Indicateur d'erreur en résidu pour les modélisations HM

Résumé

Dans ce document, on présente les indicateurs d'erreur a posteriori développés pour les modélisations HM. L'estimation a posteriori concernée est de type résidu explicite. On donne d'abord un cadre de travail pour l'étude a posteriori de ces problèmes. On présente ensuite les familles d'indicateurs d'erreur pour les deux types de problème et on énonce les résultats théoriques de fiabilité et d'optimalité qui garantissent la validité des indicateurs. Les preuves des résultats annoncés ne seront pas données, le lecteur intéressé pourra pour cela consulter [1].

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Cadre de travail....3
1.1 Le problème modèle continu....3
1.2 Adimensionnement....4
1.3 Discrétisation éléments finis et notations....5
2 Étude du problème transitoire....6
3 Utilisation dans Code_Aster....8
4 Conclusion - Perspective....9
5 Bibliographie....9
6 Historique des versions du document....9

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Cadre de travail

Dans ce paragraphe, on rappelle les équations du problème HM. On en propose ensuite un adimensionnement qui sera utile pour l'analyse d'erreur a posteriori. On conseille au lecteur d'avoir au préalable consulté les documents [2,3,4] pour plus de détails sur l'établissement des équations données dans cette section et sur leur résolution dans Code_Aster.

1.1 Le problème modèle continu

Le cadre de travail est celui de la poroélasticité linéaire. On considère un milieu poreux Ω, de frontière Γ, saturé par de l'eau liquide, avec un comportement mécanique élastique linéaire. Le comportement du fluide influe sur celui du squelette et réciproquement. La dimension spatiale est notée $\dim$. On résout un problème d'équilibre mécanique (bilan de quantité de mouvement pour le squelette et le fluide) et un problème d'évolution en hydraulique (bilan de masse fluide). On rappelle que le traitement de ces deux problèmes est complètement couplé dans Code_Aster. Les inconnues du problème sont le déplacement u et la pression hydraulique p.
Etant donné un temps de simulation T, l'équilibre mécanique se formule

$$-\nabla\cdot\sigma'(u)+b\nabla p=f \text{ dans } [0,\mathrm{T}]\times\Omega \qquad \textbf{éq 1.1-1}$$

où on a posé $f=\rho_{ref}F^m$ et

σ'	Tenseur des contraintes effectives
b	Coefficient de Biot
ρ_{ref}	Masse volumique homogénéisée
F^m	Force de gravité

Dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope, le tenseur des contraintes effectives admet comme expression

$$\sigma'(u)=\lambda_1(\nabla\cdot u)Id+\lambda_2\left(\nabla u+\nabla u^t\right) \qquad \textbf{éq 1.1-2}$$

où λ_1 et λ_2 sont les coefficients de Lamé. L'équation hydraulique provient quant à elle de l'écriture de la conservation de la masse fluide au cours du temps et de la loi de Darcy. La loi de Darcy fournit une relation de proportionnalité entre le flux hydraulique M_{lq} et le gradient de pression. Plus précisément, elle s'écrit

$$\frac{M_{lq}}{\rho}=\kappa\left(-\nabla p+\rho F^m\right) \qquad \textbf{éq 1.1-3}$$

L'équation hydraulique s'écrit

$$\partial_t\left(\frac{1}{M}p+b\nabla\cdot u\right)-\nabla\cdot\left(\kappa\nabla p\right)=g \text{ dans } s[0,\mathrm{T}]\times\Omega \qquad \textbf{éq 1.1-4}$$

où $1/M=(b-\varphi)/K_s$ et $g=-\rho\nabla\cdot\left(\kappa F^m\right)$.

φ	Porosité lagrangienne
ρ	Masse volumique hydraulique
κ	Conductivité hydraulique

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

K_s	Compressibilité des grains solides

L'équation [1.1-1] couplée avec [1.1-4] constitue la version **transitoire** du problème HM.

Les conditions aux limites sont de type mixte Dirichlet/Neumann sur le déplacement et sur la pression. On considère une partition de la frontière sous la forme $\Gamma=\Gamma_D^H\cup\Gamma_N^H=\Gamma_D^M\cup\Gamma_N^M$.

Sur Γ_D^H , on impose des conditions aux limites de Dirichlet en hydraulique : $p=p_D$.
Sur Γ_N^H , on impose des conditions aux limites de Neumann en hydraulique : $M_{lq}\cdot n=M_{lq,nor}$.

