# Thermique non linéaire

**Résumé**

L'opérateur THER_NON_LINE [U4.54.02] permet de résoudre les problèmes de thermique transitoire dans les solides en présence de non-linéarités des propriétés des matériaux (capacité calorifique et conductivité), ou des conditions aux limites (échange thermique de type rayonnement). On présente ici la formulation et l'algorithme employé, ce dernier étant proche de celui lié à l'opérateur STAT_NON_LINE [R5.03.01]. Les différentes options de calcul nécessaires ont été présentées dans les éléments de structure plans, axisymétriques et tridimensionnels [U3.22.01], [U3.23.01] et [U3.24.01].



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des matières

1Expression de l'équation de la chaleur en thermique non linéaire....3
1.1Équation de la chaleur pour un solide immobile....3
1.2Loi de Fourier....4
1.3Équation de la chaleur dans le cas du modèle de thermique transitoire non-linéaire....4
1.4Avantage numérique de la formulation en enthalpie pour les problèmes avec changement de phase....4
2Conditions aux limites, chargement et condition initiale....6
2.1Flux normal non-linéaire....6
2.2Flux normal non-linéaire - condition de type rayonnement à l'infini....6
3Formulation variationnelle du problème....7
4Discrétisation en temps de l'équation différentielle....8
4.1Introduction de la thêta-méthode....8
4.2Application à l'équation de la chaleur....8
5Discrétisation spatiale et adaptation de l'algorithme de Newton au problème....11
5.1Discrétisation spatiale....11
5.2Calcul stationnaire....12
5.3Calcul transitoire....13
5.4Convergence....14
6Principales options de thermique non-linéaire calculées dans Code_Aster....15
6.1Conditions aux limites et chargements....15
6.2Calcul des matrices élémentaires et terme transitoire....15
6.3Calcul du résidu....15
7Bibliographie....16



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Expression de l'équation de la chaleur en thermique non linéaire

## 1.1 Équation de la chaleur pour un solide immobile

Dans ce document, on ne traite que la thermique des corps solides, même si le changement de phase liquide/solide est pris en compte. Il n'y a donc pas d'échange de chaleur par convection mais seulement par conduction.

Le premier principe de la thermodynamique relie la variation temporelle d'énergie totale $dE_{totale}$ d'un système inclus dans un volume de contrôle $\Omega$ au travail des efforts extérieurs $\delta W$ et à la chaleur $\delta Q$ reçus par ce même système :

$$dE_{totale} = d\left(E_{\text{interne}} + E_{\text{cinétique}}\right) = \delta W + \delta Q \qquad \textbf{éq 1.1-1}$$

En injectant le théorème de l'énergie cinétique dans cette équation, on fait apparaître ainsi la puissance des efforts intérieurs, fonction du champ de vitesse [bib1] :

$$\dot{E}_{\text{interne}} = \dot{Q} - P_i(u) \qquad \textbf{éq 1.1-2}$$

Pour la résolution du problème de thermique, le système est supposé sans mouvement. La puissance des efforts intérieurs $P_i(u)$ est donc nulle. En effet, dans la majorité des applications visées, les phénomènes thermiques et mécaniques sont découplés ; la puissance volumique dissipée par les déformations plastiques, $P_i = \sigma_c . \dot{\epsilon}_{plastique}$ , est négligée devant la chaleur échangée en surface ou les autres sources de chaleur volumiques.

L'équation [éq 1.1-2] qui exprime la variation de la chaleur dans le volume $\Omega$ s'écrit alors :

$$\forall s \in \Omega \quad \rho \frac{d}{dt} \int_S e \, d\Omega = \dot{Q} = \int_S \left(r_{vol} - \operatorname{div} q\right) d\Omega \qquad \textbf{éq 1.1-3}$$

où on a noté :

- $e$ l'énergie interne,
- $\rho$ la masse volumique,
- $r_{vol}$ le taux volumique d'apport extérieur de chaleur,
- $\boldsymbol{q}$ le vecteur flux de chaleur.

