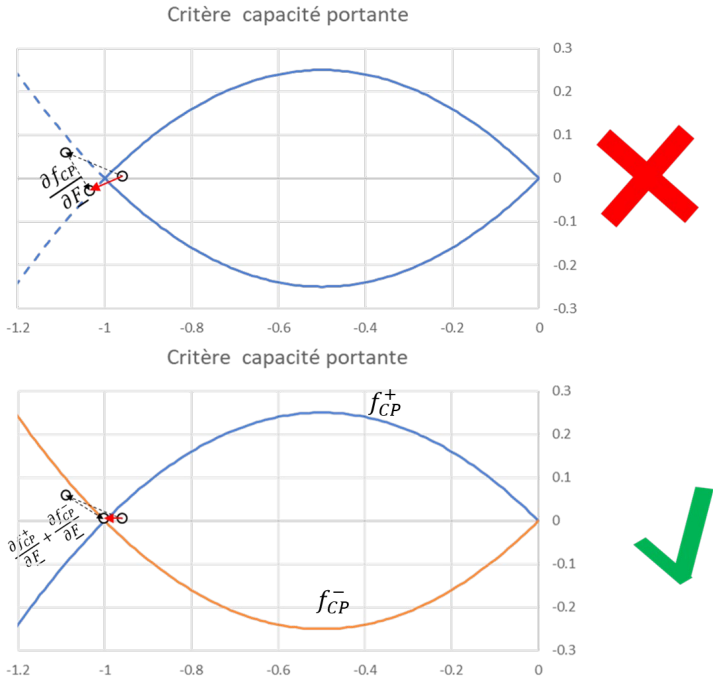



**Figure 2.1-5 : Illustration de la décomposition en deux sous-critères au niveau des points d'inflexion**

Ainsi, pour gérer le critère de capacité portante, il convient de considérer 4 sous-critères :

- Le critère normal :

$$f_{CP}^{+++} = -F_z - \overline{V}\left(1+\frac{\sqrt{\overline{F_x}^2+\overline{F_y}^2}}{F_z}\right)^3\left(1+\delta\left(\overline{M_x^O}\right)\frac{2\,\overline{M_x}}{L_y F_z}\right)\left(1+\delta\left(\overline{M_y^O}\right)\frac{2\,\overline{M_y}}{L_x F_z}\right)$$

Avec : $\overline{F_x}=F_x-R_{h,x}$, $\overline{F_y}=F_y-R_{h,y}$, $\overline{M_x}=M_x-R_{m,x}$, $\overline{M_y}=M_y-R_{m,y}$,

$$\delta\left(\overline{M_x^O}\right)=\begin{cases}+1 \text{ si } \overline{M_x^O}=M_x^O-R_{r,x}^O>0 \text{ au début du pas de temps}\\ -1 \text{ si } \overline{M_x^O}=M_x^O-R_{r,x}^O<0 \text{ au début du pas de temps}\end{cases}$$

$$\delta\left(\overline{M_y^O}\right)=\begin{cases}+1 \text{ si } \overline{M_y^O}=M_y^O-R_{r,y}^O>0 \text{ au début du pas de temps}\\ -1 \text{ si } \overline{M_y^O}=M_y^O-R_{r,y}^O<0 \text{ au début du pas de temps}\end{cases}$$

- Le critère avec inversion de la force horizontale :

$$f_{CP}^{H-} = -F_z - \overline{V}\left(1-\frac{\sqrt{\overline{F_x}^2+\overline{F_y}^2}}{F_z}\right)^3\left(1+\delta\left(\overline{M_x^O}\right)\frac{2\,\overline{M_x}}{L_y F_z}\right)\left(1+\delta\left(\overline{M_y^O}\right)\frac{2\,\overline{M_y}}{L_x F_z}\right)$$