Sur Γ_D^M , on impose des conditions aux limites de Dirichlet en mécanique : $u=u_D$.
Sur Γ_N^M , on impose des conditions aux limites de Neumann en mécanique : $\left(\sigma'(u)-bp\chi_S Id\right)\cdot n=\sigma_{nor}$, où on a noté $\Gamma_S=\Gamma_N^M\cap\Gamma_N^H$, de fonction caractéristique χ_S , la portion de frontière où les contraintes et le flux hydraulique sont imposés.

1.2 Adimensionnement

Le problème modèle fait intervenir deux inconnues, les déplacements et la pression du liquide dont les ordres de grandeur peuvent être très différents. On propose donc une mise à l'échelle des équations constituant le problème modèle, qui servira de point de départ à l'analyse d'erreur a posteriori. On attire l'attention sur le fait que cette mise à l'échelle n'est pas utilisée dans l'étape de résolution numérique. Les estimations d'erreur a posteriori de la section 2 seront donc obtenues sur le problème adimensionné, puis redimensionnées en vue de leur utilisation dans Code_Aster.

Pour toute variable a , on note a^* la variable adimensionnée correspondante et A la grandeur caractéristique correspondante. Par exemple pour la pression hydraulique, on a la relation

$$p=Pp^*\ ,$$

où P désigne une pression caractéristique. On utilise le même symbolisme pour les opérateurs mathématiques. Ainsi, on a : $\nabla^*\cdot u^*=\frac{L}{U}\nabla\cdot u$, $\varepsilon^*(u^*)=\frac{L}{U}\varepsilon(u)$, $\nabla^* p^*=\frac{L}{P}\nabla p$.

L'équation mécanique se réécrit

$$-\nabla^*\cdot\sigma^*(u^*)+b\nabla^* p^*=f^* \qquad \textbf{éq 1.2-1}$$

avec $f^*=\frac{L}{P}f$. En notant ν le coefficient de Poisson, $\sigma^*(u^*)$ est une version adimensionnée du tenseur des contraintes donnée par

$$\sigma^*(u^*)=\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+2\nu)}\left(\nabla^*\cdot u^*\right)Id+\frac{1}{1+\nu}\varepsilon^*(u^*) \qquad \textbf{éq 1.2-2}$$

On propose la stratégie de mise à l'échelle suivante. L'utilisateur choisit deux quantités : l'échelle de longueur L et l'échelle de pression P . L'échelle de longueur L est déterminée par la géométrie du modèle. L'échelle de pression est déterminée par les conditions limites de Dirichlet imposées sur la pression ou éventuellement par les conditions initiales. Pour la partie mécanique, on impose

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$U=\frac{LP}{E} \qquad \text{éq 1.2-3}$$

Par ailleurs, l'équation hydraulique s'écrit, en tenant compte de [1.2-3],

$$\partial_t^*\left(\frac{E}{M}p^*+b\nabla^*\cdot u^*\right)-\frac{E}{M}\Delta^* p^*=g^* \qquad \text{éq 1.2-4}$$

avec $g^*=\frac{E}{M}\frac{L^2}{\kappa P}g$.

La version adimensionnée du problème HM transitoire est donc :

$$\begin{cases}-\nabla^*\cdot\sigma^*(u^*)+b\nabla^* p^*=f^* & \text{dans } [0,T^*]\times\Omega^* \\ \partial_t^*\left(\frac{E}{M}p^*+b\nabla^*\cdot u^*\right)-\frac{E}{M}\Delta^* p^*=g^* & \text{dans } [0,T^*]\times\Omega^*\end{cases} \qquad \text{éq 1.2-5}$$

1.3 Discrétisation éléments finis et notations

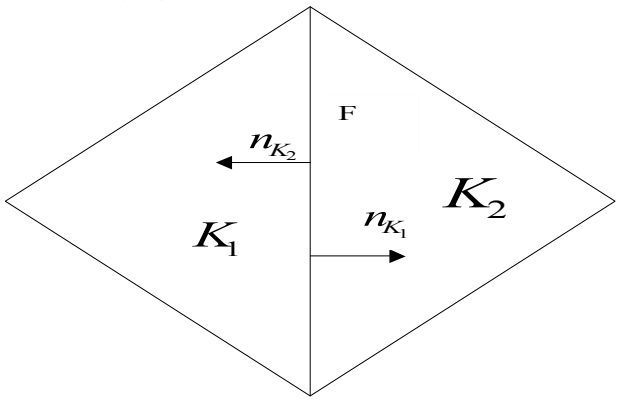
Le problème HM est discrétisé par une méthode éléments finis qui s'appuie sur un maillage $\left(T_h\right)_{h>0}$. On rappelle que les déplacements sont discrétisés par des polynômes de degré 2 et la pression par des polynômes de degré 1. On note les déplacements discrets u_h et la pression discrète p_h .
On désigne par F_h^i l'ensemble des faces intérieures du maillage et par F_h^∂ l'ensemble des faces situées sur le bord du domaine Ω . Pour une maille $K\in T_h$ donnée, on note F_K l'ensemble des faces de K et on pose