En outre, puisque le solide est immobile, pour tout volume de contrôle $\Omega(t) = \Omega$ , on obtient alors l'équation locale de conservation de la chaleur :

$$\rho \quad \frac{de}{dt} = r_{vol} - \operatorname{div} q \qquad \textbf{éq 1.1-4}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas où tout le système est animé d'un mouvement de corps rigide, un terme supplémentaire apparaît dans le membre de gauche, faisant intervenir la vitesse du solide et le gradient de l'énergie. Cette situation est traitée par la commande THER_NON_LINE_MO [R5.02.04].

Dans le cas d'une transformation réversible, l'équation [éq 1.1-4] devient, avec l'aide du second principe de la thermodynamique qui permet d'écrire dans notre cas $dE_{interne}=TdS$ :

$$\rho\ T\dot{s}=r_{vol}-\operatorname{div} q \qquad \textbf{éq 1.1-5}$$

et enfin l'équation de la chaleur sous sa forme classique :

$$\rho\ C_P\dot{T}=r_{vol}-\operatorname{div} q \qquad \textbf{éq 1.1-6}$$

avec la capacité calorifique à pression constante définie par : $C_P=T\frac{\partial s}{\partial T}|_P$

Comme il est expliqué au chapitre 1.4, il peut être avantageux d'écrire le terme de gauche de l'équation [éq 1.1-6] avec l'enthalpie $\beta$ qui ne dépend alors que de la température :

$$\dot{\beta}=r_{vol}-\operatorname{div} q \qquad \textbf{éq 1.1-7}$$

où $\beta(T)=\int_{T_0}^{T}\rho C_P dT$

## 1.2 Loi de Fourier

En conduction thermique, la loi de Fourier fournit une équation reliant le flux de chaleur au gradient de la température (vecteur normal à la surface isotherme). Cette loi fait apparaître, dans sa forme la plus générale, un tenseur de conductivité. Dans le cas d'un matériau isotrope, ce tenseur se réduit à un coefficient $\lambda$ (pouvant dépendre de la température), la conductivité thermique :

$$q(x,t)=-\lambda(T)\nabla T(x,t) \qquad \textbf{éq 1.2-1}$$

## 1.3 Équation de la chaleur dans le cas du modèle de thermique transitoire non-linéaire

En combinant les équations [éq 1.1-5] et [éq 1.2-1], on obtient :

$$r_{vol}-\operatorname{div}(-\lambda(T)\nabla T)=\frac{d\beta}{dt} \qquad \textbf{éq 1.3-1}$$

ou, si la capacité calorifique ne dépend pas de la température :

$$r_{vol}-\operatorname{div}(-\lambda(T)\nabla T)=\rho C_p\frac{dT}{dt} \qquad \textbf{éq 1.3-2}$$

## 1.4 Avantage numérique de la formulation en enthalpie pour les problèmes avec changement de phase.

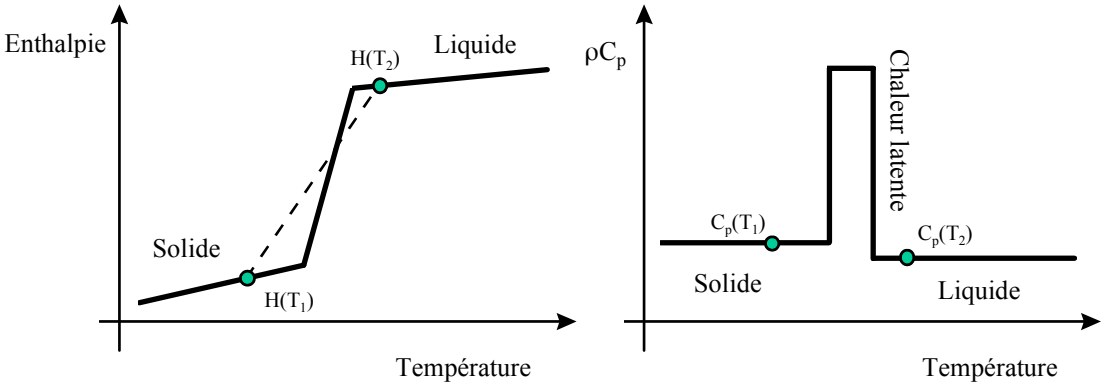


Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La relation entre enthalpie et capacité calorifique est :

$$\beta(T) = \int_{T_0}^{T} \rho\, C_p(u)\, du$$

Quand cette fonction enthalpie présente des variations brusques, il est plus précis de manipuler $\beta(T)$ que sa dérivée. En effet, les allures caractéristiques de ces fonctions au voisinage du point de fusion sont les suivantes :




