# Sous-structuration dynamique cyclique

**Résumé :**

Ce rapport repose sur les notions de calcul par synthèse modale décrites dans le document [R4.06.02].

Nous abordons les méthodes de sous-structuration dynamique cyclique. Complètement dédiées à l'étude des structures à répétitivité cyclique, elles tirent le meilleur parti des particularités géométriques de la structure. Les méthodes de CRAIG-BAMPTON et de MAC NEAL, développées dans ce cadre, sont exposées.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# Table des matières

# Table des Matières

1 Introduction....3
2 Répétitivité cyclique....4
2.1 Définition....4
2.2 Propagation d'onde....4
2.3 Notion de diamètres et de cercles nodaux....6
2.4 Conditions aux limites....7
2.4.1 Équations de liaison entre les faces droites et gauche – axe exclu....7
2.4.2 Équations vérifiées par les degrés de libertés portés par l'axe....8
3 Méthodes de sous-structuration cyclique....9
3.1 Méthode de Craig-Bampton....9
3.2 Méthode de Mac Neal....11
3.3 Prise en compte des nœuds de l'axe - Méthode Craig & Bampton....13
4 Mise en œuvre dans Code_Aster....16
5 Conclusion....16
6 Bibliographie....16
7 Description des versions du document....17



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 1 Introduction

Dans ce document, nous faisons la synthèse des méthodes de sous-structuration dynamique cyclique. Nous donnons une définition de la répétitivité cyclique (ou symétrie cyclique) et nous présentons les principales incidences de cette propriété sur le comportement dynamique de la structure (cercles et diamètres nodaux, modes doubles). Puis, nous exposons, de manière assez détaillée, les deux méthodes de sous-structuration dynamique cyclique, implémentées dans *Code_Aster*. Des améliorations ont été apportées aux méthodes classiques, par la prise en compte de la présence des nœuds de l'axe.

Ces méthodes supposent que le maillage du secteur de base est tel que ses traces sur les interfaces droite et gauche sont coïncidentes (maillages compatibles).

**Notations générales :**

| | | |
|---|---|---|
| $\omega_m$ | : | Pulsation maximale d'un système ( $rad.s^{-1}$ ) |
| $M$ | : | Matrice de masse issue de la modélisation éléments finis |
| $K$ | : | Matrice de rigidité issue de la modélisation éléments finis |
| $q$ | : | Vecteur des degrés de liberté issus de la modélisation éléments finis |
| $f_{ext}$ | : | Vecteur des forces extérieures au système |
| $f_L$ | : | Vecteur des forces de liaison appliquées à une sous-structure |
| $\Phi$ | : | Matrice contenant les vecteurs d'une base de projection organisés en colonne |
| $\eta$ | : | Vecteur des degrés de liberté généralisés |
| $B$ | : | Matrice d'extraction des degrés de liberté d'interface |
| $L$ | : | Matrice de liaison |
| $T$ | : | Énergie cinétique |
| $U$ | : | Énergie de déformation |
| $Id$ | : | Matrice identité |
| $\lambda$ | : | Matrice diagonale des rigidités généralisées |
| $R_e(\omega)$ | : | Matrice de flexibilité dynamique résiduelle |
| $R_e(0)$ | : | Matrice de flexibilité statique résiduelle |

**Notations spécifiques à la sous-structuration cyclique :**

| | | |
|---|---|---|
| $N$ | = | nombre de secteurs |
| $\alpha$ | = | angle formé par le secteur de base |
| $\beta$ | = | déphasage inter-secteur |
| $Oz$ | = | axe de la symétrie cyclique |
| $\theta$ | = | rotation d'angle $\alpha$ et d'axe $Oz$ |
| $\mathrm{Re}(Z)$ | = | partie réelle du complexe $Z$ |
| $\mathrm{Im}(Z)$ | = | partie imaginaire du complexe $Z$ |
| $\theta$ | = | matrice de passage des nœuds de droite aux nœuds de gauche |
| $\theta_a$ | = | matrice de changement de secteur pour les nœuds de l'axe |

**Remarque :**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *L'indice* | *d* | *est* | *relatif* | *aux degrés de liberté de droite* |
| *"* | *g* | *"* | *"* | *aux degrés de liberté de gauche* |
| *"* | *a* | *"* | *"* | *aux degrés de liberté de l'axe* |
| *"* | *1* | *"* | *"* | *aux modes propres identifiés* |
| *"* | *2* | *"* | *"* | *aux modes propres inconnus* |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

# 2 Répétitivité cyclique

## 2.1 Définition

On dit qu'une structure est à répétitivité cyclique d'axe $Oz$, s'il existe un angle $0<\alpha<\pi$ tel que la structure soit géométriquement et mécaniquement invariante par rotation autour de $Oz$ de cet angle. Si $\alpha$ est le plus petit angle vérifiant cette propriété, alors toute portion angulaire d'angle $\alpha$ de la structure est appelée "secteur de base" (ou "secteur irréductible").

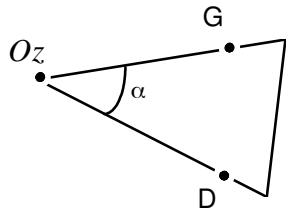
La structure globale est alors composée de $N$ secteurs :

$$N=\frac{2\Pi}{\alpha} \tag{1}$$

## 2.2 Propagation d'onde

On note $\theta$ la rotation d'axe $Oz$ et d'angle $\alpha$ définie dans $R^3$.

