Lois de comportement d'endommagement ductile plastique et viscoplastique GTN et VISC_GTN

Résumé :

Ce document décrit le modèle d'endommagement ductile de Gurson – Tvergaard – Needleman (GTN). Il est disponible en version locale et à gradient de variables internes (GRAD_VARI ou GRAD_INCO). La modélisation des grandes déformations est accessible via la cinématique GDEF_LOG . Le comportement peut être indépendant du temps (GTN) ou viscoplastique (VISC_ GTN). Dans ce dernier cas, la plasticité évolue selon un modèle de Norton dans lequel intervient la fonction seuil.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Domaine d'application

1.1 Finalité

L'endommagement ductile des matériaux métalliques résulte à gros traits de trois mécanismes : la germination de cavités, leur croissance au sein d'une matrice élastoplastique et leur coalescence. [Gurson, 1977] a proposé un modèle de comportement d'inspiration micromécanique à même de rendre compte de manière simple de la croissance des cavités. Il a été complété de manière phénoménologique d ans [Tvergaard & Needleman, 1984] pour représenter également les étapes de germination et de coalescence : on parle alors du modèle GTN.

L'évolution de la porosité (volume des cavités rapporté au volume total) se traduit par un adoucissement du matériau, c'est-à-dire une baisse de la capacité à résister aux contraintes. Cela se traduit souvent par une localisation des déformations et de la porosité dans des bandes de faible épaisseur. Les forts gradients qui en résultent requièrent alors une extension de la loi de comportement pour prendre en compte des interactions à distance : on parle de formulations non locales du comportement. Une telle extension a été proposée pour le modèle GTN [Zhang et al., 2018] qui s'appuie sur le gradient de la variable interne d'écrouissage (GRAD_VARI, GRAD_INCO) selon [Lorentz & Andrieux, 1999]. C'est la formulation introduite dans code_aster.

Ces phénomènes se déroulent en général à des niveaux de déformation qui requièrent une cinématique non linéaire. Ici, elle s'appuie sur la déformation logarithmique (GDEF_LOG). Par ailleurs, à ces niveaux de déformation, la plasticité induit dans un premier temps un comportement quasi-incompressible. Pour s'affranchir des problèmes de verrouillage numérique qui peuvent en résulter, on recommande l'emploi d'une formulation mixte (GRAD_INCO), éventuellement complétée par un terme de pénalisation. Le modèle est toutefois disponible également en petites déformations (PETIT) ainsi qu'en l'absence d'une formulation mixte (GRAD_VARI), voire même en formulation locale du comportement (éléments finis standard).

Les effets de vitesse du chargement peuvent être pris en compte à travers une formulation viscoplastique sur la base d'une loi de Norton (VISC_GTN) ou bien ignorés (GTN). Ajoutons que la régularisation visqueuse [R5.03.34] est également recommandée pour stabiliser le comportement des points totalement cassés et donc sans résistance à la contrainte.

Enfin, p récisons que la partie élastique du modèle est exprimée de manière explicite, c'est-à-dire que la contrainte s'exprime comme une fonction de la déformation et de la déformation plastique à l'état courant. Il n'y a donc pas d'évolution incrémentale de la contrainte ; elle ne contribue pas à définir l'état mécanique du système, c'en est une conséquence.

Remarque : pour un point cassé en régime viscoplastique, la contrainte ne s'annule pas instantanément mais elle ne dépend plus de la déformation, comme on le verra plus loin. Dans ce cas très particulier, l'évolution de la contrainte est purement incrémentale, ce qui justifie que la contrainte apparaisse (informatiquement) parmi les variables internes. En revanche, il n'est pas utile de la renseigner dans l'état initial donné dans STAT_NON_LINE/ETAT_INIT par SIGM ; cette valeur est ignorée.

1.2 Paramètres matériaux

L'expression modulaire de la relation de comportement permet de regrouper les différents paramètres du modèle par catégories:

- la partie élastique est isotrope et dépend du module de Young E et du coefficient de Poisson ν définis sous le mot-clé facteur ELAS (E, NU) de la commande DEFI_MATERIAU ;
- les paramètres de l'écrouissage isotrope sont définis sous le mot-clé facteur ECRO_NL (R0, RH, R1, GAMMA_1, R2, GAMMA_2, RK, P0, GAMMA_K). A noter qu'il n'est pas possible de définir un plateau de Lüders, contrairement au modèle VMIS_ISOT_NL ;

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- les paramètres d'endommagement du modèle sont rassemblés sous le mot-clé facteur GTN
  - Croissance de cavités : PORO_INIT, Q1 et Q2
  - Germination avec distribution de Gauss : NUCL_GAUSS_PORO f_N , NUCL_GAUSS_PLAS κ_N , NUCL_GAUSS_DEV s_N
  - Germination avec distribution uniforme sur un intervalle : NUCL_CRAN_PORO c_0 , NUCL_CRAN_INIT κ_i , NUCL_CRAN_FIN κ_f
  - Germination proportionnelle à la déformation plastique cumulée à partir d'un seuil : NUCL_EPSI_INIT E_c^p , NUCL_EPSI_PENTE b_0
  - Coalescence : COAL_PORO f_c , COAL _ ACCE δ_c et porosité à rupture PORO_RUPT f_F . L' utilisateur définit soit δ_c , soit f_F , les deux grandeurs étant liées par :

$$f_F=\left(1-\frac{1}{\delta}\right)f_c+\frac{1}{\delta}\frac{1}{q_1} \quad (1)$$

  - Régularisation numérique du modèle : ENDO_CRIT_VISC désigne le seuil d'endommagement d_v au-delà duquel on active un couplage entre viscoplasticité et endommagement ; ENDO_CRIT_RUPT désigne l'endommagement d_f à partir duquel on considère qu'un point est cassé.
- les paramètres de la loi de viscosité de Norton, lorsqu'elle est présente, sont définis sous le mot-clé facteur NORTON (coefficient K et exposant N)
- en formulation non locale [R5.04.01], il faut également définir les paramètres correspondants sous le mot-clé facteur NON_LOCAL (C_GRAD_VARI , PENA_LAGR et PENA_LAGR_ INCO).

