Relation de comportement élastique non linéaire en grands déplacements

Résumé :

On se propose de décrire ici une relation de comportement élastique non linéaire qui coïncide avec la loi élastoplastique de Hencky-Von Mises (écrouissage isotrope) dans le cas d'un chargement qui induit une évolution radiale et monotone des contraintes en tout point de la structure. Ce modèle est choisi dans la commande STAT_NON_LINE par l'intermédiaire du mot-clé RELATION='ELAS_VMIS_LINE' ou 'ELAS_VMIS_TRAC' sous le mot-clé facteur COMPORTEMENT.

On étend ensuite cette relation de comportement à des grands déplacements et des grandes rotations, dans la mesure où elle dérive d'un potentiel (loi hyperélastique) ; cette fonctionnalité est choisie par l'intermédiaire du mot-clé DEFORMATION='GROT_GDEP'. Elle est disponible pour tous les éléments isoparamétriques 2D et 3D.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des Matières

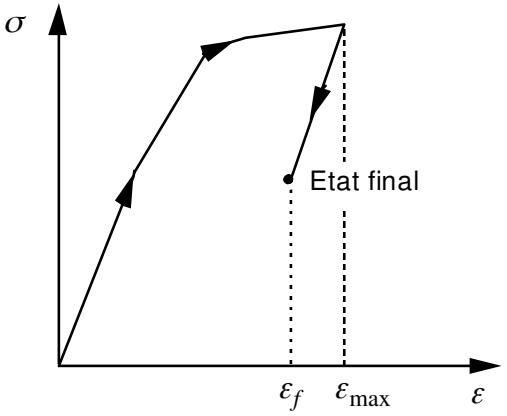
1 Relation de comportement élastique non linéaire : ELAS_VMIS_LINE et ELAS_VMIS_TRAC.....3
1.1 Objectif.....3
1.2 Relation de comportement.....3
1.3 Résolution de l'équation en.....4
1.4 Calcul de la relation de comportement et rigidité tangente.....5
1.5 Prise en compte de déformations d'origine thermique.....5
1.6 Traitement particulier des contraintes planes.....6
2 Élasticité en grandes transformations.....7
2.1 Objectif.....7
2.2 Travail virtuel des efforts extérieurs : hypothèse des charges mortes.....7
2.3 Travail virtuel des efforts intérieurs.....8
2.4 Formulation variationnelle.....8
3 Bibliographie.....8
4 Description des versions du document.....8

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

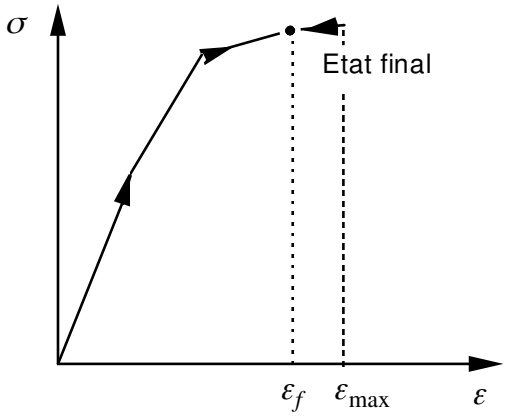
1 Relation de comportement élastique non linéaire : ELAS_VMIS_LINE et ELAS_VMIS_TRAC

1.1 Objectif

Dans le cadre de l'approche globale en mécanique de la rupture, on ne sait donner un sens au taux de restitution d'énergie que pour des relations de comportement hyperélastiques, c'est-à-dire qui dérivent d'un potentiel, l'énergie libre. Afin de pouvoir néanmoins traiter des problèmes élasto-plastiques, on propose une relation de comportement élastique non linéaire qui conduit à des résultats identiques à ceux obtenus par la relation de comportement plastique de Hencky-Von Mises (écrouissage isotrope) dans le cas d'une évolution de chargement radiale et monotone en tout point. La définition des caractéristiques du matériau (mot-clé DEFI_MATERIAU) est identique à celle du comportement plastique isotrope. Pour de plus amples informations sur le modèle, on pourra se reporter à [bib1]. Pour illustrer les points communs et les différences entre les modèles plastique et élastique, on présente ci-dessous une courbe de traction puis compression obtenue pour un barreau unidimensionnel.