Au cours d'une itération, soit parce que le transitoire thermique est violent, soit parce que la plage de changement de phase est très petite (corps pur), les deux itérés successifs de la température peuvent se situer de part et d'autre de la discontinuité. L'évaluation de la pente de la fonction enthalpie au voisinage du point de fusion sera très fausse si on considère $C_p(T_1)$, $C_p(T_2)$ ou une moyenne pondérée des deux. En revanche, la pente de la droite en pointillés est toujours une approximation correcte de $d\beta/dT$ au point de fusion.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Conditions aux limites, chargement et condition initiale

On se reportera à [R5.02.01] pour les conditions aux limites thermiques et les chargements conduisant à des équations linéaires en température ainsi que pour la condition initiale.

## 2.1 Flux normal non-linéaire

Ce sont des conditions de type Neumann, définissant le flux entrant dans le domaine.

$$-q(x,t).\boldsymbol{n}=g(x,T) \quad \text{sur la frontière } \Gamma \qquad \textbf{éq 2.1-1}$$

où $g(x,T)$ est une fonction de la température et éventuellement de la variable d'espace $x$ et/ou de temps $t$ et $\boldsymbol{n}$ désigne la normale extérieure à la frontière $\Gamma$, $q$ est le vecteur flux de chaleur (dirigé suivant les températures décroissantes).

Cette expression permet d'introduire par exemple des conditions du type échange avec un coefficient d'échange convectif dépendant de la température :

$$-q(x,t).\boldsymbol{n}=g(x,T)=h(x,T)(T_{ext}(x,t)-T) \qquad \textbf{éq 2.1-2}$$

## 2.2 Flux normal non-linéaire - condition de type rayonnement à l'infini

Un cas particulier des conditions aux limites précédentes est le rayonnement à l'infini de corps gris qui se traduit par un cas particulier de fonction $g(x,T)$ :

$$-q(x,t).\boldsymbol{n}=\sigma\epsilon\left[(T(x)+273.15)^4-(T_\infty+273.15)^4\right] \qquad \textbf{éq 2.2-1}$$

Les caractéristiques à définir lors de la définition de ce chargement sont l'émissivité $\varepsilon$, la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma=5{,}73.10^{-8}usi$ et la température à l'infini.

$T(r)$ et $T_\infty$ sont alors exprimées en degrés Celsius. $-273.15\,°C$ est la température du zéro absolu.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 3 Formulation variationnelle du problème

Nous nous bornerons ici à présenter le problème avec uniquement les conditions aux limites de température imposée [R5.02.01 §2.1], de flux normal imposé [R5.02.01 §2.3], d'échange [R5.02.01 §2.4], de flux non linéaire [§2.1] et de rayonnement [§2.2].

Soit $\Omega$ un ouvert de $R^3$, de frontière $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4\cup\Gamma_5$.
On doit résoudre l'équation [éq 1.1-4] en $T$ sur $\Omega\times]0,t[$ avec les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{lcll} T=T^d(r,t) & & \text{sur} & \Gamma_1 \\ \lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial n} & = & f(r,t) & \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ \lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial n} & = & h(r,t)(T_{ext}(r,t)-T) & \text{sur} \quad \Gamma_3 \\ \lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial n} & = & g(r,T) & \text{sur} \quad \Gamma_4 \\ \lambda(T)\dfrac{\partial T}{\partial n} & = & \sigma\epsilon\left[(T+273.15)^4-(T_\infty+273.15)^4\right] & \text{sur} \quad \Gamma_5 \end{array}\right. \qquad \text{éq 3-1}$$

et avec, éventuellement, des conditions initiales $T(t=0)$. Si ces dernières ne sont pas précisées, on résoud au préalable le problème stationnaire, c'est à dire l'équation [éq 1.3-1] sans le terme d'évolution temporelle.