Les paramètres peuvent dépendre de la température (mots-clés facteur *_FO). La loi de comportement est exprimée en déformations mécaniques, c'est-à-dire qu'elle est compatible avec les termes de retrait usuels, notamment la déformation thermique.

1.3 Variables internes

La loi de comportement s'appuie sur 25 variables internes, dont certains ne sont là qu'à titre de post-traitement. Elles sont regroupées dans le tableau suivant :

EPSEQ	V1	Variable d'écrouissage κ
POROSITE	V2	Porosité
INDIPLAS	V3 (post)	État du pas de temps courant (0, 1, 2 ou 3)
EPSPXX - EPSPYZ	V4 - V9	Composantes de la déformation plastique
EPCUM	V10	Déformation plastique cumulée E_{eq}^p
PORO_NUC	V11	Porosité liée à la germination f^{nu}
ENDO	V12	Endommagement d
VIT_ENDO	V13	Vitesse d'endommagement $\dot{d}$
SIXX - SIYZ	V14-V19	Contrainte (utilisée pour les points cassés)
ENDO_EX	V20 (post)	Endommagement extrapolé d_{ex}
SIEQ_ERX	V21 (post)	Erreur d'extrapolation en contrainte
SIEQ_ECR	V22 (post)	Part des contraintes liée à l'écrouissage
SIEQ_VSC	V23 (post)	Part des contraintes liée à la viscosité
SIEQ_NLC	V24 (post)	Part des contraintes liée au non local
ARRET	V25 (post)	Variable à disposition de l'utilisateur

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'indicateur de plasticité dépend du régime de comportement pendant le pas de temps courant, avec comme valeurs 0=élastique, 1=plastique à écoulement régulier, 2=plastique à écoulement singulier (régime de pointe du cône) et 3=point cassé ($f=f_F$). Il n'est introduit qu'à des fins de post-traitement.

Notons qu'on parle aussi « d'endommagement ». On verra plus loin comme l'endommagement est lié à la porosité à travers trois contributions : la germination, la croissance et la coalescence de cavités.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Modèle continu

2.1 Équations de comportement : modèle plastique local

On se place en grandes déformations logarithmiques, en notant $\boldsymbol{E}$ la déformation mécanique (logarithmique) et $\boldsymbol{T}$ la contrainte associée (par dualité). Les variables internes du modèle consistent en la déformation plastique $\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}$, la variable d'écrouissage κ , l' endommagement d (qui dépend de la porosité f) et la déformation plastique cumulée (qui gouverne une partie de la porosité de germination).

Tout d'abord, la relation contrainte – déformation s'appuie sur une décomposition additive en une partie plastique et une partie élastique :

$$\boldsymbol{T}=K\,tr(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{Id}+2\mu\,dev(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}) \quad \text{avec } 3K=\frac{E}{1-2\nu} \quad \text{et } 2\mu=\frac{E}{1+\nu} \tag{2}$$

où $tr()$ et $dev()$ désignent respectivement la trace et le déviateur d'un tenseur d'ordre deux.

La fonction seuil de plasticité notée F dépend du niveau d'écrouissage κ à travers la fonction d'écrouissage $R(\kappa)$, d'une mesure (isotrope) de l'intensité des contraintes notée T_* qui dépend aussi de l'endommagement et de la déformation à travers le Jacobien de la transformation $J=\exp(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E})$. Elle s'écrit comme suit :

$$F(\boldsymbol{T},\kappa\ ;\ d\ ,\boldsymbol{E})=\frac{T_*(\boldsymbol{T},d)}{J(\boldsymbol{E})}-R(\kappa) \tag{3}$$

La fonction d'écrouissage est identique à celle déployée dans la loi VMIS_ISOT_NL [R5.03.33], soit :

$$R(\kappa)=R_0+R_H\kappa+R_1(1-e^{-\gamma_1\kappa})+R_2(1-e^{-\gamma_2\kappa})+R_K(p_0+\kappa)^{\gamma_K} \tag{4}$$

Elle dépend au plus de neuf paramètres dont certains peuvent rester nuls si on ne souhaite pas activer tous les termes de l'expression (choix par défaut).

Remarque: on rappelle qu'il n'est pas possible d'introduire un plateau de Lüders contrairement à la loi VMIS_ISOT_NL .