Considérons un secteur de base d'une structure à répétitivité d'axe $Oz$, et deux points similaires de deux secteurs contigus $G$ et $D$ :




On a la relation entre les points $G$ et $D$ :

$$G=\theta(D) \tag{2}$$

On remarque que la structure est laissée invariante par toute rotation $\theta^m$ (avec $m$ entier).

On peut noter que toutes les rotations laissant la structure invariante (géométriquement et mécaniquement) sont en nombre fini :

$$\theta^m \quad m\in\{0,1,....N-1\} \tag{3}$$

Considérons une variable d'état scalaire du système mécanique étudié $U$, et $Z$ le complexe associé :

$$U = \mathrm{Re}(Z) = \mathrm{Re}(U+jV) \tag{4}$$

Il est possible de démontrer, par la théorie des groupes finis, la relation suivante pour les points $D$ et $G$ [bib5] :

$$\exists\ m\in\{0,1,...,\frac{N}{2}\} \quad \text{tel que } Z(G)=e^{jm\alpha}Z(D) \tag{5}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

**Remarques :**

- *les quantités sont exprimées dans le repère cylindrique* $(r, \theta, z)$,
- *pour une structure axisymétrique (cas particulier de répétitivité cyclique),* $m$ *est appelé indice de FOURIER,*
- *dans le cas d'une onde plane non amortie,* $e^{jm\alpha}$ *est le déphasage complexe entre deux secteurs contigus ; l'équation signifie que ce déphasage ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs connues,*
- *il est possible de limiter le nombre des valeurs de* $m$ *aux valeurs comprises entre 0 et* $N/2$ *; en effet, on montre que l'onde associée au déphasage* $N-m$ *est identique à celle associée au déphasage* $m$ *, mais progresse en sens inverse [bib5].*

Si $N$ est pair : $m=0$ et $m=N/2$ correspondent à des modes réels :

$$\begin{aligned} m=0 \quad &\Rightarrow \forall D \quad U(\theta(D))=U(D) \\ m=N/2 \quad &\Rightarrow \forall D \quad U(\theta(D))=-U(D) \end{aligned} \tag{6}$$

Toutes les autres valeurs de $m$ correspondent à des modes apparaissant par paires orthogonales à une fréquence donnée (on parle alors de modes dégénérés) :

$$U=\mathrm{Re}(Z) \quad et \quad V=\mathrm{Im}(Z) \tag{7}$$

Si $N$ est impair : $m=0$ correspond à un mode réel non dégénéré :

$$m=0 \quad \Rightarrow \quad \forall D \quad U(\theta(D))=U(D) \tag{8}$$

Toutes les autres valeurs de $m$ correspondent à des modes dégénérés apparaissant par paires orthogonales :

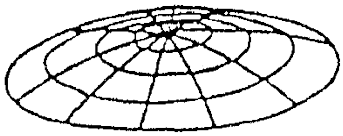
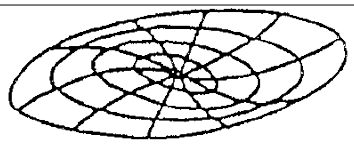
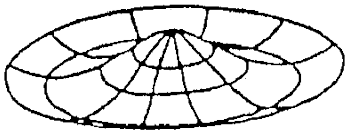
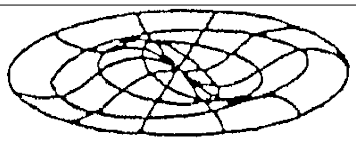
$$U=\mathrm{Re}(Z) \quad et \quad V=\mathrm{Im}(Z) \tag{9}$$

## 2.3 Notion de diamètres et de cercles nodaux

La propriété de répétitivité cyclique, traduite par l'équation (5) permet de connaître a priori l'allure des modes propres de la structure, qui se rapproche fortement de ce que l'on peut observer pour des structures axisymétriques. Si l'on considère un mode propre d'une structure à symétrie cyclique, tous les secteurs ont la même déformée mais avec une amplitude fonction de leur position angulaire, ce que l'on peut traduire par un déphasage entre sous-structures. Ce mode peut être classé à partir du nombre de diamètres et de cercles nodaux qui le caractérisent. Un diamètre nodal (qui n'est confondu avec un diamètre que si la structure est axisymétrique) est une ligne de points de mouvement nul passant par l'axe de répétitivité ; un cercle nodal (qui n'a la forme circulaire que pour les structures axisymétriques) est une ligne de points de mouvement nul, elle même à répétitivité cyclique. On constate que c'est la déformée du mode de la sous-structure sur lequel s'appuie le mode de la structure complète qui détermine le nombre de cercle(s) nodal(aux). Par contre, le nombre de diamètre(s) nodal(aux) est défini par le déphasage entre deux secteurs consécutifs.



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

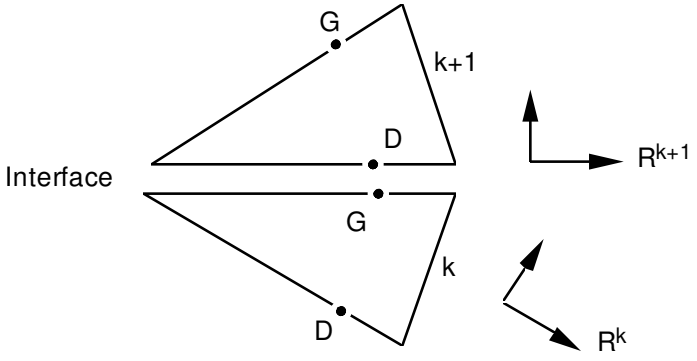
| Déformée du secteur | Phase entre secteur | Déformée d'ensemble | Famille |
|---|---|---|---|
| Flexion 1 | N secteurs en phase |  | 0 cercle 0 diamètre |
| Flexion 1 | N/2 secteurs en phase |  | 0 cercle 1 diamètre |
| Flexion 2 | N secteurs en phase |  | 1 cercle 0 diamètre |
| Flexion 2 | N/secteurs en phase |  | 1 cercle 1 diamètre |