- Le critère avec inversion du moment selon x :

$$f_{CP}^{Mx-} = -F_z - \overline{V}\left(1+\frac{\sqrt{\overline{F_x}^2+\overline{F_y}^2}}{F_z}\right)^3\left(1-\delta\left(\overline{M_x^O}\right)\frac{2\,\overline{M_x}}{L_y F_z}\right)\left(1+\delta\left(\overline{M_y^O}\right)\frac{2\,\overline{M_y}}{L_x F_z}\right)$$

- Le critère avec inversion du moment selon y :


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f_{CP}^{My-}=-F_z-\overline{V}\left(1+\frac{\sqrt{\overline{F_x}^2+\overline{F_y}^2}}{F_z}\right)^3\left(1+\delta\left(\overline{M_x^O}\right)\frac{2\overline{M_x}}{L_yF_z}\right)\left(1-\delta\left(\overline{M_y^O}\right)\frac{2\overline{M_y}}{L_xF_z}\right)$$

Pour gérer le critère de glissement, il convient de considérer 2 sous-critères :

- Le critère normal :

$$f_s^+=\sqrt{\left(F_x-q_{h_x}\right)^2+\left(F_y-q_{h_y}\right)^2}+F_z\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}A'$$

- Le critère avec inversion de la force horizontale :

$$f_s^-=-\sqrt{\left(F_x-q_{h_x}\right)^2+\left(F_y-q_{h_y}\right)^2}+F_z\tan\left(\phi_{inter}\right)-c_{inter}A'$$

Le système est alors résolu comme un multicritère de la même façon qu'au §2.1.4.4.

### 2.1.4.7 Gestion de la convergence à l'origine

L'écriture du critère de capacité portante et la résolution de l'écoulement plastique associé indiqué au §1.3 n'est possible que si :

- $\sqrt{\left(F_x^{élas}-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y^{élas}-R_{h,y}\right)^2}\leq -F_z^{élas}$
- $2\left(M_x^{élas}-R_{m,x}\right)\leq -L_yF_z^{élas}$
- $2\left(M_y^{élas}-R_{m,y}\right)\leq -L_xF_z^{élas}$

Dans le cas contraire, le tir élastique a dépassé la limite de définition du critère de rupture et on a divergence de l'algorithme de résolution comme illustré sur la figure ci-dessous :