La définition de la contrainte de Gurson T_* est implicite. À contrainte $\boldsymbol{T}$ et endommagement d donnés, T_* est la solution de l'équation suivante :

$$G(\boldsymbol{T},T_*,d)=0 \quad ; \quad G(\boldsymbol{T},T_*,f)\equiv\left(\frac{T_{eq}}{T_*}\right)^2+2d\,\mathrm{chm}\left(\frac{3}{2}q_2\frac{T_H}{T_*}\right)-(1-d)^2 \quad ; \quad \mathrm{chm}(x)\equiv\mathrm{ch}(x)-1 \tag{5}$$

où q_1 et q_2 sont deux paramètres matériau et où on a introduit les invariants de la contrainte :

$$T_H=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) \quad \text{et } T_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\mathrm{dev}(\boldsymbol{T}):\mathrm{dev}(\boldsymbol{T})} \tag{6}$$

L'évolution de la déformation plastique est gouvernée par l'équation d'écoulement. Lorsque la fonction seuil est dérivable par rapport à $\boldsymbol{T}$, c'est-à-dire quand $\boldsymbol{T}\neq 0$, la direction d'écoulement est normale à la surface seuil :

$$\text{si} \quad \boldsymbol{T}\neq 0 \quad \dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}}=\dot{\kappa}\,\boldsymbol{N} \quad ; \quad \boldsymbol{N}=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{T}}=-\frac{1}{J}\left(\frac{\partial G}{\partial T_*}\right)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{T}}\right) \tag{7}$$

Dans le cas singulier où $\boldsymbol{T}=0$, la dérivée est généralisée via des notions d'analyse convexe (sous-gradient). La direction d'écoulement n'est alors assujettie qu'à la condition suivante :

$$\text{si} \quad \boldsymbol{T}=0 \quad \Pi_N(\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}},d)\leq\frac{\dot{\kappa}}{J} \tag{8}$$

La fonction d'appui Π_N a l'expression suivante, avec des notations similaires à (6) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\Pi_N(\dot{\boldsymbol{E}}^p, d) = \frac{2}{q_2}\operatorname{arcosh}\left(1+C^*\right)\left|\dot{E}^p_H\right| + \frac{2}{3}(1-d)\sqrt{1-\gamma C^*}\,\dot{E}^p_{eq} \tag{9}$$

$$C^* = -\chi + \sqrt{\chi^2 + \frac{2}{\gamma}(\chi-1)} \quad ; \quad \chi = \frac{(q_2\dot{E}^p_{eq})^2 + \frac{(3\dot{E}^p_H)^2}{d}}{(q_2\dot{E}^p_{eq})^2} \quad ; \quad \gamma = \frac{2d}{(1-d)^2} \tag{10}$$

L 'évolution de la variable d'écrouissage est fixée par la condition de cohérence :

$$\dot{\kappa} \geq 0 \quad ; \quad F(\boldsymbol{T}, \kappa) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\kappa} F(\boldsymbol{T}, \kappa) = 0 \tag{11}$$

Il reste enfin à définir l'évolution de l'endommagement. Le modèle est spécifique à EDF ; il coïncide avec le modèle de GTN classique en charge mais il précise également ce qui se passe en décharge. Plus exactement, l'endommagement est défini comme suit :

$$d = q_1 f + d^{co} \quad ; \quad f = f^{nu} + f^{gr} \tag{12}$$

Où f est la porosité, somme de la porosité de germination (nucleation en anglais) f^{nu} et de la porosité de croissance (growth) f^{gr}, et d^{co} est l'endommagement de coalescence. A l'état initial (naturel), on a :

$$f^{nu}(0) = 0 \quad ; \quad f^{gr}(0) = f_0 \quad ; \quad d^{co}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = f_0 \tag{13}$$

Avec f_0 la porosité initiale.

La porosité de croissance découle de la conservation du volume plastique :

$$\dot{f}^{gr} = (1-f)\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{E}}^p \quad ; \quad f^{gr} \geq f_0 \tag{14}$$

Elle ne peut descendre en-dessous de f_0 mais elle est réversible (on peut refermer les cavités).

Pour ce qui concerne la porosité de germination, d eux familles de modèles sont implantées :

$$f^{nu} = f^{nu}_{(1)} + f^{nu}_{(2)} \tag{15}$$

La première famille adopte une évolution de la porosité liée à celle de la variable d'écrouissage :

$$\dot{f}^{nu}_{(1)} = B_n(\kappa)\dot{\kappa} \quad \Rightarrow \quad f^{nu}_{(1)}(\kappa) = \int_0^{\kappa} B_n(s)\,ds \tag{16}$$

Pour recouvrir deux modèles utilisés dans la littérature, on choisit la fonction B_n suivante :

$$B_n(\kappa) = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa-\kappa_N}{s_N}\right)^2\right] + \frac{c_0}{\kappa_f-\kappa_i}\chi_{[\kappa_i\,;\,\kappa_f]} \tag{17}$$

où χ_I vaut 1 dans l'intervalle I et 0 à l'extérieur. Compte tenu des primitives de ces deux termes, on en déduit :

$$f^{nu}_{(1)} = \frac{f_N}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\kappa-\kappa_N}{\sqrt{2}s_N}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\kappa_N}{\sqrt{2}s_N}\right)\right] \quad + \quad c_0\,\min\left(\frac{\langle\kappa-\kappa_i\rangle}{\kappa_f-\kappa_i}, 1\right) \tag{18}$$

où les crochets de McCauley $\langle x\rangle$ désignent la partie positive de x.

La seconde famille de modèles de germination dépend de la déformation plastique cumulée qui est définie comme suit :

$$\dot{E}^p_{eq} \equiv \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{E}}^p : \dot{\boldsymbol{E}}^p} \tag{19}$$

La fonction de germination implantée est proportionnelle à E^p_{eq} à partir d'un seuil :

$$f^{nu}_{(2)}(E^p_{eq}) = b_0\langle E^p_{eq} - E^p_c\rangle \tag{20}$$

Comme la variable d'écrouissage κ et la déformation plastique cumulée E^p_{eq} sont croissantes par définition, il en va de même de la porosité de germination ; son évolution est irréversible.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il reste à définir l'évolution de l'endommagement de coalescence. Pour cela, on introduit la définition (usuelle pour GTN) de la porosité en régime de coalescence f^* ,où f_c désigne le seuil de porosité à coalescence et f_F la porosité à rupture :

$$f^*=\begin{cases} f & \text{si } f<f_c \\ f_c+\delta(f-f_c) & \text{si } f\geq f_c \end{cases} \tag{21}$$

L'endommagement de coalescence obéit alors à la loi d'évolution suivante :

$$d^{co}(t)=\max_{\tau\leq t}[q_1 f^*(\tau)-q_1 f(\tau)] \tag{22}$$

Il est lui aussi croissant par définition, donc irréversible.

