Loi de comportement élasto(visco)plastique en grandes déformations avec transformations métallurgiques

Résumé

Ce document présente un modèle de comportement thermo-élasto-(visco)plastique à écrouissage isotrope avec effets des transformations métallurgiques écrit en grandes déformations. Ce modèle peut s'utiliser pour des modélisations tridimensionnelles, axisymétriques et en déformations planes.

On présente l'écriture de ce modèle et son traitement numérique.

Pour comprendre ce document, il est pratiquement indispensable de lire les deux notes [R5.03.21] et [R4.04.02] consacrées aux modèles de comportement écrits, respectivement, en grandes déformations sans effets métallurgiques et en petites déformations avec effets métallurgiques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Introduction....3
2Notations....4
3Rappels du modèle métallurgique et du modèle grandes déformations....5
3.1Modèle avec transformations métallurgiques....5
3.2Modèle écrit en grandes déformations....6
3.2.1Présentation générale....6
3.2.2Cinématique....6
4Extension du modèle grandes déformations....8
4.1Aspect thermodynamique....8
4.2Extension....9
4.3Relations de comportement....9
4.4Les différentes relations....12
4.5Contraintes et variables internes....13
5Formulation numérique....14
5.1Intégration des différentes relations de comportement....14
5.2Expression de la matrice tangente....18
6Bibliographie....20
7Description des versions du document....20

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Ce document présente une loi de comportement thermo-élasto-(visco)plastique à écrouissage isotrope en grandes déformations qui prend en compte les effets des transformations métallurgiques. Ce modèle peut s'utiliser pour des problèmes tridimensionnels, axisymétriques et en déformations planes.

Cette loi représente un « assemblage » de deux modèles implantés dans *Code_Aster*, à savoir un modèle thermoélastoplastique avec écrouissage isotrope écrit en grandes déformations (mot-clé facteur DEFORMATION: 'SIMO_MIEHE', cf. [R5.03.21]) et un modèle petites déformations thermo-élasto-(visco)plastique avec effets des transformations métallurgiques (mot-clé facteur 'META_P_**_**' ou 'META_V_**_**' de COMPORTEMENT de l'opérateur STAT_NON_LINE). Le premier modèle de grandes déformations a donc été étendu pour tenir compte des conséquences des transformations métallurgiques sur la mécanique.

Pour comprendre ce document, il est pratiquement indispensable de lire les documents de référence [R5.03.21] et [R4.04.02] qui concernent, respectivement, le modèle grandes déformations sans effets métallurgiques et le modèle petites déformations avec effets métallurgiques. Néanmoins, pour faciliter la lecture de cette note, nous faisons quelques rappels sur ces deux modèles.

Pour justifier l'extension du modèle écrit en grandes déformations au modèle grandes déformations avec effets métallurgiques, nous reprenons quelques aspects théoriques extraits de [bib1] liés à l'écriture du modèle grandes déformations.

On présente ensuite les relations de comportement du modèle complet, son intégration numérique et les expressions de la matrice tangente (options FULL_MECA et RIGI_MECA_TANG).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Notations

On notera par :

$\mathbf{Id}$	matrice identité
$\mathrm{tr}\,A$	trace du tenseur $\mathbf{A}$
A^T	transposé du tenseur $\mathbf{A}$
$\det A$	déterminant de $\mathbf{A}$
$\langle X \rangle$	partie positive de X
$\tilde{A}$	partie déviatorique du tenseur $\mathbf{A}$ définie par $\tilde{A}=A-(\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,A)\,\mathbf{Id}$
:	produit doublement contracté : $A:B=\sum_{i,j} A_{ij}B_{ij}=\mathrm{tr}(\mathbf{AB^T})$
$\ddot{A}$	produit tensoriel : $(A\ddot{A}B)_{ijkl}=A_{ij}B_{kl}$
A_{eq}	valeur équivalente de von Mises définie par $A_{eq}=\sqrt{\frac{3}{2}\tilde{A}:\tilde{A}}$
$\tilde{N}_X A$	gradient : $\tilde{N}_X A=\frac{\partial A}{\partial X}$
$\mathrm{div}_x A$	divergence : $(\mathrm{div}_x A)_i=\sum_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$
λ , μ	coefficients de Lamé : $\lambda=\frac{Ev}{(1+v)(1-2\nu)}$, $m=\frac{E}{2(1+v)}$
E	module d'Young
ν	coefficient de Poisson
K	module de rigidité à la compression : $3\mathrm{K}=3\lambda+2\mathrm{m}=\frac{E}{(1-2\nu)}$
T	température
T_{ref}	température de référence
Z_g	proportion d'austénite
Z_i	proportion des quatre phases α : ferrite, perlite, bainite et martensite