## 2.4 Conditions aux limites

D'une manière générale, la mise en œuvre des méthodes de sous structuration cyclique avec technique de réduction ne devrait pas nécessiter de traitement particulier dans le cas où le secteur présente des nœuds se trouvant sur l'axe de rotation. On se trouverait simplement dans un cas où certains nœuds appartiennent simultanément aux interfaces droite et gauche. La prise en compte des conditions aux limites dans Code_Aster impose cependant de traiter séparément les deux cas :
– d'une part les relations de continuité entre les faces en regard, en excluant l'axe
– d'autre part les relations associés aux nœuds portés par l'axe de rotation, s'il en existe.

### 2.4.1 Équations de liaison entre les faces droites et gauche – axe exclu

Considérons une structure à répétitivité cyclique, et deux secteurs de base successifs de celle-ci :




Les liaisons entre secteurs étant considérées comme parfaites, on a les conditions entre les secteurs :

$$q_g^k = q_d^{k+1} \quad \text{Continuité des déplacements} \qquad (10)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$f_{L_g}^{k} = -f_{L_d}^{k+1} \quad \text{Réciprocité des efforts} \tag{11}$$

L'exposant indique le numéro du secteur considéré. Les conditions de liaison précédentes sont exprimées dans le repère global.

Par la relation (5) (propagation d'onde dans la structure) et en posant : $\beta = m\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} (q^{k+1})_{k+1} &= e^{j\beta}(q^{k})_{k} \\ (f^{k+1})_{k+1} &= e^{j\beta}(f^{k})_{k} \end{aligned} \tag{12}$$

L'indice $k$ signifie que la quantité est exprimée dans le repère lié au secteur $k$ : $R^k$ .

Les équations de liaison (12), écrites dans le repère lié au secteur $k$ font donc intervenir la matrice de passage du secteur $k$ au secteur $k+1$ . Cette matrice n'est autre que la matrice de rotation des degrés de liberté de droite vers ceux de gauche, soit la matrice de rotation d'axe $Oz$ et d'angle $\alpha$ , notée $\theta$ .

Nous obtenons donc le système suivant :

$$\begin{aligned} (q_g^k)_k &= e^{j\beta}\theta(q_d^k)_k \\ (f_{L_g}^k)_k &= -e^{j\beta}\theta(f_{L_d}^k)_k \end{aligned} \tag{13}$$

Les conditions aux limites (13) permettent de calculer les modes propres de l'ensemble de la structure à partir d'un seul secteur de base.

### 2.4.2 Équations vérifiées par les degrés de libertés portés par l'axe

Cette formalisation peut être étendue au cas des nœuds de l'axe. Nous obtenons alors, pour un secteur donné :

$$\begin{aligned} q_a &= e^{j\beta}\theta_a q_a \\ f_{L_a} &= -e^{j\beta}\theta_a f_{L_a} \end{aligned} \tag{14}$$

L'exponentielle complexe étant de module 1, la continuité des déplacements de l'axe peut également se mettre sous la forme plus classique

$$\theta_a q_a = e^{-j\beta} q_a \tag{15}$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres, et l'axe ne peut admettre de déplacements que si les couples $(q_a, e^{-j\beta})$ correspondent aux vecteurs propres et valeurs propres de la matrice de rotation $\theta_a$ . Les valeurs propres de $\theta_a$ sont $(1, e^{j\alpha}, e^{-j\alpha})$ , associées respectivement au vecteurs propres que sont l'axe de rotation, et à deux axes axes orthogonaux entre eux et orthogonaux à l'axe de rotation. Les seules valeurs de $\beta$ permettant d'obtenir des déplacement de l'axe sont donc :

- $\beta = 0$ , soit m=0. Les déplacements se font uniquement dans la direction de l'axe de rotation.
- $\beta = \alpha$ , soit m=1. Les déplacements se font dans une direction normale à l'axe de rotation.

D'autre part, les relations d'équilibres peuvent aussi se mettre sous la forme d'un problème aux valeurs propres

$$\theta_a f_{L_a} = e^{-j(\beta+\pi)} f_{L_a} = e^{-j(\beta-\pi)} f_{L_a} \tag{16}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Comme précédemment, ce système n'admet de solution non identiquement nulle que si $e^{-j(\beta-\pi)}$ est valeur propre de $\theta_a$, soit $\beta\in(\pi, \alpha+\pi, \pi-\alpha)$. Pour les cas m=0 et m=1, cela revient à avoir $\alpha=\pi/2$ ou $\alpha=\pi$. Si l'ouverture angulaire du secteur est différente de $\pi$ ou $\pi/2$, soit un problème à deux ou quatre secteurs, alors on aura nécessairement $f_{L_a}=0$ pour les cas à 0 et 1 diamètre.