Pour des raisons numériques, on introduit également un seuil d'endommagement à rupture d_f au-delà duquel on considère que le point est cassé, c'est-à-dire $\boldsymbol{T}=0$ (il y a donc un saut de contrainte qui peut perturber la résolution des équations d'équilibre mais facilite l'intégration du comportement). Une fois qu'un point est cassé, il le reste définitivement. Ce mécanisme n'est pas activé par défaut ($d_f=1$).

2.2 Prise en compte de la viscosité

En présence de viscosité, l'écoulement plastique est différé. Plus exactement, la vitesse d'évolution de l'écrouissage n'est plus fixée par la condition de cohérence (11) mais elle est dorénavant fonction de l'intensité de la fonction seuil suivant la loi de Norton :

$$\dot{\kappa}=\left(\frac{\langle F(\boldsymbol{T},\kappa)\rangle}{\widetilde{K}}\right)^n \tag{23}$$

Les autres équations du modèle restent inchangées. Lorsque $\widetilde{K}\to 0$, on retrouve le modèle élastoplastique.

E n général, le paramètre $\widetilde{K}$ coïncide avec le paramètre K du modèle de Norton. Toutefois, lorsque l'endommagement d s'approche de 1, l'écart entre T_* et $\boldsymbol{T}$ s'accroît (puisque $\boldsymbol{T}$ tend vers zéro) et la viscoplasticité peut devenir trop brutale pour conserver un rôle efficace, notamment en présence d'erreurs numériques d'intégration. C'est pourquoi on propose une modification de la loi de Norton usuelle en couplant la viscoplasticité avec l'endommagement, au-delà d'un seuil d_v :

$$\begin{aligned} &\text{si } d\leq d_v && \widetilde{K}=K \\ &\text{si } d\geq d_v && \widetilde{K}=K\frac{1-d_v}{1-d} \end{aligned} \tag{24}$$

Enfin, la viscoplasticité permet d'accommoder des sauts de contraintes potentiels en les lissant dans le temps. Il est important de préserver ce mécanisme y compris pour les points cassés. Dans ce cas, l'annulation des contraintes (point cassé) est différée dans le temps, de manière similaire à un mécanisme de relaxation, à condition d'avoir choisi $d_v<1$. Plus précisément, en régime viscoplastique de point cassé, l a plasticité et les contraintes obéissent à la loi d'évolution suivante :

$$\dot{\kappa}=0 \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{p}}=0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\text{si } \|\boldsymbol{T}\|\geq K(1-d_v) && \frac{\dot{\boldsymbol{T}}}{E}=-\left[\frac{\|\boldsymbol{T}\|}{K(1-d_v)}\right]^n\frac{\boldsymbol{T}}{\|\boldsymbol{T}\|} \\ &\text{si } \|\boldsymbol{T}\|\leq K(1-d_v) && \frac{\dot{\boldsymbol{T}}}{E}=-\frac{\boldsymbol{T}}{K(1-d_v)} \end{aligned} \tag{26}$$

Le passage à un exposant égal à 1 lorsque $\|\boldsymbol{T}\|\leq K(1-d_v)$ évite de trop différer l'effacement de la contrainte.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Prise en compte du gradient d'écrouissage

Une formulation non locale à gradient de variable interne est adaptée lorsque le gradient d'écrouissage $\nabla\kappa$ devient important. Elle consiste à introduire un terme supplémentaire Φ^{grad} dans l'énergie libre qui reflète les interactions entre points matériels voisins, voir [R5.04.01] :

$$\Phi^{grad}(\nabla\kappa)=\frac{1}{2}c(\nabla\kappa)^2 \tag{27}$$

En utilisant la formulation relaxée augmentée présentée dans [R5.04.01], l'impact sur la relation de comportement se traduit par une modification de la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage donc, en pratique, par une modification de la fonction d'écrouissage :

$$\widetilde{R}(\kappa)=R(\kappa)+r\kappa-\varphi \quad ; \quad \varphi=\lambda+ra \tag{28}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange associé à la relaxation, $r>0$ le coefficient d'augmentation et a l'interprétation de la variable d'écrouissage à l'échelle de la structure. Ces trois quantités sont des données pour ce qui concerne la relation de comportement. Au final, la fonction d'écrouissage est corrigée d'un terme affine, ce qui ne rajoute donc pas de complexité par rapport au traitement numérique du modèle. En revanche, le signe et l'amplitude de φ n'étant pas fixés, cela explique qu'il faille prendre en compte le cas d'un écoulement singulier pour lequel $T_*=0$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Intégration numérique

Pour ce qui concerne l'intégration de la loi de comportement, c'est-à-dire le calcul des variables internes et des contraintes à histoire de déformation (mécanique) donnée, il n'y a plus lieu de distinguer s'il s'agit d'une formulation locale ou à gradient. En effet, l'impact de cette dernière se limite à modifier la fonction d'écrouissage selon (28). On continuera ici à la noter $R(\kappa)$ sans distinction.

En revanche, on distinguera les cas plastique et viscoplastique, même si on peut montrer que ce dernier se limite également à une correction de la fonction seuil dans les équations discrétisées.