Par ailleurs, dans le cadre d'une discrétisation en temps, toutes les quantités évaluées à l'instant précédent sont indicées par $^-$, les quantités évaluées à l'instant $t+\Delta t$ ne sont pas indicées et les incréments sont désignés par Δ . On a ainsi :

$$\Delta Q=Q-Q^-$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Rappels du modèle métallurgique et du modèle grandes déformations

3.1 Modèle avec transformations métallurgiques

Nous présentons uniquement ici les conséquences des transformations métallurgiques sur le comportement mécanique.

La détermination de l'évolution mécanique associée à un processus mettant en jeu des transformations métallurgiques nécessite au préalable un calcul thermo-métallurgique. Ce calcul thermo-métallurgique est découplé et permet la détermination des évolutions thermiques puis métallurgiques. Pour les modèles de comportement métallurgiques des aciers, on pourra consulter la note [R4.04.01].

Pour l'étude des transformations métallurgiques de l'acier, il existe cinq phases métallurgiques : la ferrite, la perlite, la bainite, la martensite (phases α) et l'austénite (phase γ).

Les effets des transformations métallurgiques (à l'état solide) sont de quatre types :

- les caractéristiques mécaniques du matériau qui subit les transformations sont modifiées. Plus précisemment, les caractéristiques élastiques (module d'YOUNG E et coefficient de Poisson ν) sont peu affectées alors que les caractéristiques plastiques, telle que la limite d'élasticité, le sont fortement,
- l'expansion ou la contraction volumique qui accompagne les transformations métallurgiques se traduit par une déformation (sphérique) de « transformation » qui se superpose à la déformation d'origine purement thermique. En général, on regroupe cet effet avec celui dû à la modification du coefficient de dilatation thermique α ,
- une transformation se déroulant sous contraintes peut donner naissance à une déformation irréversible et ce, même pour des niveaux de contraintes très inférieurs à la limite d'élasticité du matériau. On appelle « plasticité de transformation » ce phénomène. La déformation totale ε s'écrit alors :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{th} + \varepsilon^p + \varepsilon^{pt}$$

où ε^e , ε^{th} , ε^p et ε^{pt} sont, respectivement les déformations élastiques, thermiques, plastiques et de plasticité de transformation,

- on peut avoir lors de la transformation métallurgique un phénomène de restauration d'écrouissage. L'écrouissage de la phase mère n'est pas totalement transmis aux phases nouvellement créées. Celles-ci peuvent alors naître avec un état d'écrouissage vierge ou n'hériter que d'une partie, voire de la totalité, de l'écrouissage de la phase mère. La déformation plastique cumulée p n'est plus alors caractéristique de l'état d'écrouissage et il faut définir d'autres variables d'écrouissage pour chaque phase, notées r_k qui tiennent compte de la restauration. Les lois d'évolution de ces écrouissages diffèrent des lois habituelles de manière à permettre un « retour vers zéro » total, ou partiel, de ces paramètres lors des transformations.

On pourra trouver dans le document [R4.04.02] les expressions des différentes relations de comportement.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2 Modèle écrit en grandes déformations

3.2.1 Présentation générale

Ce modèle est une loi de comportement eulérienne thermo-élasto-plastique écrite en grandes déformations qui a été proposée par Simo et Miehe ([bib2]) qui tend sous l'hypothèse des petites déformations vers le modèle avec écrouissage isotrope et critère de von Mises décrit dans [R5.03.02]. Il permet de traiter non seulement les grandes déformations, mais également, de manière exacte, les grandes rotations.