# 3 Méthodes de sous-structuration cyclique

## 3.1 Méthode de Craig-Bampton

On considère le problème aux valeurs propres de la structure globale exprimé sur le secteur de base. Ce dernier est donc soumis aux forces de liaison qui lui sont appliquées par les secteurs contigus. Par ailleurs, le secteur de base vérifie les équations de liaison (13). Nous avons donc :

$$(K-\omega^2 M)q=f_L$$

$$q_g=e^{j\beta}\theta\, q_d \qquad (17)$$

$$f_{L_g}=-e^{j\beta}\theta\, f_{L_d}$$

Nous supposons que la base est composée des modes propres dynamiques du secteur de base encastré à ses interfaces, notés $\varphi$, et des modes contraints relatifs aux degrés de liberté d'interfaces droite et gauche, notés $\Psi_d$ et $\Psi_g$.

Compte tenu du fait que la seule contribution aux déplacements d'un degré de liberté d'interface provient du mode contraint correspondant, la transformation de RITZ peut s'écrire :

$$q=\begin{Bmatrix} q_i \\ q_d \\ q_g \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi & \Psi_d & \Psi_g\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_i \\ q_d \\ q_g \end{Bmatrix}=\Phi\eta \qquad (18)$$

Dès lors, en utilisant la transformation de RITZ, le système d'équations [éq 3.1-1] devient :

$$(\overline{K}-\omega^2\overline{M})\begin{Bmatrix} \eta_i \\ q_d \\ q_g \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi & \Psi_d & \Psi_g\end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix} 0 \\ f_{L_d} \\ f_{L_g} \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

$$q_g=e^{j\beta}\theta\, q_d$$
$$f_{L_g}=-e^{j\beta}\theta\, f_{L_d}$$

Les matrices surmontées d'une barre sont les projections des matrices éléments finis sur la base modale du secteur de base (matrices généralisées).

On peut démontrer que les modes contraints sont orthogonaux aux modes normaux vis à vis de la matrice de rigidité [bib5]. Ainsi, les produits correspondants sont nuls.

Adoptons les notations suivantes :

m : indice relatif aux modes propres du secteur,
d : indice relatif aux modes contraints de l'interface droite,



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

g : indice relatif aux modes contraints de l'interface gauche.

On peut donc écrire ces matrices sous la forme :

$$\overline{K}=\begin{bmatrix}\overline{K_{mm}} & 0 & 0\\ 0 & \overline{K_{dd}} & \overline{K_{dg}}\\ 0 & \overline{K_{gd}} & \overline{K_{gg}}\end{bmatrix} \qquad \overline{M}=\begin{bmatrix}\overline{M_{mm}} & \overline{M_{md}} & \overline{M_{mg}}\\ \overline{M_{dm}} & \overline{M_{dd}} & \overline{M_{dg}}\\ \overline{M_{gm}} & \overline{M_{gd}} & \overline{M_{gg}}\end{bmatrix} \tag{20}$$

Compte tenu de leur définition, les modes contraints vérifient :

$$\Psi_d=\begin{bmatrix}\Psi_{di}\\ \Psi_{dd}\\ \Psi_{dg}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Psi_{di}\\ Id\\ 0\end{bmatrix} \qquad \Psi_g=\begin{bmatrix}\Psi_{gi}\\ \Psi_{gd}\\ \Psi_{gg}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Psi_{gi}\\ 0\\ Id\end{bmatrix} \tag{21}$$

Le second membre de l'équation matricielle (19) devient :

$$\begin{bmatrix}\varphi_i^T & 0 & 0\\ \Psi_{di}^T & Id & 0\\ \Psi_{gi}^T & 0 & Id\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ f_{L_d}\\ f_{L_g}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ f_{L_d}\\ f_{L_g}\end{Bmatrix} \tag{22}$$

En tenant compte de ces notations, développons l'équation matricielle vérifiée par le secteur de base :

$$\begin{aligned}\overline{K_{mm}}\eta_i-\omega^2\left(\overline{M_{mm}}\eta_i+\overline{M_{md}}q_d+\overline{M_{mg}}q_g\right)&=0\\ \overline{K_{dd}}q_d+\overline{K_{dg}}q_g-\omega^2\left(\overline{M_{dm}}\eta_i+\overline{M_{dd}}q_d+\overline{M_{dg}}q_g\right)&=f_{L_d}\\ \overline{K_{gd}}q_d+\overline{K_{gg}}q_g-\omega^2\left(\overline{M_{gm}}\eta_i+\overline{M_{gd}}q_d+\overline{M_{gg}}q_g\right)&=f_{L_g}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}q_g&=e^{j\beta}\theta\, q_d\\ f_{L_g}&=-e^{j\beta}\theta\, f_{L_d}\end{aligned}$$

Introduisons les deux dernières équations de ce système dans les trois premières :

$$\begin{aligned}\left(\overline{K_{mm}}-\omega^2\overline{M_{mm}}\right)\eta_i-\omega^2\left(\overline{M_{md}}+e^{j\beta}\overline{M_{mg}}\theta\right)q_d&=0\\ \left(\overline{K_{dd}}+e^{j\beta}\overline{K_{dg}}\theta\right)q_d-\omega^2\left(\overline{M_{dm}}\eta_i+\left(\overline{M_{dd}}+e^{j\beta}\overline{M_{dg}}\theta\right)q_d\right)&=f_{L_d}\\ \left(\overline{K_{gd}}+e^{j\beta}\overline{K_{gg}}\theta\right)q_d-\omega^2\left(\overline{M_{gm}}\eta_i+\left(\overline{M_{gd}}+e^{j\beta}\overline{M_{gg}}\theta\right)q_d\right)&=-e^{j\beta}\theta\, f_{L_d}\end{aligned} \tag{24}$$