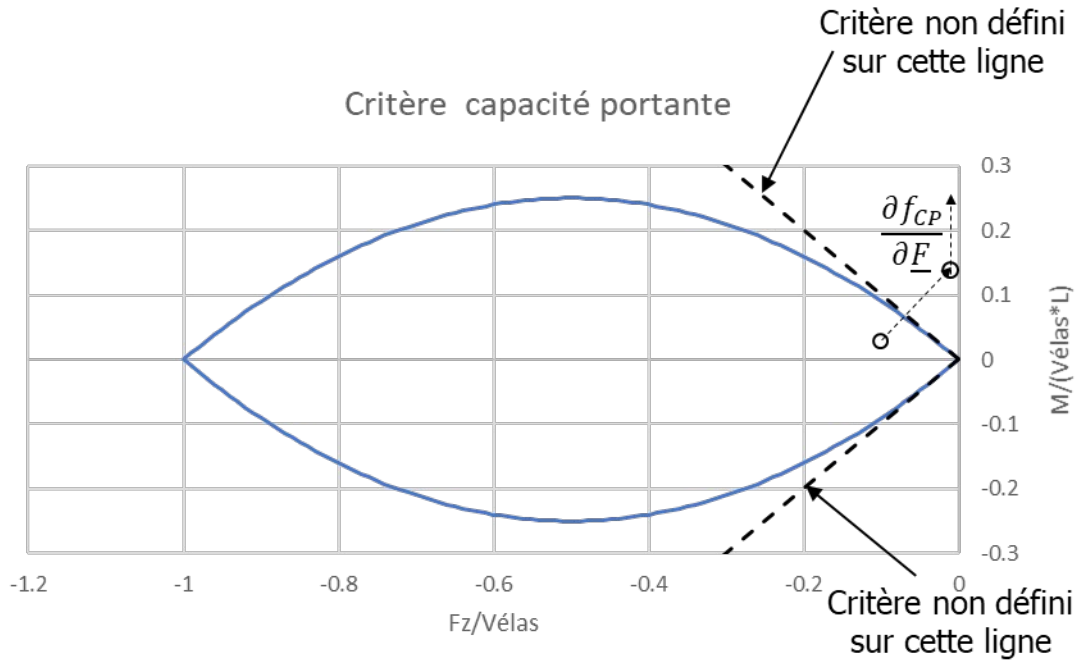



**Figure 2.1-6 : Illustration de la décomposition en deux sous-critères au niveau des points d'inflexion**

Pour éviter cette divergence, il suffirait de diminuer le pas de temps pour éviter que le tir élastique ne soit trop éloigné du critère et pour assurer la convergence de l'algorithme, ce qui est fait dans le code. Cependant au niveau de l'origine $F_z=0$, la frontière entre le critère et la zone limite de convergence est très/trop faible et il faudrait un pas de temps tendant vers 0 pour assurer la convergence. Pour résoudre le problème, le critère est linéarisé à partir de $-F_z^{élas}<l_{in}\left(V_{lim}+R^O\right)$ :

- Dans le cas d'un chargement principalement en rotation $l_{in}=0{,}1$ ;
- Dans le cas d'un chargement principalement horizontal $l_{in}=0{,}01$ ;



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le critère de capacité portante est alors transformé en 3 critères linéarisés :

- Selon la force horizontale :

$$f_{CP,lin}^{H}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\left(M_x-R_{m,x}\right)}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)\left(1-\frac{2\left(M_y-R_{m,y}\right)}{l_{in}L_x\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}F_z+\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}$$

- Selon le moment en x :

$$f_{CP,lin}^{Mx}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)^3\left(1-\frac{2\left(M_y-R_{m,y}\right)}{l_{in}L_x\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)L_yF_z+2\left|M_x-R_{m,x}\right|$$

- Selon le moment en y :

$$f_{CP,lin}^{My}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)^3\left(1-\frac{2\left(M_x-R_{m,x}\right)}{l_{in}L_x\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)L_xF_z+2\left|M_y-R_{m,y}\right|$$

Afin de gérer le point d'inflexion en $F_z=0$ , ces sous-critères sont eux-mêmes subdivisés en deux :

- Pour le critère linéarisé selon la force horizontale :

$$f_{CP,lin}^{H+}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\left(M_x-R_{m,x}\right)}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)\left(1-\frac{2\left(M_y-R_{m,y}\right)}{l_{in}L_x\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}F_z+\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}$$

et $$f_{CP,lin}^{H-}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\left(M_x-R_{m,x}\right)}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)\left(1-\frac{2\left(M_y-R_{m,y}\right)}{l_{in}L_x\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)^{\frac{1}{3}}F_z-\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}$$

- Pour le critère linéarisé selon le moment en x :

$$f_{CP,lin}^{Mx+}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)^3\left(1-\frac{2\left(M_y-R_{m,y}\right)}{l_{in}L_x\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)L_yF_z+2\delta\left(\overline{M_x^O}\right)\left(M_x-R_{m,x}\right)$$

et $$f_{CP,lin}^{Mx-}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)^3\left(1-\frac{2\left(M_y-R_{m,y}\right)}{l_{in}L_x\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)L_yF_z-2\delta\left(\overline{M_x^O}\right)\left(M_x-R_{m,x}\right)$$

$$\delta\left(\overline{M_x^O}\right)=\begin{cases}+1 \text{ si } \overline{M_x^O}=M_x^O-R_{r,x}^O>0 \text{ au début du pas de temps}\\ -1 \text{ si } \overline{M_x^O}=M_x^O-R_{r,x}^O<0 \text{ au début du pas de temps}\end{cases}$$