Soit $v$ une fonction suffisamment régulière s'annulant sur $\Gamma_1$, en remarquant :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \beta(T).v.d\Omega\right)=\int_\Omega \dot{\beta}(T).v.d\Omega \\ &\int_\Omega \lambda(T)\nabla T.\nabla v.d\Omega = -\int_\Omega div(\lambda(T)\nabla T).v.d\Omega+\int_\Gamma \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}.v.d\Gamma \end{aligned} \qquad \text{éq 3-2}$$

la formulation faible de l'équation de la chaleur peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \beta(T).v.d\Omega\right)+\int_\Omega \lambda(T)\nabla T.\nabla v d\Omega-\int_\Gamma \lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}.v.d\Gamma=\int_\Omega r_{vol}.v.d\Omega \qquad \text{éq 3-3}$$

On en déduit la formulation variationnelle du problème :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{d\beta(T)}{dt}.v.d\Omega+\int_\Omega \lambda(T)\nabla T.\nabla v.d\Omega+\int_{\Gamma_3} hT.v.d\Gamma_3= \\ &\int_\Omega r_{vol}.v.d\Omega+\int_{\Gamma_2} f.v.d\Gamma_2+\int_{\Gamma_3} hT_{ext}.vd\Gamma_3+ \\ &\int_{\Gamma_4} g.v.d\Gamma_4+\int_{\Gamma_5}\sigma\epsilon.\left[(T+273.15)^4-(T_\infty+273.15)^4\right].v.d\Gamma_5 \end{aligned} \qquad \text{éq 3-4}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 4 Discrétisation en temps de l'équation différentielle

## 4.1 Introduction de la thêta-méthode

Une façon classique de discrétiser une équation différentielle du premier ordre est la $\Theta$ -méthode. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=\Phi(t,y(t)) \\ y(0)=y_0 \end{cases} \qquad \textbf{éq 4.1-1}$$

La $\Theta$ -méthode consiste à discrétiser l'équation [éq 4.1-1] par un schéma aux différences finies

$$\frac{1}{\Delta t}(y_{n+1}-y_n)=\theta.\varphi(t_{n+1},y_{n+1})+(1-\theta).\varphi(t_n,y_n) \qquad \textbf{éq 4.1-2}$$

où $y_{n+1}$ est une approximation de $y(t_{n+1})$ , $y_n$ étant supposée connue et $\theta$ est le paramètre de la méthode, $\theta\in[0,1]$ .

**Remarque :**

*si* $\theta=0$ *le schéma est dit explicite,*
*si* $\theta\neq 0$ *le schéma est dit implicite.*

## 4.2 Application à l'équation de la chaleur

Utilisons la $\Theta$ -méthode dans la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur, où l'on a posé :

$$\begin{array}{cccc} T^+=T(r,t+\Delta t) & T^-=T(r,t) & h^+=h(r,t+\Delta t) & h^-=h(r,t) \\ f^+=f(r,t+\Delta t) & f^-=f(r,t) & T^+_{ext}=T_{ext}(r,t+\Delta t) & T^-_{ext}=T_{ext}(r,t) \\ r^+_{vol}=r_{vol}(r,t+\Delta t) & r^-_{vol}=r_{vol}(r,t) & T^{d+}=T^d(r,t+\Delta t) & T^{d-}=T^d(r,t) \\ g^+=g(r,T^+) & g^-=g(r,T^-) & & \end{array}$$

où $T^d(r,t)$ représente la température imposée sur la frontière du domaine, en fonction du temps et de l'espace.

Introduisons les espaces de fonctions suivants :

$$\begin{aligned} V_{t^+}&=\left\{v\in H^1(\Omega)\, v_{/\Gamma_1}=T^{d+}\right\} \\ V_{t^-}&=\left\{v\in H^1(\Omega)\, v_{/\Gamma_1}=T^{d-}\right\} \\ V_0&=\left\{v\in H^1(\Omega)\, v_{/\Gamma_1}=0\right\} \end{aligned}$$

Le champ $T^-\in V_{t^-}$ étant supposé connu, on cherche $T^+\in V_{t^+}$ tel que $\forall\, v\in V_0$ :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\int_\Omega \frac{\beta(T^+)-\beta(T^-)}{\Delta t} v.d\Omega \qquad +\int_\Omega (\theta\lambda(T^+)\nabla T^+.\nabla v+(1-\theta)\lambda(T^-)\nabla T^-.\nabla v)\,d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_2}(\theta f^+ +(1-\theta) f^-)v.d\Gamma_2 \quad -\int_{\Gamma_3}(\theta h^+ T^+_{ext}+(1-\theta)h^- T^-_{ext}-\theta h^+ T^+ -(1-\theta)h^- T^-)v.d\Gamma_3$$
$$-\int_{\Gamma_4}(\theta g^+ +(1-\theta) g^-)v.d\Gamma_4 \qquad =$$
$$\int_\Omega (\theta r^+_{vol}+(1-\theta) r^-_{vol})v.d\Omega \qquad +\int_\Omega (\theta r_v(T^+)+(1-\theta) r_v(T^-))v.d\Omega$$