Elasto-plasticité



Elasticité non linéaire

1.2 Relation de comportement

Après intégration en temps de la relation de comportement de Hencky-Von Mises, formulée en vitesses de déformations et de contraintes dans [R5.03.02] dont on adopte les notations, l'expression des contraintes en fonction des déformations est :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = K(\mathrm{tr}\,\varepsilon)\mathbf{Id} + G(\varepsilon_{eq})\tilde{\varepsilon} & \text{éq } 1.2-1 \\ -\text{si} \quad \varepsilon_{eq} \le \dfrac{\sigma^y}{2\mu} & \\ \qquad G = 2\mu \quad \text{et} \quad p = 0 & \\ -\text{si} \quad \varepsilon_{eq} > \dfrac{\sigma^y}{2\mu} & \\ \qquad G = \dfrac{R(p)}{\varepsilon_{eq}} \quad \text{et } p \text{ tel que :} \quad p + \dfrac{R(p)}{3\mu} = \dfrac{2\varepsilon_{eq}}{3} & \text{éq } 1.2-2 \end{cases}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

De manière similaire à la plasticité, la fonction d'écrouissage $R(p)$ est déduite des données fournies par un essai de traction simple (écrouissage linéaire avec le mot-clé ELAS_VMIS_LINE ou bien défini par des points avec le mot-clé ELAS_VMIS_TRAC, cf. [R5.03.02]).

Quant à la variable p , elle mérite quelques instants d'attention. Dans le modèle plastique, sa signification est claire. Il s'agit de la déformation plastique cumulée, toujours croissante ; c'est une variable interne du modèle. Par contre, dans le cas élastique, elle n'a plus le statut de variable interne, puisqu'il n'y a pas de dissipation. En outre, elle décroît lors de décharges. En fait, sa valeur coïncide avec celle obtenue en plasticité tant que l'évolution du chargement est radiale et monotone.

Outre la relation de comportement proprement dite, il est nécessaire de connaître la valeur de l'énergie libre pour un état donné pour les calculs de taux de restitution d'énergie. Sans démonstration, ce potentiel dont dérive la relation de comportement vaut :

- Si $\varepsilon_{eq} \leq \frac{\sigma^y}{2\mu}$ $\quad \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2} K (\mathrm{tr}\,\varepsilon)^2 + \frac{2\mu}{3} \varepsilon_{eq^2}$
- Si $\varepsilon_{eq} > \frac{\sigma^y}{2\mu}$ $\quad \psi(\varepsilon) = \frac{1}{2} K (\mathrm{tr}\,\varepsilon)^2 + \frac{R\left(p(\varepsilon_{eq})\right)^2}{6\mu} + \int_0^{p(e_{eq})} R(s)\,ds$

éq 1.2-3

1.3 Résolution de l'équation en p

On a pu constater dans le paragraphe précédent que l'expression des contraintes nécessite la résolution d'une équation portant sur la variable p . Dans la mesure où la fonction d'écrouissage R est croissante, cette équation peut s'écrire en rassemblant les termes où apparaissent p dans le premier membre (qui est alors croissant avec p) :

Plus précisément, le premier membre est linéaire par morceaux en p . Pour résoudre l'équation, il suffit alors de parcourir séquentiellement chacun des intervalles jusqu'à trouver celui dans lequel se situe la solution. Une équation affine fournit alors la valeur de p .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.4 Calcul de la relation de comportement et rigidité tangente

Le calcul des contraintes et de la rigidité tangente, c'est-à-dire la variation des contraintes par rapport aux déformations, est effectué suivant l'algorithme présenté ci-dessous. En adoptant la convention de *Code_Aster*, les contraintes et les déformations sont rangées dans un vecteur à six composantes, tandis que la rigidité tangente est une matrice 6×6 .