- Pour le critère linéarisé selon le moment en y :

$$f_{CP,lin}^{My+}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)^3\left(1-\frac{2\left(M_x-R_{m,x}\right)}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)L_xF_z+2\delta\left(\overline{M_y^O}\right)\left(M_y-R_{m,y}\right)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

et $f_{CP,lin}^{My-}=\left(1-\frac{l_{in}}{\left(1-\frac{2\sqrt{\left(F_x-R_{h,x}\right)^2+\left(F_y-R_{h,y}\right)^2}}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)^3\left(1-\frac{2\left(M_x-R_{m,x}\right)}{l_{in}L_y\left(V_{lim}+R\right)}\right)}\right)L_xF_z-2\delta\left(\overline{M_y^O}\right)\left(M_y-R_{m,y}\right)$

$$\delta\left(\overline{M_y^O}\right)=\begin{cases}+1 \text{ si } \overline{M_y^O}=M_y^O-R_{r,y}^O>0 \text{ au début du pas de temps}\\ -1 \text{ si } \overline{M_y^O}=M_y^O-R_{r,y}^O<0 \text{ au début du pas de temps}\end{cases}$$

Le système est alors résolu comme un multicritère de la même façon qu'au §2.1.4.4.

## 2.2 Détermination de la matrice tangente

### 2.2.1 Données d'entrées

En plus des paramètres de la loi de comportement, on dispose en entrée des variables obtenues à la fin ou au début du pas de temps (on n'utilisera donc pas la notation F ou O) dont le calcul est présenté au §2.1 :

- la force globale : $\boldsymbol{F}={}^T\left(F_x,F_y,F_z,M_x,M_y,M_z\right)$
- des variables d'écrouissage en glissement : $\boldsymbol{Q_{sl}}={}^T\left(q_{h_x},q_{h_y}\right)$
- du déplacement plastique en glissement : $\boldsymbol{U_{sl}}={}^T\left(U_{x,s}^{pl},U_{y,s}^{pl},U_{z,s}^{pl},\theta_{x,s}^{pl},\theta_{y,s}^{pl}\right)$
- des variables d'écrouissage en capacité portante : $\boldsymbol{Q_{CP}}={}^T\left(R_{h,x},R_{h,y},R\ ,R_{m,x},\ R_{m,y}\right)$
- du déplacement plastique en capacité portante : $\boldsymbol{U_{CP}}={}^T\left(U_{x,CP}^{pl},U_{y,CP}^{pl},U_{z,CP}^{pl},\theta_{x,CP}^{pl},\theta_{y,CP}^{pl}\right)$
- des variables internes en glissement et en capacité portante : $v_{x,s}^{pl}$ , $v_{y,s}^{pl}$ et $v_{z,CP}^{pl}$
- Ainsi que toutes leurs ~~différencielles~~ différentielles associées $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{Q_{sl}}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{Q_{CP}}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{U_{sl}}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{U_{CP}}$
- la variable interne $d^{état}$ qui indique quels critères ont été atteints pendant le calcul de l'incrément de chargement, qui permet d'avoir tous les critères atteints prenant en compte la gestion de la convergence à l'origine (§2.1.4.7) et les sous critères pour la gestion des points d'inflexions (§2.1.4.6).

### 2.2.2 Constitution de la matrice tangente

#### 2.2.2.1 Si $d^{état}=1$

Alors aucun mécanisme de plasticité n'est atteint ce qui correspond au §2.1.4.1, la fondation est dans le domaine élastique. A partir de la force globale $\boldsymbol{F}$ , les raideurs élastique tangente en rotation selon x $K_{rx,rx}^{tan}$ et y $K_{ry,ry}^{tan}$ sont calculées avec la formulation vue au [§1.4] ainsi on obtient la matrice de raideur élastique tangente qui est dans le cas de $d^{état}=0$ la matrice tangente :

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K_{élas}^{tan}}=\begin{pmatrix}K_{xx}^{ini} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_{yy}^{ini} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & K_{zz}^{ini} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & K_{rx,rx}^{tan} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{ry,ry}^{tan} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{rz,rz}^{ini}\end{pmatrix}$$