**éq 4.2-1**

Pour ne pas alourdir excessivement l'écriture et dans la mesure où le procédé est identique aux autres termes, on n'a pas fait figurer le terme de rayonnement dans ces équations (intégrale sur $\Gamma_5$).

En posant :

$$(hT_{ext})^\theta = \theta h^+ T^+_{ext}+(1-\theta)h^- T^-_{ext}$$
$$f^\theta = \theta f^+ +(1-\theta) f^-$$
$$r^\theta = \theta r^+_{vol}+(1-\theta) r^-_{vol}$$

on obtient finalement :

$$\int_\Omega \frac{\beta(T^+)}{\Delta t} v.d\Omega + \theta\int_\Omega \lambda(T^+)\nabla T^+.\nabla v.\,d\Omega + \theta\int_{\Gamma_3} h^+ T^+ v.d\Gamma_3$$
$$-\theta\int_{\Gamma_4} g(T^+).v.d\Gamma_4 - \theta\int_\Omega r_v(T^+).v.d\Omega = L_1(v,T^-)$$
$$\forall v \in V_0$$

**éq 4.2-2**

où on a posé :

$$L_1(v,T^-)=\int_\Omega \frac{\beta(T^-)}{\Delta t} v.d\Omega - \int_\Omega (1-\theta)\lambda(T^-)\nabla T^-.\nabla v.\,d\Omega + \int_{\Gamma_2} f^\theta v.d\Gamma_2$$
$$+\int_{\Gamma_3}((hT_{ext})^\theta -(1-\theta)h^- T^-)v.d\Gamma_3 + \int_\Omega r^\theta v.d\Omega$$
$$+(1-\theta)\int_{\Gamma_4} g(T^-)v.d\Gamma_4 + (1-\theta)\int_\Omega r_v(T^-)v.d\Omega$$

**éq 4.2-3**

A un instant de calcul donné, ce terme est connu. En effet, seule la température à l'instant précédent, $T^-$, ainsi que les valeurs à l'instant courant de fonction *connues* du temps, interviennent.

Dans le cas où la répartition de température dans le système à l'instant initial n'est pas fournie, on résout le problème stationnaire. Les termes d'évolution disparaissent, $\Theta = 1$ ; le champ de température à l'instant initial est donné par :

$$\int_\Omega \lambda(T^{t=0})\nabla T^{t=0}.\nabla v.d\Omega + \int_{\Gamma_3} h^{t=0} T^{t=0} v.d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_4} g(T^{t=0})v.d\Gamma_4$$
$$=\int_{\Gamma_2} f^{t=0} v.d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} h^{t=0} T^{t=0}_{ext} v.d\Gamma_3 + \int_\Omega r^{t=0} v.d\Omega$$
$$\forall v \in V_0$$

**éq 4.2-4**

Le problème s'écrit finalement sous la forme condensée :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} Soit\ T^{-} \in V_{t^{-}}\ connu\ , trouver\ T^{+} \in V_{t^{+}}\ tel\ que \\ \forall\, v \in V_0 :\ a(v, T^{+}) = L_1(v, T^{-}) \end{cases} \qquad \textbf{éq 4.2-5}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 5 Discrétisation spatiale et adaptation de l'algorithme de Newton au problème

Le principe de la méthode de Newton est très détaillé dans [R5.03.01], on n'exposera ici que les adaptations propres à l'algorithme de thermique non linéaire.

## 5.1 Discrétisation spatiale

Soit $P_h$ un découpage de l'espace $\Omega$ , désignons par $N$ le nombre de nœuds du maillage, $p_i$ la fonction de forme associé au nœud $i$ . On désigne par $J$ l'ensemble des nœuds appartenant à la frontière $G_1$.