Les caractéristiques essentielles de cette loi sont les suivantes :

- tout comme en petites déformations, on suppose l'existence d'une configuration relâchée, c'est-à-dire localement libre de contrainte, qui permet de décomposer la déformation totale en une partie thermoélastique et une partie plastique,
- la décomposition de cette déformation en des parties thermoélastique et plastique n'est plus additive comme en petites déformations (ou pour les modèles grandes déformations écrits en taux de déformation avec par exemple une dérivée de Jaumann) mais multiplicative,
- comme en petites déformations, les contraintes dépendent uniquement des déformations thermoélastiques,
- pour écrire la loi de comportement, on utilise le tenseur des contraintes de Kirchhoff τ qui est relié au tenseur de Cauchy σ par la relation $J\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$ où J représente la variation de volume entre les configurations initiale et actuelle,
- les déformations plastiques se font à volume constant. La variation de volume est alors uniquement due aux déformations thermo-élastiques,
- ce modèle conduit lors de son intégration numérique à un modèle incrémentalement objectif ce qui permet d'obtenir la solution exacte en présence de grandes rotations.

3.2.2 Cinématique

Nous faisons ici quelques rappels de base de mécanique en grandes déformations et sur le modèle de comportement.

Considérons un solide soumis à des grandes déformations. Soit Ω_0 le domaine occupé par le solide avant déformation et $\Omega(t)$ le domaine occupé à l'instant t par le solide déformé. Dans la configuration initiale Ω_0, la position de toute particule du solide est désignée par $\mathbf{X}$ (description lagrangienne). Après déformation, la position à l'instant t de la particule qui occupait la position $\mathbf{X}$ avant déformation est donnée par la variable $\mathbf{x}$ (description eulérienne).

Le mouvement global du solide est défini, avec $\mathbf{u}$ le déplacement, par :

$$\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X},t)=\mathbf{X}+\mathbf{u}$$

Pour définir le changement de métrique au voisinage d'un point, on introduit le tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}=\frac{\partial\hat{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{X}}=\mathbf{Id}+\nabla_X\mathbf{u}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les transformations de l'élément de volume et de la masse volumique valent :

$$d\,\Omega = J d\,\Omega_o \quad \text{avec} \quad J = \det \mathbf{F} = \frac{\rho_o}{\rho}$$

où ρ_o et ρ sont respectivement la masse volumique dans les configurations initiale et actuelle.

Pour écrire maintenant le modèle grandes déformations, on suppose l'existence d'une configuration relâchée Ω^r, c'est-à-dire localement libre de contrainte, qui permet alors de décomposer la déformation totale en des parties thermoélastique et plastique, cette décomposition étant multiplicative.

On notera par $\mathbf{F}$ le tenseur gradient qui fait passer de la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle $\Omega(t)$, par $\mathbf{F^p}$ le tenseur gradient qui fait passer de la configuration Ω_0 à la configuration relâchée Ω^r, et $\mathbf{F^e}$ de la configuration Ω^r à $\Omega(t)$. L'indice p se réfère à la partie plastique, l'indice e à la partie thermoélastique.