3.1 Équations discrétisées dans le cas sans viscosité

La discrétisation en temps des équations de comportement s'appuie sur un schéma étagé : à e ndommagement fixé, on applique un schéma d'Euler implicite (même en viscoplasticité) pour calculer les variables plastiques (déformation plastique, variable d'écrouissage) ainsi que la contrainte, c'est-à-dire que les différentes variables du problème sont exprimées à l'instant final du pas de temps considéré. Puis on évalue l'évolution des différentes contributions à l'endommagement en connaissant l'évolution des variables plastiques. On renvoie à [Zhang et al., 2018] pour plus d'informations sur la discrétisation temporelle et la résolution du système algébrique correspondant.

On note Q_n la valeur d'une quantité Q au début du pas de temps, ΔQ son incrément pendant le pas de temps et (simplement) Q sa valeur en fin de pas de temps. L'état mécanique au début du pas de temps $(\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{E^p}_n, \kappa_n, f^{nu}_n, f^{gr}_n, d^{co}_n, d_n)$ est supposé connu ainsi que l'incrément de déformation $\boldsymbol{\Delta E}$ (et donc également la déformation $\boldsymbol{E}$). Il s'agit alors de calculer les incréments de variables internes ainsi que la contrainte à la fin du pas de temps $\boldsymbol{T}$.

Concernant la valeur de l' endommagement choisie pour intégrer la plasticité, [Zhang et al., 2018] proposaient d'adopter celle en début de pas de temps , soit $d_{ex}=d_n$. Pour des questions de précision d'intégration (et donc de taille de pas de temps), on enrichit ce schéma en extrapolant l'endommagement en cours de pas de temps en s'appuyant sur sa vitesse d'évolution au pas précédent. Plus précisément, on définit :

$$\dot{d}_n=\frac{d_n-d_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \quad ; \quad d_{ex}=d_n+\theta(t-t_n)\dot{d}_n \tag{29}$$

où la valeur de θ est fixée par l'utilisateur sous le mot-clé COMPORTEMENT / PARM_THETA ; on recommande la valeur $\theta=1/2$.

Connaissant maintenant la valeur d'endommagement extrapolée, on peut procéder à l'intégration implicite de la plasticité. Si $d_{ex}\geq d_f$, on bascule simplement en régime de point cassé et $\boldsymbol{T}=0$. Dans le cas contraire, la discrétisation de la relation contrainte – déformation (2) s'écrit comme suit :

$$\boldsymbol{T}=K\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E^p}_n-\boldsymbol{\Delta E^p}\right)\boldsymbol{Id}+2\mu\,\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E^p}_n-\boldsymbol{\Delta E^p}\right) \tag{30}$$

On choisit de faire apparaître une contrainte élastique (ou contrainte d'essai élastique), notée $\boldsymbol{T^e}$ et qui est connue :

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T^e}-K\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Delta E^p}\right)-2\mu\,\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\Delta E^p}\right) \quad ; \quad \boldsymbol{T^e}=K\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E^p}_n\right)\boldsymbol{Id}+2\mu\,\mathrm{dev}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E^p}_n\right) \tag{31}$$

La discrétisation de la fonction seuil s'écrit simplement :

$$F(\boldsymbol{T},\kappa)=\frac{T_*}{J}-R(\kappa) \tag{32}$$

Et la condition de cohérence vaut :

$$\Delta\kappa\geq 0 \quad ; \quad F(\boldsymbol{T},\kappa)\leq 0 \quad ; \quad \Delta\kappa\,F(\boldsymbol{T},\kappa)=0 \tag{33}$$

En particulier, en charge plastique, $F=0$, si bien qu'on peut en déduire la contrainte équivalente de GTN en fonction du niveau d'écrouissage :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$T_* = \hat{T}(\kappa) \equiv J R(\kappa) \tag{34}$$

Dans le cas d'un écoulement régulier, la discrétisation temporelle de (7) s'écrit :

$$\mathrm{tr}(\Delta \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}) = 3\frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_H}{T_*}, \frac{T_{eq}}{T_*}\right)\Lambda\left(\frac{T_H}{T_*}\right) \tag{35}$$

$$\mathrm{dev}(\Delta \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}) = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_H}{T_*}, \frac{T_{eq}}{T_*}\right)\frac{\mathrm{dev}(\boldsymbol{T})}{T_*} \tag{36}$$

On y a introduit les fonctions suivantes :

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2} q_2 d_{ex} \sinh\left(\frac{3}{2} q_2 x\right) \quad ; \quad \Theta(x, y) = \left[y^2 + 3 x \Lambda(x)\right]^{-1} \tag{37}$$

Par substitution de (35) et (36) dans (31), on en déduit :

$$\frac{T_H^e - T_H}{3K} = \frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_H}{T_*}, \frac{T_{eq}}{T_*}\right)\Lambda\left(\frac{T_H}{T_*}\right) \tag{38}$$

$$\mathrm{dev}(\boldsymbol{T}) = \left[1 + 3\mu\frac{\lambda}{J}\Theta\left(\frac{T_H}{T_*}, \frac{T_{eq}}{T_*}\right)\frac{1}{T_*}\right]^{-1} \mathrm{dev}(\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}) \tag{39}$$

Cette dernière expression indique que $\boldsymbol{T}$ a la même direction et le même sens que $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}$. En outre, en substituant Θ par son expression issue de (38), on obtient la valeur de T_{eq} en fonction de T_H et T_* :

$$T_{eq} = T_{eq}^e \left[1 + \frac{\mu}{K}\frac{T_H^e - T_H}{T_* \Lambda\left(\frac{T_H}{T_*}\right)}\right]^{-1} \equiv \hat{T}_{eq}(T_H, T_*) \tag{40}$$