Soient :

$$V_{t^+}^h=\left\{v=\sum_{i=1,N} v_i p_i(x)\ ;\ v_j=T^d(x_j,t^+)\quad j\in J\right\}$$
$$V_{t^-}^h=\left\{v=\sum_{i=1,N} v_i p_i(x)\ ;\ v_j=T^d(x_j,t^-)\quad j\in J\right\}$$
$$V_0^h=\left\{v=\sum_{i=1,N} v_i p_i(x)\ ;\ v_j=0\quad j\in J\right\}$$

**éq 5.1-1**

Le problème [éq 4.2-5] peut être remplacé par le problème discrétisé à nombre d'inconnues fini suivant :

Soit $T^-\in V_t^h$ connu, trouver $T^+\in V_{t^+}^h$ tel que

$$v_h\in V_0^h a(v_h,T^+)=L_1(v_h,T^-)$$

**éq 5.1-2**

qu'on peut aussi écrire, avec le même formalisme que STAT_NON_LINE [R5.03.01], sous forme vectorielle :

$$v^T R(T^+,t^+)=v^T L(T^-,t^+\quad \forall v \text{ tel que } Bv=0$$
$$BT^+=T^d(t^+)$$

**éq 5.1-3**

où l'opérateur $\boldsymbol{B}$ exprime la condition aux limites de température imposée $T^+\in V_{t^+}^h$ . Il est défini par :

$$(\mathbf{Bv})_j=\begin{cases}0\ si\ j\notin J\\ v_j\ si\ j\in J\end{cases}$$

**éq 5.1-4**

Le cas où l'application $R$ est linéaire est traité par la commande THER_LINEAIRE [R5.02.01].



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La dualisation des conditions aux limites, détaillée dans [R3.03.01], conduit au problème non linéaire en $T^+$ :

$$\begin{cases} R(T^+,t^+)+B^T\lambda^+=L(T^-,t^+) \\ BT^+=T^d(t^+) \end{cases} \quad \textbf{éq 5.1-5}$$

Les inconnues sont le couple $(T^+,\lambda^+)$, où $\lambda^+$ représente les « multiplicateurs de Lagrange » des conditions aux limites de Dirichlet.

Résoudre le système [éq 5.1-5] revient à annuler en $(T_i^+,\lambda_i^+)$ le vecteur $F(T^+,\lambda^+)$, appelé résidu, défini par :

$$F(T^+,\lambda^+)=\begin{pmatrix} L(T^-,t^+)-R(T^+,t^+)-B^T\lambda^+ \\ T^d(t^+)-BT^+ \end{pmatrix} \quad \textbf{éq 5.1-6}$$

La méthode de Newton consiste à construire une suite de vecteurs $\{x^n\}_n$ convergeant vers la solution de $F(x)=0$ à l'aide de l'application linéaire tangente de $F$ .

## 5.2 Calcul stationnaire

Le problème variationnel est celui de l'équation [éq 4.2-4]. A noter : en calcul stationnaire, l'enthalpie n'intervient pas dans l'application $R$ .

On introduit la matrice de l'application linéaire tangente de la fonction $R(T^n)$ :

$$K^n=\frac{\partial R}{\partial T}|_{T_n}$$

Celle de la fonction $F(T^n,\lambda^n)$ est alors :

$$\begin{bmatrix} K^n & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le cas du calcul stationnaire, on doit itérer à partir d'une valeur d'initialisation du champ de température qui est donnée par le mot-clef ETAT_INIT. La première itération du calcul, dite itération de prédiction, consiste à résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K(T_0) & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1-T_0 \\ \lambda_1-\lambda_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L-R(T_0)-B^T\lambda_0 \\ T^d-BT_0 \end{bmatrix} \quad \textbf{éq 5.2-1}$$

Comme on peut le voir dans l'équation du problème stationnaire [éq 4.2-4], la température n'apparaît pas au second membre : on écrit $L$ et non $L(T_0)$ .

Si le problème est linéaire, $R(T_0)=K(T_0)T_0=K.T_0$ . Tous les termes en $T_0$ disparaissent par simplification. La solution est obtenue en une itération par inversion d'un système identique à celui décrit dans [R5.02.01 §6].