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{zz}\\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{xy}\\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{xz}\\ \sqrt{2}\,\varepsilon_{yz}\end{Bmatrix}\quad\{\boldsymbol{\sigma}\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sqrt{2}\,\sigma_{xy}\\ \sqrt{2}\,\sigma_{xz}\\ \sqrt{2}\,\sigma_{yz}\end{Bmatrix}\quad\{\mathbf{1}\}=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Relation de comportement :

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}=K\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\{\mathbf{1}\}+G\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$$

Rigidité tangente :

$$\frac{d\{\boldsymbol{\sigma}\}}{d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}}=\mathbf{K}=[\mathbf{K_1}]+[\mathbf{K_2}]$$

- $[\mathbf{K_1}]=\dfrac{3\mathrm{K}-G}{3}\{\mathbf{1}\}\otimes\{\mathbf{1}\}+G[\mathbf{Id}]$
- $[\mathbf{K_2}]=\begin{cases}[\mathbf{0}] & \text{si}\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}\leq\dfrac{\sigma^{y}}{2\mu}\\ \dfrac{3}{2\varepsilon_{eq}^{2}}\left[\dfrac{2\mu R'(p)}{R'(p)+3\mu}-G\right]\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}\otimes\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\} & \text{si}\quad \varepsilon_{eq}>\dfrac{\sigma^{y}}{2\mu}\end{cases}$

1.5 Prise en compte de déformations d'origine thermique

De manière identique à la plasticité, on scinde la déformation totale en une partie mécanique qui vérifie la relation de comportement précédente [éq 1.2-1], [éq 1.2-2] et une partie thermique, fonction de la température. Notons en outre que les différentes caractéristiques du matériau peuvent aussi dépendre de la température.

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^{m}+\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$$

$$\text{avec}\quad\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}=K\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^{m}\right)\mathbf{Id}+G\left(\varepsilon_{eq}\right)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{th}=\alpha\left(T-T_{réf}\right)\mathbf{Id}\end{cases}\quad \textit{éq 1.5.1}$$

α : coefficient de dilatation thermique
T_{ref} : température de référence

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Il reste à compléter le potentiel énergie libre [éq 1.2-3] pour y inclure la température. Plusieurs choix sont possibles, dépendant de la manière dont on souhaite définir l'entropie (dérivée de l'énergie libre par rapport à la température). Dans notre cas, le potentiel adopté est :

- Si $\varepsilon_{eq} \leq \frac{\sigma^y}{2\mu}$ $\quad \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} K \left(\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}\right)\right)^2 + \frac{2\mu}{3} \varepsilon_{eq}^2$
- Si $\varepsilon_{eq} > \frac{\sigma^y}{2\mu}$ $\quad \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} K \left(\mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}\right)\right)^2 + \frac{R\left(p\left(\varepsilon_{eq}\right)\right)^2}{6\mu} + \int_0^{p\left(\varepsilon_{eq}\right)} R(s) ds$

1.6 Traitement particulier des contraintes planes

Usuellement, on cherche à déterminer les contraintes connaissant les déformations et la température. Cependant, ce n'est plus tout à fait le cas sous l'hypothèse des contraintes planes dans la mesure où trois des composantes du tenseur des déformations sont dorénavant inconnues, les grandeurs duales étant fixées :

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xz}, \ \varepsilon_{yz} \ \text{ et } \ \varepsilon_{zz} && \text{inconnues} \\ &\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} && = 0 \end{aligned}$$

Il faut donc commencer par déterminer ces composantes inconnues. La méthode adoptée est exposée dans [bib1] et [R5.03.02]. On peut cependant rappeler ici que les composantes xz et yz ne posent pas de problème, étant donnée la forme de la relation de comportement [éq 1.2-1] :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

Par contre la détermination de la composante zz nécessite la résolution (numérique) d'une équation scalaire non linéaire.

Enfin, une dernière mise en garde s'impose. À la différence des déformations planes, les solutions que l'on obtient sous l'hypothèse des contraintes planes ne sont généralement pas exactes dans la mesure où elles ne vérifient pas les conditions de compatibilité géométrique (intégrabilité du champ de déformations). Ce ne sont que des solutions approchées.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Élasticité en grandes transformations

2.1 Objectif

Dorénavant, on se propose de prendre en compte de grands déplacements et de grandes rotations, fonctionnalité accessible par le mot-clé DEFORMATION='GROT_GDEP' dans la commande STAT_NON_LINE. Précisons dès maintenant que l'on se restreint à des éléments finis isoparamétriques (D_PLAN, C_PLAN, AXIS et 3D) pour lesquels la discrétisation du problème continu ne pose pas de difficultés particulières, cf. [R3.01.00].