L'association des deux dernières équations permet d'éliminer les termes des forces de liaison. On aboutit alors à un problème aux valeurs propres final que l'on peut mettre sous la forme :

$$\left(\tilde{K}(\beta)-\omega^2\tilde{M}(\beta)\right)\tilde{q}=0 \tag{25}$$

Avec : $\tilde{q}=\begin{Bmatrix}\eta_i\\ q_d\end{Bmatrix}$

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix}\overline{K_{mm}} & 0\\ 0 & \overline{K_{dd}}+e^{j\beta}\overline{K_{dg}}\theta+e^{-j\beta}\theta^T\overline{K_{gd}}+\theta^T\overline{K_{gg}}\theta\end{bmatrix} \tag{26}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\tilde{M}=\begin{bmatrix} \overline{M_{mm}} & \overline{M_{md}}+e^{j\beta}\overline{M_{mg}}\theta \\ \overline{M_{dm}}+e^{-j\beta}\theta^T\overline{M_{gm}} & \overline{M_{dd}}+e^{j\beta}\overline{M_{dg}}\theta+e^{-j\beta}\theta^T\overline{M_{gd}}+\theta^T\overline{M_{gg}}\theta \end{bmatrix} \quad (27)$$

Les matrices de masse et de rigidité du problème final sont hermitiennes. Les valeurs propres solutions sont donc réelles. D'autre part, le problème est de taille réduite.

La résolution du problème aux valeurs propres complexes (25) permet de déterminer les coordonnées généralisées complexes des modes propres de la structure globale. Les valeurs complexes des déplacements du secteur de base dans le mode global sont données, à partir des coordonnées généralisées, par la formule suivante :

$$q'=\left[\varphi \quad \Psi_d+e^{j\beta}\theta\Psi_d\right]\tilde{q} \quad (28)$$

Pour déterminer les valeurs réelles des déplacements, il faut distinguer trois cas selon les valeurs du déphasage inter-secteur :

**Cas n° 1** : $\beta=0$ :

Les déplacements $q'$ donnés par la formule (28) sont alors à valeurs réelles. Tous les secteurs ont même déformée et vibrent en phase. On a alors un seul mode propre réel :

$$q=\mathrm{Re}(q')=q' \quad (29)$$

**Cas n°2** : $0<\beta<(N+1)/2$ :

Les déplacements fournis par la formule (28) sont à valeurs complexes. A chacun de ces modes complexes correspondent deux modes réels dégénérés orthogonaux :

$$q_1=\mathrm{Re}(q') \qquad q_2=\mathrm{Im}(q') \quad (30)$$

**Cas n°3** : $\beta=N/2$ ( => $N$ est pair ) :

Les déplacements fournis par (28) sont alors à valeurs complexes. Il y a $N/2$ diamètres nodaux, deux secteurs contigus vibrent alors en opposition de phase. Chaque mode complexe est à l'origine d'un seul mode réel :

$$q=\mathrm{Re}(q')=-\mathrm{Im}(q') \quad (31)$$

## 3.2 Méthode de Mac Neal

On considère le problème aux valeurs propres de la structure globale exprimé sur le secteur de base. Ce dernier est donc soumis aux forces de liaison qui lui sont appliquées par les secteurs contigus. Par ailleurs, le secteur de base vérifie les équations de liaison (13). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} (K-\omega^2 M)q&=f_L \\ q_g&=e^{j\beta}\theta\, q_d \\ f_{L_g}&=-e^{j\beta}\theta\, f_{L_d} \end{aligned} \quad (32)$$

La base modale utilisée pour réduire les dimensions du problème à résoudre, est une base modale à interfaces libres comprenant des modes dynamiques et les modes d'attache relatifs aux degrés de liberté des interfaces droite et gauche. Supposons que les degrés de liberté du secteur de base sont ordonnés de la manière suivante :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$q = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_d \\ q_g \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{degrés de liberté internes} \\ \text{degres de liberté de l 'interface droite} \\ \text{degrés de liberté de l 'interface gauche} \end{matrix} \quad (33)$$

Soient $B_d$ et $B_g$, les matrices rectangulaires d'extraction telles que :

$$q_d = B_d\, q \quad \text{et} \quad q_g = B_g\, q \quad (34)$$

La condition aux limites sur les déplacements devient avec ces notations :

$$B_g\, q = e^{j\beta}\theta\, B_d\, q \quad \Rightarrow B_{dg}\, q = 0$$
$$\text{avec } B_{dg} = e^{j\beta}\theta\, B_d - B_g \quad (35)$$

Pour les forces, la condition aux limites devient :

$$f_L = B_g^T f_{L_g} + B_d^T f_{L_d} \quad \Rightarrow \quad f_L = \left(B_g^T - e^{-j\theta}\, B_d^T\, \theta^T\right) f_{L_g} = -B_{dg}^T f_{L_g} \quad (36)$$

Considérons comme base, pour la transformation de RITZ, l'ensemble des modes propres dynamiques du secteur de base, en distinguant les modes identifiés et les modes inconnus :

$$q = [\varphi_1 \quad \varphi_2] \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

où l'indice 1 (resp. 2) fait référence aux modes connus (resp. inconnus). Dans la suite, nous supposerons que les modes propres sont normés à la masse modale unitaire.

En remplaçant $q$ par son expression en fonction des modes propres, et en multipliant à gauche par la transposée de la matrice des modes, les équations matricielles (32) et (35) deviennent :

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_1 - \omega^2\, Id\right)\eta_1 = \varphi_1^T f_L \\ &\left(\lambda_2 - \omega^2\, Id\right)\eta_2 = \varphi_2^T f_L \\ &B_{dg}\,\varphi_1\,\eta_1 + B_{dg}\,\varphi_2\,\eta_2 = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

où $\lambda$ est la matrice des rigidités généralisées (les masses généralisées sont unitaires).