Compte tenu de la définition de la contrainte équivalente de GTN (5), on peut exprimer un lien implicite entre T_H et T_* en y substituant (40) :

$$\hat{G}(T_H, T_*) \equiv \left[\frac{\hat{T}_{eq}(T_H, T_*)}{T_*}\right]^2 + 2 d_{ex} \cosh\left[\frac{3}{2} q_2 \frac{T_H}{T_*}\right] - 1 - d_{ex}^2 = 0 \tag{41}$$

Le multiplicateur plastique, égal à $\Delta\kappa$, se déduit de (38) :

$$\Delta\kappa = \hat{\lambda}(T_H, T_*) \equiv J \frac{T_H^e - T_H}{3K\Lambda\left(\frac{T_H}{T_*}\right)} \frac{1}{\Theta\left(\frac{T_H}{T_*}, \frac{\hat{T}_{eq}(T_H, T_*)}{T_*}\right)} \tag{42}$$

Lorsque l'écoulement est singulier, $T_* = 0$ donc $\boldsymbol{T} = 0$, ce qui permet de calculer $\Delta \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}$ via (31). Il reste alors à vérifier que l'écoulement appartient bien au cône prescrit par (8) soit, après discrétisation :

$$\Pi_N(\Delta \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}, d_{ex}) \leq \frac{\Delta\kappa}{J} \tag{43}$$

Connaissant l'évolution de la plasticité $\Delta \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}$ et $\Delta\kappa$, on peut maintenant procéder à l'intégration de la porosité. L a porosité de germination f^{nu} est simplement calculé e via les fonctions (18) et (20) ; la déformation plastique cumulée est évaluée c omme suit :

$$\Delta E_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\Delta \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}} : \Delta \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}} \tag{44}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Concernant la porosité de croissance, o n applique un thêta-schéma, avec la même valeur de θ que pendant la phase de prédiction. La discrétisation correspondante s'écrit :

$$\Delta f - \Delta f^{nu} = (1-\theta f - (1-\theta) f_n)\ \mathrm{tr}(\Delta \boldsymbol{E}_p) \tag{45}$$

On en déduit :

$$\left[1+\mathrm{tr}\,\Delta \boldsymbol{E}^p\right] f^{gr} = f_n^{gr} + (1-\theta f^{nu} - (1-\theta) f_n)\,\mathrm{tr}\,\Delta \boldsymbol{E}^p \tag{46}$$

Enfin, l'endommagement de coalescence est simplement défini via :

$$d^{co} = \max\left(d_n^{co}, q_1(f^* - f)\right) \tag{47}$$

3.2 Résolution du problème discrétisé sans viscosité

Remarque préliminaire : les équations sont résolues à une certaine précision près. Si on note ϵ la précision fournie par l'utilisateur via le mot-clé RESI_INTE_RELA, on peut introduire les précisions suivantes, respectivement en termes de contrainte, de déformation et sans unité pour l'équation (41) :

$$\epsilon_\sigma = R(0)\epsilon \quad ; \quad \epsilon_\kappa = \frac{1}{10}\frac{R(0)}{E}\epsilon \quad ; \quad \epsilon_G = (1-d_{ex})\epsilon \tag{48}$$

S i $1-d_{ex} < \epsilon^{1/2}$, on considère que le point est cassé : $\boldsymbol{T}=0$, $\Delta\kappa = 0$, $f = f_F$ (même si $d_{ex} < d_f$, car à la précision numérique demandée, la solution « point cassé » est effectivement acceptable). Dans le cas contraire, il faut résoudre le problème discrétisé.

Ce dernier admet une solution unique. On commence par déterminer le régime duquel elle relève : réponse élastique, réponse plastique à écoulement singulier ou réponse plastique à écoulement régulier. La solution est élastique si :

$$T_*^e < \hat{T}(\kappa_n) \tag{49}$$

Dans ce cas, $\Delta\kappa = 0$, $\boldsymbol{\Delta E^p} = 0$ et $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T^e}$.

Si la solution n'est pas élastique, on examine le cas d'un écoulement plastique singulier. Dans ce cas, $T_* = 0$, $\boldsymbol{T} = 0$, $\Delta \boldsymbol{E}^p$ est obtenu via (31) et on note Π_N^s la valeur correspondante de Π_N selon (9). On calcule également κ^z tel que (résolution par une méthode de Newton) :

$$\hat{T}(\kappa^z) = 0 \tag{50}$$

L'écoulement est singulier s i $\kappa^z \geq \kappa_n$ et si $J\ \Pi_N^s \leq \Delta\kappa^z$ d'après (43) ; on a alors $\kappa = \kappa^z$.