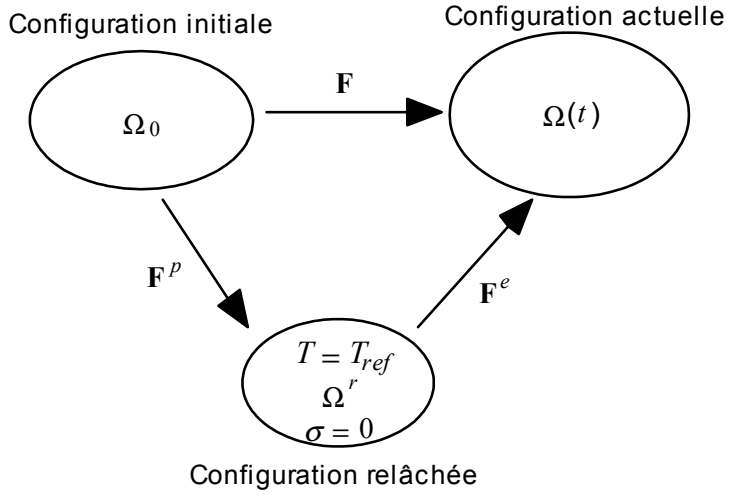


Figure 3.2.2-a : Décomposition du tenseur gradient $\mathbf{F}$ en une partie élastique $\mathbf{F^e}$ et plastique $\mathbf{F^p}$

Par composition des mouvements, on obtient la décomposition multiplicative suivante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F^e}\,\mathbf{F^p}$$

Les déformations thermoélastiques sont mesurées dans la configuration actuelle avec le tenseur eulérien de Cauchy-Green gauche $\mathbf{b^e}$ et les déformations plastiques dans la configuration initiale par le tenseur $\mathbf{G^p}$ (description lagrangienne). Ces deux tenseurs sont définis par :

$$\mathbf{b^e} = \mathbf{F^e}\,\mathbf{F^{eT}}\ ,\ \mathbf{G^p} = (\mathbf{F^{pT}}\,\mathbf{F^p})^{-1} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{b^e} = \mathbf{F}\mathbf{G^p}\,\mathbf{F^T}$$

Le modèle présenté est écrit de telle manière à distinguer les termes isochores des termes de changement de volume. On introduit pour cela les deux tenseurs suivants :

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\,\mathbf{F} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{b}}^e = J^{-2/3}\,\mathbf{b^e} \quad \text{avec} \quad J = \det \mathbf{F}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Par définition, on a : $\det \bar{\mathbf{F}}=1$ et $\det \bar{\mathbf{b}}^{e}=1$.

Dans ce modèle, les déformations plastiques se font à volume constant si bien que :

$$J^{p}=\det \mathbf{F^{p}}=1 \text{ d'où } J=J^{e}=\det \mathbf{F^{e}}$$

On trouvera dans le document de référence ([R5.03.21]) les expressions des relations de comportement.

4 Extension du modèle grandes déformations

L'objectif de ce paragraphe est de justifier l'extension du modèle écrit en grandes déformations pour tenir compte des transformations métallurgiques. En particulier, pour tenir compte de la plasticité de transformation, nous ne pouvons pas additionner comme en petites déformations un terme supplémentaire de déformation lié à la plasticité de transformation. En fait, sur l'aspect décomposition cinématique, la prise en compte de la plasticité de transformation ne change rien. On a toujours la décomposition $\mathbf{F}=\mathbf{F^{e}}\mathbf{F^{p}}$ où $\mathbf{F^{p}}$ contient toute l'information sur la déformation « anélastique » (donc y compris celle liée à la plasticité de transformation). C'est seulement au niveau comportement que se fait, en particulier, le traitement de la plasticité de transformation.

Dans un premier temps, nous rappelons quelques éléments théoriques qui permettent d'écrire le modèle sans effets métallurgiques puis nous montrons les modifications à apporter pour tenir compte des effets métallurgiques et de la plasticité de transformation en particulier.

4.1 Aspect thermodynamique

L'écriture de la loi de comportement grandes déformations est issue du cadre thermodynamique avec variables internes. Le formalisme thermodynamique repose sur deux hypothèses. La première est que l'énergie libre ne dépend que des déformations élastiques $\mathbf{b^{e}}$ et des variables internes liées à l'écrouissage du matériau (ici la déformation plastique cumulée associée à la variable d'écrouissage isotrope R). Ceci permet, grâce à l'inégalité de Clausius-Duhem, d'obtenir les lois d'état. La seconde hypothèse est le principe de dissipation maximale, qui correspond à la donnée d'un potentiel de dissipation, qui permet alors de déterminer les lois d'évolution des variables internes.