On peut donc en tirer une formulation de $\eta_2$ :

$$\eta_2 = \left(\lambda_2 - \omega^2\, Id\right)^{-1} \varphi_2^T f_L \quad (39)$$

Dès lors, on peut éliminer $\eta_2$ du système d'équations (38). On obtient alors le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_1 - \omega^2\, Id\right)\eta_1 + \varphi_1^T B_{dg}^T f_{Lg} = 0 \\ &B_{dg}\,\varphi_1\,\eta_1 - B_{dg}\,\varphi_2\left(\lambda_2 - \omega^2\, Id\right)^{-1}\varphi_2^T B_{dg}^T f_{Lg} = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Le système final à résoudre peut s'écrire :

$$\left(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M}\right)\tilde{q} = 0 \quad (41)$$

Avec :

$$\tilde{q} = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ f_{L_g} \end{Bmatrix} \quad (42)$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les expressions des matrices de rigidité et de masse sont :

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \varphi_1 B_{dg}^T \\ B_{dg}\varphi_1 & -B_{dg} R_e(\omega) B_{dg}^T\end{bmatrix} \qquad \tilde{M}=\begin{bmatrix}Id & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{43}$$

La matrice $\left[R_e(\omega)\right]$ est la matrice de flexibilité dynamique résiduelle des modes non identifiés :

$$R_e(\omega)=\Phi_2(\lambda_2-\omega^2 Id)^{-1}\Phi_2^T \tag{44}$$

On approxime la flexibilité dynamique résiduelle par sa contribution statique, en prenant en compte les modes d'attache. Alors, la formule de restitution qui permet de calculer les valeurs complexes des déplacements à partir des coordonnées généralisées des modes solutions de (41) est la suivante :

$$q'=\left[\varphi_1 \quad -R_e(0) B_{dg}^T\right]\tilde{q} \tag{45}$$

Les valeurs réelles des déplacements sont déterminées, comme pour la méthode de Craig-Bampton, par les relations (29), (30) et (31).

## 3.3 Prise en compte des nœuds de l'axe - Méthode Craig & Bampton

D'un point de vue algorithmique, les modes d'interface associés aux degrés de libertés portés par les nœuds de l'axe ne sont pris en compte que pour les cas m = 0 et m = 1, qui sont les seuls cas pouvant présenter des mouvements non nuls de l'axe (c.f. Section 2.4).

**NB : Il est important de noter que les calculs prenant en compte les mouvements de l'axe ne peuvent être réalisés qu'avec une méthode de réduction de type Craig & Bampton. L'approche avec la méthode de Mac Neal n'est pas implémentée.**

On suppose dans ce paragraphe que les degrés de liberté portés par les nœuds de l'axe, au même titre que les nœuds d'interfaces droite et gauche, ont été bloqués pour le calcul des modes dynamiques du secteur de base et ont fait l'objet de calculs de modes contraints.

La base de projection est donc composée des modes propres dynamiques du secteur de base encastré à ses interfaces, notés $\varphi$ , et des modes contraints relatifs aux degrés de liberté d'interfaces droite, gauche et axe, notés $\Psi_d$ , $\Psi_g$ et $\Psi_a$ .

Comme nous l'avons vu à la section 2.4, si m est supérieur ou égal à 2, le déplacement des nœuds de l'axe est nul. La prise en compte des nœuds de l'axe n'a donc de sens que si m=0 ou m=1. En pratique, pour limiter l'occupation mémoire et le nombre d'opérations, les matrices sont assemblées en tenant compte des DDL de l'axe uniquement dans ces deux cas.

Le problème aux valeurs propres de la structure globale et les équations de liaison, exprimés sur cette base valent alors :

$$\left(\overline{K}-\omega^2\overline{M}\right)\begin{Bmatrix}\eta_i\\ q_d\\ q_g\\ q_a\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi & \Psi_d & \Psi_g & \Psi_a\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ f_{L_d}\\ f_{L_g}\\ f_{L_d}\end{Bmatrix} \tag{46}$$

$$q_g=e^{j\beta}\theta\, q_d \quad \text{et} \quad q_a=e^{j\beta}\theta\, q_a\,,$$
$$f_{L_g}=-e^{j\beta}\theta\, f_{L_g} \quad \text{et} \quad f_{L_a}=-e^{j\beta}\theta\, f_{L_a}$$

On peut donc écrire les matrices sous la forme :



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\overline{K}=\begin{bmatrix}\overline{K_{mm}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \overline{K_{dd}} & \overline{K_{dg}} & \overline{K_{da}}\\ 0 & \overline{K_{gd}} & \overline{K_{gg}} & \overline{K_{ga}}\\ 0 & \overline{K_{ad}} & \overline{K_{ag}} & \overline{K_{aa}}\end{bmatrix} \qquad \overline{M}=\begin{bmatrix}\overline{M_{mm}} & \overline{M_{md}} & \overline{M_{mg}} & \overline{M_{ma}}\\ \overline{M_{dm}} & \overline{M_{dd}} & \overline{M_{dg}} & \overline{M_{da}}\\ \overline{M_{gm}} & \overline{M_{gd}} & \overline{M_{gg}} & \overline{M_{ga}}\\ \overline{M_{am}} & \overline{M_{ad}} & \overline{M_{ag}} & \overline{M_{aa}}\end{bmatrix} \tag{47}$$