Les itérations suivantes sont des itérations de Newton, avec réactualisation ou non de la matrice tangente $K$ .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{bmatrix} K(T_{(i)}) & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i+1}-T_i \\ \lambda_{i+1}-\lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L-R(T_i)-B^T\lambda_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{éq 5.2-2}$$

Pour l'itération de prédiction, l'écriture du sous-système inférieur de l'équation [éq 5.2-1], après simplification, nous assure que $BT_1=T^d$ . Le premier itéré et tous les suivants vérifient donc les conditions de Dirichlet.

Les parenthèses autour de l'indice d'itération dans l'expression $K(T_{(i)})$ signifient qu'on peut réactualiser ou non la matrice tangente au fil des itérations.

**Remarque :**

*La température d'initialisation $T_0$ n'a d'influence que pour un calcul stationnaire non linéaire. En étant de l'ordre de grandeur des températures attendues, elle permettrait de « partir » de moins loin de la solution qu'un champ nul partout ; et ainsi diminuerait le nombre d'itérations.*

## 5.3 Calcul transitoire

Pour la première itération du pas de temps, dite itération de prédiction, on « fait comme si » le problème décrit dans [éq 5.1-5] était linéaire. Cette formulation doit permettre d'obtenir directement la solution pour un problème de thermique linéaire. Mais ici, la situation est un peu différente du calcul stationnaire à cause de la formulation en enthalpie. La linéarisation de [éq 5.1-5] donne :

$$\begin{cases} R(T^-,t^+)+K(T^-,t^+)(T^+-T^-)+B^T\lambda^+=L(T^-,t^+) \\ BT^+=T^d(t^+) \end{cases} \quad \textbf{éq 5.3-1}$$

Ce qui revient à résoudre, pour le problème présenté sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} K(T^-) & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^+ \\ \lambda_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(T^-,t^+)+K(T^-)T^- - R(T^-) \\ T^d(t^+) \end{bmatrix} \quad \textbf{éq 5.3-2}$$

La fonction enthalpie est connue à une constante d'intégration près qui apparaît dans la relation liant $R(T^-)$ à $K(T^-)T^-$. Cette même constante se retrouve dans l'expression de $L(T^-,t^+)$. On peut alors l'éliminer en aboutissant au système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} K(T^-) & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^+ \\ \lambda_1^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(T^-,t^+) \\ T^d(t^+) \end{bmatrix} \quad \textbf{éq 5.3-3}$$

où $\tilde{L}(T^-,t^+)$ est le second membre calculé avec la capacité calorifique et non l'enthalpie (option `CHAR_THER_EVOLNI` [§6.2]).

Enfin, comme pour le cas stationnaire vu au chapitre précédent, les itérations suivantes sont des itérations de Newton :

$$\begin{bmatrix} K(T_{(i)},t^+) & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i+1}^+-T_i^+ \\ \lambda_{i+1}^+-\lambda_i^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(T^-,t^+)-R(T_i,t^+)-B^T\lambda_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{éq 5.3-4}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Cette fois-ci, par contre, $L(T^-,t^+)$ est calculé avec l'enthalpie et non la capacité calorifique pour être cohérent avec $R(T_i^+)$ .

## 5.4 Convergence

Puisque le temps intervient dans l'expression de la matrice tangente, et également le pas de temps, on préfère actualiser systématiquement celle-ci au début de chaque pas pour ne pas trop dégrader la vitesse de convergence. En revanche, liberté est laissée à l'utilisateur de contrôler sa fréquence de calcul au cours d'un pas de temps.

A chaque itération, on peut effectuer la recherche d'un pas de progression optimum vers la solution par quelques itérations (2 ou 3) de recherche linéaire. Cette méthode est décrite en détail dans [R5.03.01].