Enfin, dans le cas contraire, l'écoulement plastique est régulier et on a en particulier $0 < T_* < T_*^e$. On peut remarquer qu'à T_* donnée, l'équation (41) permet de remonter à la valeur de T_H . En notant $T_H = p\ T_H^e$, la fonction $\hat{g}: p \to \hat{G}(T_H, T_*)$ est croissante et la solution vérifie l'encadrement $0 \leq p \leq 1$. Pour faciliter la résolution, on peut calculer une borne minimale $p_{min} > 0$ en majorant la fonction $\hat{g}$. En notant $r \equiv T_H / T_*$ et $\alpha \equiv \mu / K$, on a :

$$\hat{g}(p) = \left(\frac{T_{eq}^e}{T_*}\right)^2 \left(\frac{\Lambda(r)}{\alpha \dfrac{T_H^e}{T_*} + \Lambda(r) - \alpha\, r}\right)^2 + d_{ex}\ 2\,\mathrm{chm}\left(\frac{3}{2} q_2 r\right) - (1-d_{ex})^2 \tag{51}$$

On peut minorer analytiquement le dénominateur du second facteur et on le note D_{min} . Comme en outre $\mathrm{chm}(x) \leq \mathrm{sh}(x)$, il vient :

$$\hat{g}(p) \leq \left(\frac{T_{eq}^e}{T_*}\right)^2 \left(\frac{\Lambda(r)}{D_{min}}\right)^2 + d_{ex}\ 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{3}{2} q_2 r\right) - (1-d_{ex})^2 \tag{52}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La racine du membre de droite peut être obtenue analytiquement et permet de remonter à la borne p_{min} . Une résolution de l'équation $\hat{g}(p)=0$ par une méthode de Newton dans l'intervalle $p_{min}\leq p\leq 1$ permet de trouver la solution $p(T_*)$. On en contrôle la précision via la condition de convergence $|\hat{g}|\leq\epsilon_G$.

On peut ainsi ramener le problème incrémental à la seule inconnue $\Delta\kappa$. En effet, à κ donné, on peut calculer $T_*=\hat{T}(\kappa)$. De là, on en déduit $p(T_*)$ par résolution de l'équation précédente. Connaissant p donc T_H , on peut calculer $\lambda=\hat{\lambda}(T_H,T_*)$ via (42), ce qui ramène le problème à la résolution de l'équation scalaire $\Delta\kappa=\lambda$.

Grâce aux propriétés de convexité de la contrainte équivalente T_* par rapport à $\boldsymbol{T}$, l'analyse du schéma de « return mapping » utilisé montre qu'à λ croissant de 0 à $J\,\Pi_N^s$, T_* est décroissante de T_*^e à 0. La résolution du problème revient donc à trouver l'intersection de la courbe croissante $\Delta\kappa\rightarrow T_*$ avec la courbe décroissante $T_*\rightarrow\lambda$. Une borne minimale sur $\Delta\kappa$ est fournie par le maximum de 0 et de $\Delta\kappa_z$, car T_* solution doit être positive et $\Delta\kappa$ aussi. Une borne maximale est fournie par l e minimum de $J\,\Pi_N^s$ et de $\Delta\kappa^e$ tel que $\hat{T}(\kappa^e)=T_*^e$ (s'il existe), car T_* solution doit être positive et inférieure à T_*^e .

L'équation est résolue par une méthode de Newton entre ces deux bornes. On contrôle la précision de la solution en considérant que l'algorithme a convergé dès que l'une des conditions $|\Delta\kappa-\lambda|\leq\epsilon_\kappa$ ou $\left|\hat{T}(\Delta\kappa)-\hat{T}(\lambda)\right|\leq\epsilon_\sigma$ est atteinte. On choisit d'initialiser la méthode de Newton par la solution $\Delta\kappa_{VM}$ du problème équivalent de von Mises (i.e. en fixant $T_H=0$) lorsqu'elle respecte les bornes ou sinon par une méthode de corde vis-à-vis des valeurs aux bornes.

On remonte enfin à la contrainte via la relation suivante :

$$\boldsymbol{T}=T_H\,\mathbf{Id}+T_{eq}\frac{\mathbf{dev}\ \boldsymbol{T}^e}{T_{eq}^e} \tag{53}$$

3.3 Résolution du problème discrétisé dans le cas viscoplastique

En présence de viscosité, la condition de cohérence (11) est remplacée par la loi d'évolution de Norton (23). Une fois discrétisée, cette dernière s'écrit :

$$\frac{\Delta\kappa}{\Delta t}=\left(\frac{\langle F(\boldsymbol{T},\kappa)\rangle}{\widetilde{K}}\right)^n \tag{54}$$

Et en inversant cette relation :

$$C_{\Delta t}\Delta\kappa^q=\langle F(\boldsymbol{T},\kappa)\rangle\quad;\quad C_{\Delta t}=\frac{\widetilde{K}}{\Delta t^{1/n}}\quad;\quad q=\frac{1}{n} \tag{55}$$

Comme $n>1$, $0<q<1$.

Elle peut encore s'exprimer de manière équivalente sous la forme d'une relation de Kuhn et Tucker :

$$\Delta\kappa\geq 0\quad;\quad F_v(\boldsymbol{T},\kappa)\leq 0\quad;\quad F_v(\boldsymbol{T},\kappa)\Delta\kappa=0 \tag{56}$$

$$\text{où}\quad F_v(\boldsymbol{T},\kappa)=F(\boldsymbol{T},\kappa)-C_{\Delta t}\Delta\kappa^q=\frac{T_*}{J}-R_v(\kappa)\quad;\quad R_v(\kappa)=R(\kappa)+C_{\Delta t}(\kappa-\kappa_n)^q \tag{57}$$

Après discrétisation, la prise en compte de la viscosité se réduit à l'ajout d'un terme (positif et croissant) dans la fonction d'écrouissage.