L'énergie libre est donnée par :

$$\psi=\psi(\mathbf{b^{e}}, p)=\psi^{e}(\mathbf{b^{e}})+\psi^{p}(p)$$

On obtient par la première hypothèse, les lois d'état, soit :

$$\boldsymbol{\tau}=2\rho_{0}\frac{\partial \psi^{e}}{\partial \mathbf{b^{e}}}\mathbf{b^{e}} \text{ et } R=\rho_{0}\frac{\partial \psi^{p}}{\partial p}$$

Il reste pour la dissipation :

$$\boldsymbol{\tau}:(-\frac{1}{2}\mathbf{F}\dot{\mathbf{G}}^{p}\mathbf{F^{T}}\mathbf{b^{e-1}})-R\,\dot{p}\geq 0$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Moyennant l'introduction d'une fonction seuil telle que $f(\boldsymbol{\tau}, R) \leq 0$, le principe de dissipation maximale (ou de manière équivalente la donnée d'un pseudo-potentiel de dissipation [bib3]) permet d'en déduire, par la propriété de normalité, les lois d'évolution, soit :

$$-\frac{1}{2}\mathbf{F}\dot{\mathbf{G}}^{p}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}^{\mathbf{e}-\mathbf{1}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \text{ et } \dot{p}=-\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial R}$$

Il s'agit ici d'un modèle de plasticité associée.

4.2 Extension

Pour la restauration d'écrouissage, il n'y a pas de difficultés particulières liées aux grandes déformations. Il suffit que l'énergie libre dépende, non plus de la déformation plastique cumulée, mais des variables internes d'écrouissage r_k associées aux variables d'écrouissages $Z_k.R_k$ de chacune des phases métallurgiques.

Pour tenir compte maintenant des déformations dues à la plasticité de transformation, on propose d'additionner un terme supplémentaire dans la loi d'écoulement de la déformation plastique $\mathbf{G^p}$ qui dérive d'un potentiel de dissipation Ω .

On obtient ainsi pour les lois d'état :

$$\boldsymbol{\tau}=2\rho_0\frac{\partial \psi^{e}}{\partial \mathbf{b}^{\mathbf{e}}}\mathbf{b}^{\mathbf{e}} \text{ et } Z_k.R_k=\rho_0\frac{\partial \psi^{p}}{\partial r_k}$$

et pour les lois d'évolution :

$$-\frac{1}{2}\mathbf{F}\dot{\mathbf{G}}^{p}\mathbf{F}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}^{\mathbf{e}-\mathbf{1}}=\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}+\underbrace{\frac{\partial \Omega^{pt}}{\partial \boldsymbol{\tau}}}_{\text{plasticité de transformation}}$$

$$\dot{r}_k=-\dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial (Z_k.R_k)}-\underbrace{\frac{\partial \Omega^{r}}{\partial (Z_k.R_k)}}_{\substack{\text{restauration d'écrouissage}\\ \text{métallurgique et visqueux}}}$$

$$\Omega=\Omega^{pt}(t)+\Omega^{r}$$

On choisit les potentiels Ω^{pt} et Ω^{r} , liés respectivement à la plasticité de transformation et à la restauration d'écrouissage, de telle manière à retrouver, sous l'hypothèse des petites déformations, les mêmes lois d'évolution que celles du modèle avec effets métallurgiques écrit en petites déformations.

4.3 Relations de comportement

On se place dans le cas d'un écrouissage isotrope linéaire.

La partition des déformations implique :

$$\bar{\mathbf{b}}^{e}=\bar{\mathbf{F}}\,\mathbf{G}^{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{F}}^{T} \text{ avec } \bar{\mathbf{F}}=J^{-1/3}\mathbf{F} \text{ , } J=\det\mathbf{F} \text{ et } \bar{\mathbf{b}}^{e}=J^{-2/3}\mathbf{b}^{\mathbf{e}}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les relations de comportement sont données par :