Compte tenu de leur définition, les modes contraints vérifient :

$$\Psi_d=\begin{bmatrix}\Psi_{di}\\ \Psi_{dd}\\ \Psi_{dg}\\ \Psi_{da}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Psi_{di}\\ Id\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \Psi_g=\begin{bmatrix}\Psi_{gi}\\ \Psi_{gd}\\ \Psi_{gg}\\ \Psi_{ga}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Psi_{gi}\\ 0\\ Id\\ 0\end{bmatrix} \qquad \Psi_a=\begin{bmatrix}\Psi_{ai}\\ \Psi_{ad}\\ \Psi_{ag}\\ \Psi_{aa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Psi_{ai}\\ 0\\ 0\\ Id\end{bmatrix} \tag{48}$$

Le second membre de l'équation matricielle (46) devient :

$$\begin{bmatrix}\varphi_i & 0 & 0 & 0\\ \Psi_{di} & Id & 0 & 0\\ \Psi_{gi} & 0 & Id & 0\\ \Psi_{ai} & 0 & 0 & Id\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ f_{L_d}\\ f_{L_g}\\ f_{L_a}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ f_{L_d}\\ f_{L_g}\\ f_{L_a}\end{Bmatrix} \tag{49}$$

La prise en compte des équations de liaison se fait par projection. On introduit

$$\tilde{q}=\begin{Bmatrix}\eta\\ q_d\\ q_a\end{Bmatrix} \tag{50}$$

et on considère le projecteur $\tilde{P}$ défini par

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}Id & 0 & 0\\ 0 & Id & 0\\ 0 & e^{j\beta}\theta & 0\\ 0 & 0 & e^{j\beta}\theta_a\end{bmatrix} \tag{51}$$

Le problème projeté sur $\tilde{P}$ devient

$$\tilde{P^H}\left(\overline{K}-\omega^2\overline{M}\right)\tilde{P}\tilde{q}=\tilde{P^H}f\ , \tag{52}$$

Ce problème vérifie naturellement les équations de liaison cinématiques, puisque qu'on a

$$\tilde{P}\tilde{q}=\begin{Bmatrix}\eta\\ q_d\\ e^{j\beta}\theta q_d\\ e^{j\beta}\theta_a q_a\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\eta\\ q_d\\ q_g\\ q_a\end{Bmatrix} \tag{53}$$

et les efforts de liaisons vérifient

$$\tilde{P^H}f=\begin{Bmatrix}0\\ f_{L_d}+e^{-j\beta}\theta^H f_{L_g}\\ e^{-j\beta}\theta_a^H f_{L_a}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \tilde{f}_{L_a}\end{Bmatrix} \tag{54}$$



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans le cas où l'ouverture angulaire du secteur est inférieure à $\pi$, et où on a strictement plus que deux secteurs, on a par ailleurs démontré que $f_{L_a}=0$ (section 2.4.2).

On aboutit alors à un problème aux valeurs propres final que l'on peut mettre sous la forme :

$$(\tilde{K}-\omega^2\tilde{M})\tilde{q}=0 \tag{55}$$

Avec :

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix} \overline{K_{mm}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{K_{dd}}+\overline{K_{dg}}\theta e^{j\beta}+e^{-j\beta}\theta^T\overline{K_{gd}}+\theta^T\overline{K_{gg}}\theta & \overline{K_{da}}\theta_a e^{j\beta}+\theta^T\overline{K_{ga}}\theta_a \\ 0 & e^{-j\beta}\theta_a^T\overline{K_{ad}}+\theta_a\overline{K_{ag}}\theta & \theta_a^T\overline{K_{aa}}\theta_a \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\tilde{M}=\begin{bmatrix} \overline{M_{mm}} & \overline{M_{md}}+\overline{M_{mg}}\theta e^{j\beta} & \overline{M_{ma}}\theta_a e^{j\beta} \\ \overline{M_{dm}}+e^{-j\beta}\theta^T\overline{M_{gm}} & \overline{M_{dd}}+\overline{M_{dg}}\theta e^{j\beta}+e^{-j\beta}\theta^T\overline{M_{gd}}+\theta^T\overline{M_{gg}}\theta & \overline{M_{da}}\theta_a e^{j\beta}+\theta^T\overline{M_{ga}}\theta_a \\ e^{-j\beta}\theta_a^T\overline{M_{am}} & e^{-j\beta}\theta_a^T\overline{M_{ad}}+\theta_a^T\overline{M_{ag}}\theta & \theta_a^T\overline{M_{aa}}\theta_a \end{bmatrix} \tag{57}$$

On restitue les déplacements complexes modaux par la formule suivante :

$$q'=\begin{bmatrix}\varphi & \Psi_d+e^{j\beta}\theta\Psi_d & \Psi_a\end{bmatrix}\tilde{q} \tag{58}$$

**NB : Cas particulier du problème à deux et quatre secteurs**

La formulation proposée reste licite dans le cas particulier du problème à deux secteurs, compte tenu de l'orthogonalité entre $q_a$ et $f_{L_a}$ dans le cas de la symétrie cyclique. En effet, les équations de liaison ( 14 ) conduisent à

$$q_a^H f_{L_a}=(e^{j\beta}\theta_a q_a)^H(-e^{j\beta}\theta_a f_{L_a})=-q_a^H f_{L_a}=0 \tag{59}$$