On pourrait être tenté d'appliquer la même méthode de résolution que précédemment mais, malheureusement, ce nouveau terme n'est pas dérivable en $\Delta\kappa=0$ (pente infinie) . C'est pourquoi on propose de distinguer deux régimes, l'un à forte pente, l'autre à pente faible. La pente « frontière » est fournie forfaitairement par $R'(0)$. Plus précisément, on note $V(\Delta\kappa)=C_{\Delta t}\Delta\kappa^q$ le terme visqueux. La valeur $\Delta\kappa_v$ frontière correspond à :

$$V'(\Delta\kappa_v)=R'(0) \tag{58}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Si $\Delta\kappa<\Delta\kappa_v$, on se situe dans le régime à pente forte, i.e. dominé par la viscosité. A l'inverse, si $\Delta\kappa>\Delta\kappa_v$, on est dans le régime à pente faible, dominé par la plasticité. Compte tenue de la monotonie de l'équation scalaire $\Delta\kappa-\hat{\lambda}=0$ à résoudre par rapport à $\Delta\kappa$, on peut déterminer dès le départ le régime de la solution et réduire le cas échéant l'intervalle de recherche.

Dans le régime dominé par la plasticité, on résout l'équation en $\Delta\kappa$ comme au paragraphe précédent ; le terme visqueux ne présente pas de difficultés numériques particulières.

Au contraire, dans le régime dominé par la viscosité, une méthode de Newton portant sur $\Delta\kappa$ n'est pas efficace (pentes trop fortes donc convergence très lente). On procède alors au changement de variable $v=V(\Delta\kappa)$ (qui élimine les fortes pentes au voisinage de 0) et on applique la méthode de Newton par rapport à v. Les critères de convergence restent inchangés.

3.4 Matrice tangente

Dans le cas local, il s'agit de déterminer le tenseur d'ordre 4 $\boldsymbol{H_{TE}}=\boldsymbol{\delta T}/\boldsymbol{\delta E}$. Dans le cas non local, il faut également construire les tenseurs d'ordre 2 $\boldsymbol{H_{T\varphi}}=\boldsymbol{\delta T}/\delta\varphi$ et $\boldsymbol{H_{\kappa E}}=\delta\kappa/\boldsymbol{\delta E}$ ainsi que le scalaire $H_{\kappa\varphi}=\delta\kappa/\delta\varphi$.

L'opérateur tangent dépend du régime d'écoulement. Dans le cas élastique, il se réduit à :

$$\boldsymbol{\delta T}=K\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\delta E})\,\boldsymbol{Id}+2\mu\,dev(\boldsymbol{\delta E})\quad;\quad\delta\kappa=0 \tag{59}$$

Dans le cas du régime singulier, l'expression est là aussi très simple :

$$\boldsymbol{\delta T}=0\quad;\quad\delta\kappa=-\left(\frac{\partial\hat{T}}{\partial\kappa}\right)^{-1}\left[\frac{\partial\hat{T}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\frac{\partial\hat{T}}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial\boldsymbol{E}}\boldsymbol{\delta E}\right] \tag{60}$$

où la fonction $\hat{T}$ contient le cas échéant les termes liés au non local et à la viscosité.

Le régime d'écoulement régulier conduit à un opérateur tangent plus complexe. On se contente ici de décrire les grandes lignes de la méthode pour le calculer. Ce régime est caractérisé par la résolution du système d'équation $\hat{G}(T_H,T_*;T_H^e,T_{eq}^e,J)=0$ et $\Delta\kappa-\hat{\lambda}(T_H,T_*;T_H^e,T_{eq}^e,J)=0$ avec la relation $T_*=\hat{T}(\Delta\kappa;J,\varphi)$. La dérivée des fonctions implicites permet d'exprimer les variations des inconnues δT_H et $\delta\kappa$ en fonction des variations des données d'entrée du système (système linéaire 2x2 à résoudre). De là, on peut remonter à la variation de la contrainte en différentiant (53).

Enfin, il reste à lier les variations des données d'entrée à celles de la déformation $\boldsymbol{E}$ et de φ. La seule difficulté (minime) vient de la contrainte de von Mises. Pour cela, on rappelle la relation suivante :

$$\delta T_{eq}^e=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{dev}\,\boldsymbol{T^e}}{T_{eq}^e} \tag{61}$$

Remarque : la phase de prédiction n'appelle pas de commentaires particuliers si ce n'est qu'au voisinage (à une précision ϵ_σ) de la contrainte de transition entre régime élastique et régime plastique, on opte systématiquement pour l'opérateur tangent du régime plastique (car on se situe a priori en continuité d'un pas de temps plastique).

3.5 Variables calculées en post-traitement

Quatre des variables internes calculées en post-traitement nécessitent encore d'être définies à ce stade :

- La part des contraintes liée à l'écrouissage :

$$\mathrm{SIEQ_ECR}\;=\;J(1-d_{ex})R(\kappa) \tag{62}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

- La part des contraintes liée à la viscosité :

$$\text{SIEQ_VSC} = J(1-d_{ex})C_{\Delta t}\Delta\kappa^{q} \tag{63}$$

- La part des contraintes liée au non local :

$$\text{SIEQ_NLC} = J(1-d_{ex})(r\kappa-\varphi) \tag{64}$$

- L'erreur d'extrapolation exprimée en contraintes :

$$\text{SIEQ_ERX} = \left(1-\frac{T^{*}(\boldsymbol{T},d_{ex})}{T^{*}(\boldsymbol{T},d)}\right)\|\boldsymbol{T}\| \tag{65}$$

4 Bibliographie

- Gurson A. L. (1977) Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. eng. Mater. Technol. 99, 2-15.
- Lorentz E., Andrieux S. (1999) A variational formulation for nonlocal damage models. Int. J. Plas. 15, 119-138.
- Tvergaard V., Needleman A. (1984) Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. Acta Metall. 32, 157-169.
- Zhang Y., Lorentz E., Besson J. (2018) Ductile damage modelling with locking-free regularised GTN model. Int. J. Numer. Methods Eng. 113, 1871-1903.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)