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

#### 2.2.2.2 Si $d^{état} \neq 1$

La lecture de $d^{état}$ permet de savoir quels critères de rupture ont été atteints lors de la phase de chargement précédente. On note ici, qu'il y a eu $n_s$ sous-critères de rupture par glissement atteints (en prenant en compte l'éventuel point d'inflexion présenté au §2.1.4.6) noté $f_s^{i\in[1,n_s]}$ (avec $\lambda_s^i$ le multiplicateur plastique associé) et $n_{CP}$ sous-critères de rupture par capacité portante atteints (en prenant en compte les points d'inflexion présenté au §2.1.4.6 ainsi que la gestion de la convergence à l'origine présenté au §2.1.4.7) noté $f_{CP}^{j\in[1,n_{CP}]}$ (avec $\lambda_{CP}^j$ le multiplicateur plastique associé).

Pour chaque sous-critère, on a :

$$f_s^i=0,\ \mathrm{d}f_s^i={}^T\left(\frac{\partial f_s^i}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{F}+{}^T\left(\frac{\partial f_s^i}{\partial \boldsymbol{Q_{sl}}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{Q_{sl}}=0 \text{ et } f_{CP}^j=0,\ \mathrm{d}f_{CP}^j={}^T\left(\frac{\partial f_{CP}^j}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{F}+{}^T\left(\frac{\partial f_{CP}^j}{\partial \boldsymbol{Q_{CP}}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{Q_{CP}}=0$$

En posant les relations suivantes :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{élas}}=\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{U}-\mathrm{d}\boldsymbol{U}_s-\mathrm{d}\boldsymbol{U_{CP}}\right),\ \mathrm{d}\boldsymbol{Q_{sl}}=\boldsymbol{H_{sl}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{sl}},\ \mathrm{d}\boldsymbol{Q_{CP}}=\boldsymbol{I_{CP}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{U_{CP}}$$

On note les écoulements plastiques :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{U_{sl}}=\sum_{i=1}^{i=n_s}\frac{\partial f_s^i}{\partial \boldsymbol{F}}\mathrm{d}\lambda_{sl}^i \text{ et } \mathrm{d}\boldsymbol{U_{CP}}=\sum_{j=1}^{j=n_{CP}}\frac{\partial f_{CP}^j}{\partial \boldsymbol{F}}\mathrm{d}\lambda_{CP}^j$$

On arrive au système suivant :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,sl}}^{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,CP}}^{\boldsymbol{K}}\\ {}^T\left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,CP}}^{\boldsymbol{K}}\right) & \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{CP,CP}}^{\boldsymbol{K}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{sl}}^{\mathrm{i}\in(1,\mathrm{n_s})}\\ \mathrm{d}\lambda_{CP}^{j\in(1,n_{CP})}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^T\left(\frac{\partial f_s^{i\in(1,n_s)}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\\ {}^T\left(\frac{\partial f_{CP}^{j\in(1,n_{CP})}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\end{pmatrix}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\mathrm{d}\boldsymbol{U} \text{ ou } \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{K}}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}={}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\mathrm{d}\boldsymbol{U}$$

Avec :

- $\left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,sl}}^{\boldsymbol{K}}\right)_{(i,j)\in[1,n_s]^2}={}^T\left(\frac{\partial f_s^i}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial \boldsymbol{F}}\right)-{}^T\left(\frac{\partial f_s^i}{\partial \boldsymbol{Q_{sl}}}\right)\boldsymbol{H_{sl}}\left(\frac{\partial f_s^j}{\partial \boldsymbol{F}}\right)$
- $\left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,CP}}^{\boldsymbol{K}}\right)_{(i,j)\in(1,n_s)\times(1,n_{CP})}={}^T\left(\frac{\partial f_s^i}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\left(\frac{\partial f_{CP}^j}{\partial \boldsymbol{F}}\right)$
- $\left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{CP,CP}}^{\boldsymbol{K}}\right)_{(i,j)\in(1,n_{CP})^2}={}^T\left(\frac{\partial f_{CP}^i}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\left(\frac{\partial f_{CP}^j}{\partial \boldsymbol{F}}\right)-{}^T\left(\frac{\partial f_{CP}^i}{\partial \boldsymbol{Q_{CP}}}\right)\boldsymbol{I_{CP}}\left(\frac{\partial f_{C\,P}^j}{\partial \boldsymbol{F}}\right)$
- Par simplification $\begin{pmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_{sl}^{i\in(1,n_s)}\\ \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_{CP}^{j\in(1,n_{CP})}\end{pmatrix}=\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}$ et $\begin{pmatrix}{}^T\left(\frac{\partial f_s^{i\in(1,n_s)}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\\ {}^T\left(\frac{\partial f_{CP}^{j\in(1,n_{CP})}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\end{pmatrix}={}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)$