Par ailleurs, les solutions de (15) sont également solution du problème quadratique

$$\tilde{q}=\underset{\tilde{q}_0}{\mathrm{ArgMin}}\left(\tilde{q}_0^H\tilde{P}^H(\overline{K}-\omega^2\overline{M})\tilde{P}\tilde{q}_0-\tilde{q}_0^H\tilde{P}^H f_0\right) \tag{60}$$

Or, pour les solutions recherchée, vérifiant les conditions de raccordement entre face et au niveau de l'axe, on a, d'après (59)

$$\tilde{q}_0^H\tilde{P}^H f_0=\begin{Bmatrix}\eta_0^H & q_{0\mathrm{d}}^H & q_{0\mathrm{a}}^H\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\f_{L_{0\mathrm{a}}}\end{Bmatrix}=0 \tag{61}$$

Le problème (60) peut alors se mettre sous la forme

$$\tilde{q}=\underset{\tilde{q}_0}{\mathrm{ArgMin}}\left(\tilde{q}_0^H\tilde{P}^H(\overline{K}-\omega^2\overline{M})\tilde{P}\tilde{q}_0\right) \tag{62}$$

Compte tenu de la convexité du problème (62), les solutions du problème (60) vérifient donc également

$$\tilde{P}^H(\overline{K}-\omega^2\overline{M})\tilde{P}\tilde{q}=0 \tag{63}$$

Nota : la relation ( 59 ) indique également que le projecteur défini à la relation ( 51 ) n'est pas le seul admissible. Le terme $e^{j\beta}\theta_a$ peut être remplacé par $Id$ . Ce choix n'a pas été fait pour conserver une forme classique au problème réduit, semblable à celle obtenue quand il n'est pas



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

nécessaire de séparer les termes portés par l'axe et ceux portés par les interfaces droite et gauche. Par ailleurs, les valeurs propres du terme $e^{j\beta}\theta_a$ étant toutes de module 1, le conditionnement du problème global n'est pas affecté par ce changement.

# 4 Mise en œuvre dans *Code_Aster*

Le traitement du secteur de base est identique à celui des sous-structures dans la sous-structuration classique. Il fait intervenir les opérateurs CALC_MODES [U4.52.02], DEFI_INTERF_DYNA [U4.64.01] et DEFI_BASE_MODALE [U4.64.02].

Les modes propres de la structure à symétrie cyclique sont calculés par l'opérateur MODE_ITER_CYCL [U4.52.05] en fonction de la base de projection du secteur de base précédemment définie et du nombre de secteurs de la structure complète.

La restitution des résultats sur base physique est identique à la sous-structuration classique. Elle fait intervenir l'opérateur REST_SOUS_STRUC [U4.63.32] et éventuellement l'opérateur DEFI_SQUELETTE [U4.24.01].

# 5 Conclusion

Les principes de la sous structuration permettent d'exposer la transformation de RITZ et la recombinaison modale pour aboutir à la synthèse modale qui intègre ces deux techniques. Les règles de liaisonnement entre sous-structures sont explicitées.

Deux méthodes ont été développées dans *Code_Aster* : celle de Craig-Bampton et celle de Mac Neal. Nous présentons, ici, leurs particularités, aussi bien dans la définition de la base modale initiale, que dans son exploitation.

Après avoir exposé la définition d'une structure à symétrie cyclique et les propriétés qui en découlent, nous avons présenté les méthodes de sous-structuration cyclique mises en œuvre dans *Code_Aster*. Elles se révèlent très intéressantes pour le calcul des modes propres d'une structure à symétrie cyclique, telles que les rotors des machines tournantes dont elles profitent pleinement des caractéristiques géométriques et mécaniques.

# 6 Bibliographie

1. R. ROY, J. CRAIG & M. C. BAMPTON : "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis" AIAA Journal, (July 1968), Vol. 6, N° 7, p. 1313-1319.
2. R. H. MAC NEAL : "A hybrid method of component mode synthesis" Computers and Structures, (1971), Vol. 1, p. 581-601.
3. J. F. IMBERT : "Analyse des Structures par Eléments Finis" 1979, Cepadues Edition.
4. P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dynamique en éléments finis". Rapport EDF HP-61/90.149.
5. P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration cyclique en éléments finis". Rapport EDF HP-61/91.156
6. P. RICHARD : "Méthodes de sous-structuration dans le *Code_Aster*". Rapport EDF HP-61/92.149
7. J. PELLET : "Code de Mécanique Aster - Manuel de référence : Les éléments finis dans *Aster*" Clé : [R3.03.01] "Dualisation des conditions aux limites"



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

8. G. JACQUART : "Code de Mécanique *Aster* - Manuel de référence : Dynamique en base modale". Clé : R5.06.01 "Méthodes de RITZ en dynamique linéaire et non-linéaire"

9. T. KERBER : "Cahier des charges : mise en oeuvre de la sous-structuration harmonique" - Rapport D.E.R. HP-61/93.053

10. T. KERBER : "Sous-structuration harmonique dans le *Code_Aster*" - Rapport D.E.R. HP-61/93.104

11. C. VARE : "Cahier des charges de l'implémentation du calcul transitoire linéaire par sous-structuration dynamique dans le *Code_Aster*" - Rapport D.E.R. HP-61/94.135/B

12. C. VARE : "Documentations Utilisateur et Validation des opérateurs de calcul transitoire par sous-structuration" - Rapport D.E.R. HP-61/94.208/A

# 7 Description des versions du document

| Version Aster | Auteur(s) Organisme(s) | Description des modifications |
|---|---|---|
| 08/04/09 | *O. NICOLAS, G. ROUSSEAU, C. VARE (EDF-R&D/AMA, DPN/UTO)* | |



Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)