- Relation contrainte - déformation thermoélastique :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mu\, \tilde{\tilde{\mathbf{b}}}^{e}$$

$$\mathrm{tr}\,\tau = \frac{3\mathrm{K}}{2}(J^2-1) - \frac{9\mathrm{K}}{2}\varepsilon^{th}\left(J+\frac{1}{J}\right)$$

$$\epsilon^{th} = Z_{\gamma}\left[\alpha_{\gamma}(T-T_{ref}) - (1-Z_{\gamma}^{r})\,\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T\,ref}\right] + \left(\sum_{i=1}^{4} Z_i\right)\left[\alpha_f(T-T_{ref}) + Z_{\gamma}^{r}\,\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T\,ref}\right]$$

où : Z_{γ}^{r} caractérise la phase métallurgique de référence

$Z_{\gamma}^{r}=1$ lorsque la phase de référence est la phase austénitique,

$Z_{\gamma}^{r}=0$ lorsque la phase de référence est la phase ferritique.

$\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T_{ref}} = \varepsilon_{f}^{th}(T_{ref}) - \varepsilon_{\gamma}^{th}(T_{ref})$ traduit la différence de compacité entre les phases ferritiques et austénitique à la température de référence T_{ref},

α_f est le coefficient de dilatation des quatre phases ferritiques et α_{γ} celui de la phase austénitique.

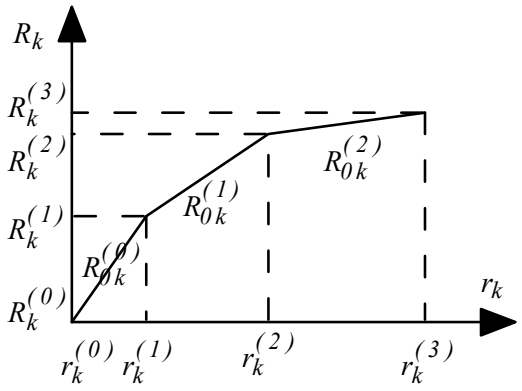
- Seuil de plasticité :

$$f = \tau_{eq} - R - \sigma_y$$

R est la variable d'écrouissage du matériau multiphasé, qui s'écrit :

$$R = (1-\bar{f}(Z))R_{\gamma} + \frac{\bar{f}(Z)}{Z}\sum_{i=1}^{4} Z_i . R_i \;,\quad Z = \sum_{i=1}^{4} Z_i$$

où R_k est la variable d'écrouissage de la phase k qui peut être linéaire ou non linéaire par rapport à r_k et $\bar{f}(Z)$ une fonction dépendant de Z telle que $\bar{f}(Z)\in[0,1]$.
Dans le cas linéaire, on a $R_k = R_{0\mathrm{k}}\, r_k$ où $R_{0\mathrm{k}}$ est la pente d'écrouissage de la phase k .
Dans le cas non linéaire, on écrit : $R_k = R_k^{(i)} + R_{0\mathrm{k}}^{(i)}(r - r_k^{(i)})$ où les significations de $R_k^{(i)}$, $R_{0\mathrm{k}}^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$ sont représentées sur la figure ci-dessous.



Courbe d'écrouissage non linéaire

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La limite d'élasticité σ_y vaut :

Si $Z \neq 0$, $\sigma_y = (1-\bar{f}(Z))\sigma_{y\gamma} + \bar{f}(Z)\sigma_{y\alpha}$, $\sigma_{y\alpha} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} Z_i s_{y\alpha i}}{Z}$

Si $Z = 0$, $\sigma_y = \sigma_{y\gamma}$

où $\sigma_{y\alpha i}$ sont les quatre limites d'élasticité des phases ferritiques, $\sigma_{y\gamma}$ celle de la phase austénitique.