Dans ce but, on admet que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhof, S, dérive du potentiel de Hencky-Von Mises exprimé à l'aide de la déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{S}=\frac{\partial \Psi}{\partial E}\left(\mathbf{E}\right)$$

Rappelons également les définitions de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{S}$. On peut également trouver des informations complémentaires dans [bib1].

$$\mathbf{F}=\mathbf{Id}+\mathbf{Grad}\left(\mathbf{u}\right) \quad \mathbf{E}=\frac{1}{2}\left({}^{T}FF-\mathbf{Id}\right)$$
$$S=\mathrm{Det}\left(\mathbf{F}\right)\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,{}^{T}\mathbf{F}^{-1}$$

Une telle relation de comportement, dite hyperélastique, permet en toute rigueur de prendre en compte de grandes déformations et de grandes rotations. Toutefois, nous nous limitons à de petites déformations, et ce pour deux raisons. Tout d'abord, la relation de comportement adoptée ne présente pas les bonnes propriétés (polyconvexité) pour assurer l'existence de solutions et ne contrôle pas non plus les compressions importantes. Ensuite, le comportement plastique diffère notablement d'un comportement hyperélastique dès que les déformations deviennent appréciables. C'est pour ces raisons que nous avons choisi de conserver l'hypothèse de petites déformations, échappant ainsi à la polémique des grandes déformations.

2.2 Travail virtuel des efforts extérieurs : hypothèse des charges mortes

Pour traiter le problème de calcul de structures hyperélastiques, on cherche à écrire l'équilibre sous forme variationnelle sur la configuration initiale. En particulier, il faut exprimer le travail virtuel des efforts extérieurs sur cette même configuration initiale ce qui nécessite l'hypothèse supplémentaire de charges mortes : on suppose que le chargement ne dépend pas de la transformation géométrique. Typiquement, une force imposée est une charge morte tandis que la pression est un chargement suiveur puisqu'il dépend de l'orientation de la face d'application, donc de la transformation. Sous cette hypothèse, le travail virtuel des efforts extérieurs s'écrit comme une forme linéaire :

$$dW_{ext}.\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}=\int_{\Omega_o}\rho_o F_i\,\delta v_i\,d\,\Omega_o+\int_{\partial_F\Omega_o}T_i^d\,\delta v_i\,dS_o$$

$\mathbf{F}$: chargement volumique

$\mathbf{T^d}$: chargement surfacique s'exerçant sur le bord $\partial_F\mathbf{\Omega_o}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.3 Travail virtuel des efforts intérieurs

Nous ne donnerons pas ici de démonstration des expressions présentées. Pour cela, on pourra se reporter à [bib1] et [R7.02.03]. Là encore, nous choisissons la configuration initiale comme configuration de référence, pour exprimer le travail des efforts intérieurs :

$$dW_{int}.\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}=\int_{\Omega_o} F_{ik}S_{kl}\delta v_{i,l}d\Omega_o$$

avec : $\delta v_{i,l}=\frac{\partial dv_i}{\partial X_l}$

Dans l'optique d'une résolution par une méthode de Newton, il importe d'exprimer également la variation seconde du travail virtuel des efforts intérieurs, à savoir :

$$d^2W_{\text{int}}.\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}.\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}=\int_{\Omega_o}\delta u_{i,k}S_{kl}\delta v_{i,l}d\Omega_o$$ Rigidité géométrique

$$\ldots+\int_{\Omega_o}\delta u_{i,q}F_{ip}\frac{\partial^2\Psi}{\partial E_{pq}\partial E_{kl}}F_{jk}\delta v_{j,l}d\Omega_o$$ Rigidité élastique

2.4 Formulation variationnelle

Nous avons maintenant à notre disposition tous les ingrédients pour écrire la formulation variationnelle du problème :

$$dW_{\text{int}}.\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}=dW_{ext}.\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}\ ,\ \forall\,\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}$$ cinématiquement admissible

3 Bibliographie

1. LORENTZ E. : Une relation de comportement hyperélastique non linéaire. Note interne EDF DER, HI-74/95/011/0, 1995.

4 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
3	E.Lorentz EDF-R&D/MMN	Texte initial
10,1	J.M.Proix EDF-R&D/AMA	Changement de vocabulaire : GREEN devient GROT_GDEP

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)