Ce système est par la suite inversé :

$$\left(\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{K}}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,sl}}^{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,CP}}^{\boldsymbol{K}}\\ {}^T\left(\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{sl,CP}}^{\boldsymbol{K}}\right) & \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{CP,CP}}^{\boldsymbol{K}}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{sl,sl}}^{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{sl,CP}}^{\boldsymbol{K}}\\ {}^T\left(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{sl,CP}}^{\boldsymbol{K}}\right) & \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{CP,CP}}^{\boldsymbol{K}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{K}}$$

On obtient ainsi l'expression de l'écoulement plastique :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{K}}{}^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{élas}}^{\boldsymbol{tan}}\mathrm{d}\boldsymbol{U}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

En repartant de la relation entre force et déplacement élastique :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}\mathrm{d}\boldsymbol{U}_{élas}=\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{U}-\sum_{i=1}^{i=n_s}\frac{\partial f_s^i}{\partial \boldsymbol{F}}\mathrm{d}\lambda_{sl}^i-\sum_{j=1}^{j=n_{CP}}\frac{\partial f_{CP}^j}{\partial \boldsymbol{F}}\mathrm{d}\lambda_{CP}^j\right)=\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{U}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\right)$$

Ainsi on peut écrire :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\left(\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}-\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{K}^T}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{U}$$

Après inversion de $\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{K}}$, le programme retourne donc la matrice plastique tangente :

$$\boldsymbol{K}^{tan}=\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}-\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{K}^T}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)\boldsymbol{K}_{élas}^{tan}$$

# 3 Récapitulatif des paramètres de la loi de comportement

Les paramètres de la loi de comportement sont entrés comme données sous le mot clé FONDA_SUPERFI de la commande DEFI_MATERIAU [U4.43.01] :

- LONG_X : Correspond à la longueur $L_x$ selon l'axe local x de la fondation (obligatoire) ;
- LONG_Y : Correspond à la longueur $L_y$ selon l'axe local y de la fondation (obligatoire) ;
- PHI : Correspond à l'angle de frottement $\phi_{inter}$ en degré à l'interface sol/fondation (obligatoire) ;
- COHESION : Correspond à la cohésion $c_{inter}$ à l'interface sol/fondation (homogène à une raideur en translation, facultatif) ;
- RAID_GLIS : Correspond à la raideur de l'écrouissage du glissement $H_{sl}$ (facultatif) ;
- GAMMA_REFE : Paramètre $\gamma$ de l'écrouissage cinématique (homogène à l'inverse d'une distance, facultatif) ;
- CP_SERVICE : Correspond à la force limite d'élasticité $V_{lim}$ de la fondation (obligatoire) ;
- CP_ULTIME : Correspond à la force limite ultime $V_{ult}$ de la fondation (facultatif) ;
- DEPL_REFE : Tassement de référence $v_{r,CP}^{pl}$ pour l'écrouissage isotrope du critère de capacité portante (facultatif) ;
- RAID_CP_X : Correspond à la raideur de l'écrouissage cinématique en translation selon x du critère de capacité portante $I_{h,x}$ (homogène à une raideur en translation, facultatif) ;
- GAMMA_CP_X : Paramètre $\gamma_{h,x}$ de l'écrouissage cinématique en translation selon x du critère de capacité portante (homogène à l'inverse d'une distance, facultatif) ;
- RAID_CP_Y, GAMMA_CP_Y : Raideur $I_{h,y}$ et paramètre $\gamma_{h,y}$ de l'écrouissage cinématique en translation selon y (facultatifs) ;
- RAID_CP_RX, GAMMA_CP_RX : Raideur $I_{r,x}$ et paramètre $\gamma_{r,x}$ de l'écrouissage cinématique en rotation selon x (facultatifs) ;
- RAID_CP_RY, GAMMA_CP_RY : Raideur $I_{r,y}$ et paramètre $\gamma_{r,y}$ de l'écrouissage cinématique en rotation selon y (facultatifs) ;
- DECOLLEMENT : Paramètre d'activation du mécanisme de décollement si égal à 'OUI'. (Facultatif et par défaut 'NON')