- Lois d'évolution :

$$\bar{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{G}}^p\bar{\mathbf{F}}^T = -\dot{p}\frac{3}{\tau_{eq}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}\bar{\mathbf{b}}^e - 3\tilde{\boldsymbol{\tau}}\bar{\mathbf{b}}^e\sum_{i=1}^{4} K_i F_i^{'}(1-Z_\gamma)\langle\dot{Z}_i\rangle$$

$$\dot{r}_\gamma = \dot{p} + \frac{\sum_{i=1}^{4}\langle -\dot{Z}_i\rangle(\theta_{i\gamma}r_i - r_\gamma)}{Z_\gamma} \underbrace{-(Cr_{moy})^m}_{\text{uniquement en viscosité}} \quad \text{si} \quad Z_\gamma > 0$$

$$\dot{r}_i = \dot{p} + \frac{\langle\dot{Z}_i\rangle(\theta_{\gamma i}r_\gamma - r_i)}{Z_i} \underbrace{-(Cr_{moy})^m}_{\text{uniquement en viscosité}} \quad \text{si} \quad Z_i > 0$$

$$r_{\text{moy}} = \sum_{k=1}^{5} Z_k r_k \ , \ C = \sum_{k=1}^{5} Z_k C_k \ , \ m = \sum_{k=1}^{5} Z_k m_k$$

où K_i , $F_i^{'}$, C_i et m_i sont des données du matériau associées à la phase i , $\theta_{\gamma i}$ le coefficient de restauration d'écrouissage lors de la transformation γ en i ($\theta_{\gamma i} \in [0,1]$) et $\theta_{i\gamma}$ le coefficient de restauration d'écrouissage lors de la transformation i en γ ($\theta_{i\gamma} \in [0,1]$).

Toutes les données matériau sont renseignées dans l'opérateur DEFI_MATERIAU ([U4.43.01]) sous les différents mot-clé facteurs ELAS_META(_F0) et META_**.

Pour un modèle de plasticité, le multiplicateur plastique est obtenu en écrivant la condition de cohérence $\dot{f} = 0$ et on a :

$$\dot{p} \geq 0, f \leq 0 \text{ et } \dot{p} f = 0$$

Dans le cas visqueux, $\dot{p}$ s'écrit :

$$\dot{p} = \left(\frac{\langle f\rangle}{h}\right)^n$$

ou de manière équivalente :

$$\langle f\rangle = (1-\bar{f}(Z))\eta_\gamma \dot{p}^{1/n_\gamma} + \frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4} Z_i \eta_i \dot{p}^{1/n_i}$$

où n_i et η_i sont les coefficients de viscosité du matériau associés à la phase i qui dépendent éventuellement de la température.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le calcul de $\bar{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{G}}^p\bar{\mathbf{F}}^T$ donne :

$$\bar{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{G}}^p\bar{\mathbf{F}}^T=-3(A\tau_{eq}+\dot{p})(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\bar{\mathbf{b}}^e\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}}+\frac{\tau_{eq}}{\mu}\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{t_{eq}^2})$$

où on a posé $A=\sum_{i=1}^{4}K_iF_i^{'}\langle\dot{Z}_i\rangle$.

Puisque $\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}/\tau_{eq}\|\leq 1$ et $\|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\,\tilde{\boldsymbol{\tau}}/\tau_{eq}^2\|\leq 1$, le second terme de l'expression ci-dessus peut être négligé (devant 1) pour des matériaux métalliques dans la mesure où :

$$\frac{\tau_{eq}}{\mu}=\frac{R+\sigma_y}{\mu}\approx 10^{-3}\ll 1\leq\operatorname{tr}\bar{\boldsymbol{b}}^e$$

$\operatorname{tr}\bar{\mathbf{b}}^e\geq 1$ car le tenseur $\bar{\mathbf{b}}^e$ est symétrique, défini positif et $\det\bar{\mathbf{b}}^e=1$.