$$F_K^i=F_h^i\cap F_K\,,\ F_K^\partial=F_h^\partial\cap F_K$$

Soit $F\in F_h^i$, c'est-à-dire telle qu'il existe deux mailles K_1 et K_2 dans T_h avec $F=K_1\cap K_2$. On désigne par n_{K_1} et n_{K_2} les normales extérieures à K_1 et K_2 , respectivement (voir figure 1). On note, pour presque tout $x\in F$,

$$\left[\Phi\left(u_h\right)\cdot n\right](x)=\left(\Phi\left(u_h\right)\right)_{|K_1}(x)\cdot n_{K_1}+\left(\Phi\left(u_h\right)\right)_{|K_2}(x)\cdot n_{K_2}$$

le saut de la composante normale de $\Phi\left(u_h\right)$ à travers F .



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Figure 1 : Exemple de face intérieure de maillage.

On observe que comme les vecteurs n_{K_1} et n_{K_2} sont opposés, la quantité ci-dessus définit bien ce saut.
Pour toute maille K, on désigne par Δ_K l'ensemble des mailles partageant une arête avec K, y compris la maille K, comme illustré à la figure 2.

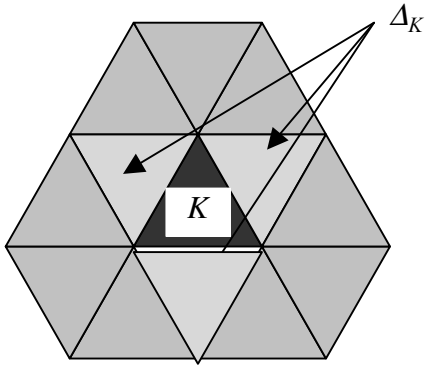


Figure 2 : Exemple de maille K et de macro-élément Δ_K

Pour la discrétisation temporelle du problème transitoire, on considère un schéma d'Euler implicite et on note $\left\{t_i\right\}_{i=1}^N$ une discrétisation de l'intervalle $[0,T]$. On note $u_{h\tau}$ (respectivement $p_{h\tau}$) la fonction continue et affine par morceaux en temps telle que pour tout $n\in\{0,\dots,N\}$, $u_{h\tau}(t_n)=u_h^n$ (respectivement $p_{h\tau}(t_n)=p_h^n$). On a également besoin de considérer des fonctions constantes par morceaux en temps, à savoir $\pi^0 p_{h\tau}$ égales à p_h^n sur $\left[t_{n-1},t_n\right]$. Pour tout $n\in\{1,\dots,N\}$, on pose $\tau_n=t_n-t_{n-1}$ et $I_n=\left[t_{n-1},t_n\right]$.
On note également les « dérivées » discrètes des déplacements et de la pression

$$\delta_t u_h^n=\tau_n^{-1}\left(u_h^n-u_h^{n-1}\right)$$
$$\delta_t p_h^n=\tau_n^{-1}\left(p_h^n-p_h^{n-1}\right)$$

La notation $x<y$ signifie qu'il existe une constante $c>0$ indépendante du maillage telle que $x\le cy$. La notation $\|\cdot\|_V$ désigne une norme sur un espace V. On introduit sa version $\|\cdot\|_{V,K}$, localisée à la maille K, par $\|\cdot\|_V^2=\sum_{K\in T_h}\|\cdot\|_{V,K}^2$.

2 Étude du problème transitoire

On rappelle l'expression du problème continu auquel on s'intéresse. Trouver (u^*,p^*) tel que

$$\begin{cases}-\nabla^*\cdot\sigma'^*(u^*)+b\nabla^* p^*=f^* & \text{dans } [0,T^*]\times\Omega^*\\ \partial_t^*\left(\frac{E}{M}p^*+b\nabla^*\cdot u^*\right)-\frac{E}{M}\Delta^* p^*=g^* & \text{dans } [0,T^*]\times\Omega^*\end{cases} \qquad \text{éq 3.1-1}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la thèse [1], 2 familles d'indicateurs d'erreur pour ce problème ont été proposées. Seule une a été restituée dans Code_Aster, permettant d'évaluer efficacement l'erreur sur la pression.