Excepté DECOLLEMENT, tous les paramètres facultatifs sont par défaut égaux à 0.

Nota : A ces paramètres vient s'ajouter la matrice de rigidité initiale associée à l'élément discret qui doit être définit symétrique diagonale dans le repère local de l'élément discret (K_TR_D_N).



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Récapitulatif des variables internes de la loi de comportement

La loi de comportement comporte 21 variables internes par point de calcul :

- V1 à V5 : Le déplacement plastique associé au critère de glissement aussi nommé :
  - DASLX pour la translation selon x $U^{pl}_{x,s}$ ;
  - DASLY pour la translation selon y $U^{pl}_{y,s}$ ;
  - DASLZ pour la translation selon z $U^{pl}_{z,s}$ ;
  - DASLRX pour la rotation selon x $\theta^{pl}_{x,s}$ ;
  - DASLRY pour la rotation selon y $\theta^{pl}_{y,s}$ ;
- V6 à V10 : Le déplacement plastique associé au critère de capacité portante aussi nommé :
  - DACPX pour la translation selon x $U^{pl}_{x,CP}$ ;
  - DACPY pour la translation selon y $U^{pl}_{y,CP}$ ;
  - DACPZ pour la translation selon z $U^{pl}_{z,CP}$ ;
  - DACPRX pour la rotation selon x $\theta^{pl}_{x,CP}$ ;
  - DACPRY pour la rotation selon y $\theta^{pl}_{y,CP}$ ;
- V11 et V12 : L'écrouissage associé au critère de glissement aussi nommé :
  - DAQSLX pour la translation selon x $q_{h_x}$ ;
  - DAQSLY pour la translation selon y $q_{h_y}$ ;
- V13 à V17 : L'écrouissage associé au critère de capacité portante aussi nommé :
  - DAQCPX pour l'écrouissage cinématique de la translation selon x $R_{h,x}$ ;
  - DAQCPY pour l'écrouissage cinématique de la translation selon y $R_{h,y}$ ;
  - DARCP pour l'écrouissage isotrope $R$ ;
  - DAQCPRX pour l'écrouissage cinématique de la rotation selon x $R_{r,x}$ ;
  - DAQCPRY pour l'écrouissage cinématique de la rotation selon y $R_{r,y}$ ;
- V18 : DAUTRE correspondant à l'état de plasticité de l'élément $d_{état}$ (cf. §2.2.1) :
- V19 à V21 : Les variables intermédiaires des écrouissages des critères de rupture aussi nommés :
  - DABSSLX pour l'écrouissage cinématique de la translation selon x $v^{pl}_{x,s}$ ;
  - DABSSLY pour l'écrouissage cinématique de la translation selon y $v^{pl}_{y,s}$ ;
  - DABSCPZ pour les écrouissages du critère de capacité portante $v^{pl}_{z,CP}$ ;



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Références bibliographiques

1. Y. ABBOUD : « Développement d'un macroélément pour l'étude des fondations superficielles sous charge sismique » Thèse de Doctorat, Paris : Université Paris-Est, 2017

# 6 Description des versions du document

| Version code_aster | Auteur(s) Organisme(s) | Description des modifications |
|---|---|---|
| 15.2 | C. BORELY- TERRASOL | Texte initial |
| 15.2 | V. ALVES FERNANDES | Reprise de forme des équations |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)