Le calcul est réputé convergé quand le vecteur résidu est nul [éq 5.1-6] :

$$F(T_i^+,\lambda_i^+,t^+)=\begin{pmatrix} L(T^-,t^+)-R(T_i^+,t^+)-B^T\lambda_i^+ \\ T^d(t^+)-BT_i^+ \end{pmatrix} \quad \textbf{éq 5.4-1}$$

La partie inférieure du vecteur est toujours nulle (conditions de Dirichlet). On vérifie donc :

$$\frac{\|L(T^-,t^+)-R(T_i^+,t^+)-B^T\lambda_i^+\|_2}{\|L(T^-,t^+)-B^T\lambda_i^+\|_2}\leq\epsilon \quad \textbf{éq 5.4-2}$$

L'utilisateur a également la possibilité d'arrêter les itérations sur un critère absolu :

$$\|L(T^-,t^+)-R(T_i^+,t^+)-B^T\lambda_i^+\|_\infty\leq\epsilon \quad \textbf{éq 5.4-3}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 6 Principales options de thermique non-linéaire calculées dans *Code_Aster*

## 6.1 Conditions aux limites et chargements

On se reportera à [R5.02.01] pour les conditions aux limites et les chargements linéaires.

| | | |
|---|---|---|
| Flux non linéaire | CHAR_THER_FLUNL | $\int_{\Gamma_4}(1-\theta)g(T^-)v.d\Gamma_4$ |
| Rayonnement | CHAR_THER_RAYO_R<br>CHAR_THER_RAYO_F | $\int_{\Gamma_4}\sigma\epsilon\left[(T+273.15)^4-(1-\theta)(T^-+273.15)^4\right].v.d\Gamma_4$ |
| Source non-linéaire | CHAR_THER_SOURNL | $\int_{\Omega}(1-\theta)r_v(T^-)v.d\Omega$ |

## 6.2 Calcul des matrices élémentaires et terme transitoire

| | | |
|---|---|---|
| Conductivité | RIGI_THER_TANG | $\int_{\Omega}\theta\lambda(T^+)\nabla v.\nabla v.d\Omega$ |
| Inertie thermique | MASS_THER_TANG | $\int_{\Omega}\frac{\rho Cp}{\Delta t}v.v.d\Omega$ |
| Rayonnement | MTAN_THER_RAYO_R<br>MTAN_THER_RAYO_F | $\int_{\Gamma_4}\theta.4.\sigma.\epsilon(T^++273.15)^3v.v.d\Gamma_4$ |
| Coefficient d'échange | MTAN_THER_COEF_R<br>MTAN_THER_COEF_F | $\int_{\Gamma_4}\theta h.v.vd\Gamma_4$ |
| Flux non linéaire | MTAN_THER_FLUXNL | $-\int_{\Gamma_4}\theta\frac{dg}{dT}(T^+)v.v.d\Gamma_4$ |
| Source non linéaire | MTAN_THER_SOURNL | $-\int_{\Omega}\theta\frac{dr_v}{dT}(T^+)v.v.d\Omega$ |
| Terme transitoire | CHAR_THER_EVOLNI | $\int_{\Omega}\frac{\beta(T^-)}{\Delta t}.v.d\Omega-\int_{\Omega}(1-\theta)\lambda(T^-)\nabla T^-.\nabla v.d\Omega$ |
| | | $\int_{\Omega}\frac{\rho\ CpT^-}{\Delta t}.v.d\Omega-\int_{\Omega}(1-\theta)\lambda(T^-)\nabla T^-.\nabla v.d\Omega$ |

## 6.3 Calcul du résidu

| | | |
|---|---|---|
| | RAPH_THER | $\int_{\Omega}\theta\lambda(T^i)\nabla T^i.\nabla v.d\Omega$ |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

| | | |
|---|---|---|
| | MASS_THER_RESI | $\int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \beta(T^i) v \, d\Omega$ |
| Rayonnement | RESI_THER_RAYO_R<br>RESI_THER_RAYO_F | $\int_{\Gamma_4} \theta \sigma \epsilon (T^i + 273.15)^4 v . d\Gamma_4$ |
| Coefficient d'échange | RESI_THER_COEF_R<br>RESI_THER_COEF_F | $\int_{\Gamma_3} (\theta h^+ T^i) v . d\Gamma_3$ |
| Flux non linéaire | RESI_THER_FLUXNL | $-\int_{\Gamma_3} \theta g(T^i) v . d\Gamma_3$ |
| Source non linéaire | RESI_THER_SOURNL | $-\int_{\Omega} \theta r_v(T^i) v . d\Omega$ |

# 7 Bibliographie


- SALENCON. Mécanique des milieux continus. Ellipses. 1988.
- RUUP, PENIGUEL. SYRTHES - Conduction et rayonnement, Manuel théorique de la version 3.1. HE-41/98/048/A




Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)