On définit les estimateurs d'erreur en espace :

- Estimateur pour l'équation hydraulique : pour tout $m\in[1,N]$,

$$\tau_m E^m_{p,0}=\sum_{K\in T_h}\tau_m E^m_{p,0,K}$$

$$=\sum_{K\in T_h}(\tau_m h_K^2\frac{E^2}{P^2L^{\dim}\kappa M}\|\frac{1}{M}\delta_t p^m_h+b\nabla\cdot(\delta_t u^m_h)\|^2_{0,K}+\tau_m h_K\frac{E^2}{P^2L^{\dim}\kappa\rho^2 M}\sum_{F\in F^i_K}\|[M^m_{lq,h}\cdot n]\|^2_{0,F}$$

$$+\tau_m h_K\frac{E^2}{P^2L^{\dim}\kappa\rho^2 M}\sum_{F\in F^{\partial}_K\cap\Gamma^H_N}\|M^m_{lq,nor}-M^m_{lq,h}\cdot n\|^2_{0,F})$$

- Estimateurs pour l'équation mécanique : pour tout $m\in[1,N]$,

$$E^m_u=\sum_{K\in T_h}E^m_{u,K}$$

$$=\sum_{K\in T_h}(h_K^2\frac{1}{P^2L^{\dim}}\|f^m+\nabla\cdot\sigma'(u^m_h)\|^2_{0,K}+h_K\frac{1}{P^2L^{\dim}}\sum_{F\in F^i_K}\|[\sigma'(u^m_h)\cdot n]\|^2_{0,F}$$

$$+h_K\frac{1}{P^2L^{\dim}}\sum_{F\in F^{\partial}_K\cap\Gamma^M_N}\|\sigma^m_{nor}-(\sigma'(u^m_h)\cdot n-bp^m_h n)\|^2_{0,F})$$

$$E^m_u(\delta_t)=\sum_{K\in T_h}E^m_{u,K}(\delta_t)$$

$$\sum_{K\in T_h}(h_K^2\frac{1}{P^2L^{\dim}}\|f^m-f^{m-1}+\nabla\cdot\sigma'(u^m_h-u^{m-1}_h)-b\nabla(p^m_h-p^{m-1}_h)\|^2_{0,K}$$

$$+h_K\frac{1}{P^2L^{\dim}}\sum_{F\in F^i_K}\|[\sigma'(u^m_h-u^{m-1}_h)\cdot n]\|^2_{0,F}$$

$$+h_K\frac{1}{P^2L^{\dim}}\sum_{F\in F^{\partial}_K\cap\Gamma^M_N}\|\sigma^m_{nor}-\sigma^{m-1}_{nor}-(\sigma'(u^m_h-u^{m-1}_h)\cdot n-b(p^m_h-p^{m-1}_h)n)\|^2_{0,F}$$

On définit l'estimateur en temps

$$E^m_{tim}=\tau_m\frac{E}{P^2L^{\dim}\rho^2\kappa}\|M^m_{lq,h}-M^{m-1}_{lq,h}\|^2_{0,\Omega}$$

On dispose des propriétés suivantes :

Théorème 1 (Fiabilité) Pour tout $n\in[1,N]$,

$$\int_0^{t_n}\|(p-p_{h\tau})(s)\|^2_d+\int_0^{t_n}\|(p-\pi^0 p_{h\tau})(s)\|^2_d<\sum_{m=1}^N\tau_m E^m_{p,0}+\sup_{0\le m\le N}E^m_u+\left(\sum_{m=1}^N\left(E^m_u(\delta_t)\right)^{1/2}\right)^2+\sum_{m=1}^N E^m_{tim}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

L'opérateur π^0 désigne l'opérateur de projection sur les fonctions constantes par morceaux en temps, à savoir $\pi^0 p_{h\tau}$ égales à p_h^n sur I_n pour tout $n \in \{1, \cdots, N\}$.

Théorème 2 (Optimalité de l'indicateur en temps)

On a l'estimation suivante

$$E_{tim} = \sum_{m=1}^{N} E_{tim}^m < \int_0^T \| \left(p - p_{h\tau}\right)(s) \|_d^2 ds + \int_0^T \| \left(p - \pi^0 p_{h\tau}\right)(s) \|_d^2 ds$$

Théorème 3 (Optimalité des indicateurs en espace) Pour tout $K \in T_h$, on a

$$E_{u,K}^m < \sum_{K' \in \Delta_K} \left[h_K^2 \| f^m - f_h^m \|_{0,K'} + \| u^m - u_h^m \|_{a,K'}^2 + \| p^m - p_h^m \|_{0,T'}^2 \right]$$

$$E_{u,K}^m \left(\delta_t\right) < \sum_{K' \in \Delta_K} \tau_m^2 \left[h_K^2 \| \delta_t f^m - \delta_t f_h^m \|_{0,K'} + \| \delta_t u^m - \delta_t u_h^m \|_{a,K'}^2 + \| \delta_t p^m - \delta_t p_h^m \|_{0,T'}^2 \right]$$

$$\tau_m E_{p,0,K}^m < \sum_{K' \in \Delta_K} h_K^2 \int_{I_m} [\| \left(g - \pi^0 g_{h\tau}\right)(s) \|_{0,K'}^2 ds + \tau_m^2 \| \delta_t u^m - \delta_t u_h^m \|_{a,K'}$$

$$+ \tau_m^2 \| \delta_t p^m - \delta_t p_h^m \|_{0,K'}^2 + h_T^{-2} \| \left(p - \pi^0 p_{h\tau}\right)(s) \|_{d,K'}^2] ds$$

3 Utilisation dans Code_Aster

Le calcul des indicateurs temporels est déclenché dans STAT_NON_LINE par le mot-clef ERRE_TEMPS_THM='OUI' dans le mot-clef facteur CRIT_QUALITE. Il permet de calculer les quantités ERRE_TPS_LOC , E_{tim}^m , et ERRE_TPS_GLOB , $\sum_{m=1}^{N} E_{tim}^m$.

Le calcul des indicateurs en espace est déclenché dans CALC_ERREUR par l'option 'ERME_ELEM' .

Exemple d'extrait de fichier de commandes :

```
RESU[k]=CALC_ERREUR(reuse =RESU[k],
                    RESULTAT=RESU[k],
                    LIST_INST=LINST,
                    OPTION=('ERME_ELEM','ERME_ELNO',),);

     dico = RESU[k].LIST_PARA()

     print dico['ERRE_MEC']
```

On récupère ainsi les valeurs des indicateurs E_u de la liste LINST.

Pour les indicateurs en espace en transitoire, on a accès aux paramètres suivants :

ERRE_MEC_LOC	E_u^m
ERRE_MEC_LOC_D	$E_u^m \left(\delta_t\right)$
ERRE_MEC_GLOB	$\sup_{0 \le m \le N} \left(E_u^m\right)^{1/2}$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ERRE_MEC_GLOB_D	$\sum_{m=1}^{N}\left(E_u^m\left(\delta_t\right)\right)^{1/2}$
ERRE_HYD_LOC	$E_{p,0}^m$
ERRE_HYD_GLOB	$\left(\sum_{m=1}^{N}\tau_m E_{p,0}^m\right)^{1/2}$

4 Conclusion - Perspective

Les estimateurs pour les modélisations HM viennent compléter la panoplie conséquente d'estimateurs en espace existant dans Code_Aster. Pour la première fois, des indicateurs en temps permettent de quantifier l'erreur sur la discrétisation temporelle. Les perspectives de ce travail sont de plusieurs ordres :

1) Étendre le périmètre d'utilisation des estimateurs HM aux modélisations non linéaires ;
2) Développer des estimateurs pour les modélisations THHM en général ;
3) Mettre en place une procédure de redécoupage des pas de temps à partir des estimateurs en temps. Pour l'instant, seules les valeurs numériques des estimateurs en temps sont fournies dans STAT_NON_LINE, sans être branchées sur un mécanisme d'adaptation de la discrétisation temporelle.

5 Bibliographie

- S. MEUNIER. Analyse d'erreur a posteriori pour les couplages Hydro-Mécaniques et mise en oeuvre dans Code_Aster. Thèse de doctorat de l'ENPC, 2007.
- S. MEUNIER. Modélisation Thermo-Hydro-Mécanique dans *Code_Aster* : Équations et discrétisation. Note HI-23/05/018/A.
- C. CHAVANT. Modélisations THHM. Généralités et algorithmes. Document Aster R7.01.10-A
- S. GRANET. Modèles de comportement THHM. Document Aster R7.01.11-C
- M. AINSWORTH&J. T. ODEN. A posteriori error estimation in finite element analysis. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, 2000.
- S. MEUNIER. Estimation d'erreur *a posteriori* pour le problème Hydro-Mécanique stationnaire. Note HI-23/05/032/A, 2005.
- S. MEUNIER. Modélisation Thermo-Hydro-Mécanique dans *Code_Aster* : Équations et discrétisation. Note HI-23/05/018/A.

6 Historique des versions du document

Version Aster	Auteur(s) ou contributeur(s), organisme	Description des modifications
9.4	S.MEUNIER EDF-R&D / AMA	Texte initial

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)