C'est cette simplification de la loi d'évolution de $\mathbf{G^p}$ qui permet d'intégrer aisément la loi de comportement c'est-à-dire de la ramener à la résolution d'une équation scalaire non linéaire. On prendra donc par la suite :

$$\bar{\mathbf{F}}\dot{\mathbf{G}}^p\bar{\mathbf{F}}^T\approx-\left(\dot{p}+\tau_{eq}A\right)\frac{\operatorname{tr}\bar{\boldsymbol{b}}^e}{\tau_{eq}}\tilde{\tau}\qquad\text{éq 4.3-1}$$

4.4 Les différentes relations

Dans l'opérateur STAT_NON_LINE, on accède à ces différents modèles en utilisant les mot-clé facteurs suivants :

```
| COMPORTEMENT : (
                 RELATION :       / 'META_P_IL'
                                  / 'META_P_INL'
                                  / 'META_P_IL_PT'
                                  / 'META_P_INL_PT'
                                  / 'META_P_IL_RE'
                                  / 'META_P_INL_RE'
                                  / 'META_P_IL_PT_RE'
                                  / 'META_P_INL_PT_RE'
                                  / 'META_V_IL'
                                  / 'META_V_INL'
                                  / 'META_V_IL_PT'
                                  / 'META_V_INL_PT'
                                  / 'META_V_IL_RE'
                                  / 'META_V_INL_RE'
                                  / 'META_V_IL_PT_RE'
                                  / 'META_V_INL_PT_RE'

                 DEFORMATION :    /'SIMO_MIEHE'

               )
```

Nous rappelons uniquement ici la signification des lettres pour les comportements META :

- P_IL : plasticité à écrouissage isotrope linéaire,
- P_INL : plasticité à écrouissage isotrope non linéaire,
- V_IL : viscoplasticité à écrouissage isotrope linéaire,
- V_INL : viscoplasticité à écrouissage isotrope non linéaire,
- PT : plasticité de transformation,
- RE : restauration d'écrouissage d'origine métallurgique.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Exemple : 'META_V_INL_RE' = loi élastoviscoplastique à écrouissage isotrope non linéaire avec restauration d'écrouissage mais sans prise en compte de la plasticité de transformation

Les différentes caractéristiques du matériau sont données dans l'opérateur DEFI_MATERIAU. On renvoie le lecteur à la note [R4.04.02] pour la signification des mot-clé facteurs de cet opérateur.

Attention :

Si l'écrouissage isotrope est linéaire, on renseigne sous le mot clé META_ECRO_LINE de DEFI_MATERIAU , le module d'écrouissage c'est-à-dire la pente dans le plan contrainte – déformation.
Par contre, si l'écrouissage isotrope est non linéaire, on donne directement sous le mot clé META_TRACTION de DEFI_MATERIAU , la courbe écrouissage isotrope R *(* $R=\tau-\sigma_y$ *) en fonction de la déformation plastique cumulée* p *(* $p=\varepsilon-\frac{\tau}{E}$ *).*

Remarque :

L'utilisateur doit bien s'assurer que la courbe de traction « expérimentale » utilisée pour en déduire la pente d'écrouissage est bien donnée dans le plan contrainte rationnelle $\sigma=F/S$ *- déformation logarithmique* $\ln(1+\Delta l/l_0)$ où l_0 *est la longueur initiale de la partie utile de l'éprouvette,* Δl *la variation de longueur après déformation,* F *la force appliquée et* S *la surface actuelle. On remarquera que* $\sigma=F/S=\frac{F}{S_0}\frac{l}{l_0}\frac{1}{J}$ *d'où* $\tau=J\sigma=\frac{F}{S_0}\frac{l}{l_0}$ *. En général, c'est bien la quantité* $\frac{F}{S_0}\frac{l}{l_0}$ *qui est mesurée par les expérimentateurs et ceci donne directement la contrainte de Kirchhoff utilisée dans le modèle de Simo et Miehe.*

4.5 Contraintes et variables internes

Les contraintes de sortie sont les contraintes de Cauchy σ , donc mesurées sur la configuration actuelle.
Pour l'ensemble des relations META_**, les variables internes produites dans *Code_Aster* sont :

- V1 : r_1 variable d'écrouissage pour la ferrite,
- V2 : r_2 variable d'écrouissage pour la perlite,
- V3 : r_3 variable d'écrouissage pour la bainite,
- V4 : r_4 variable d'écrouissage pour la martensite,
- V5 : r_5 variable d'écrouissage pour l'austénite,
- V6 : indicateur de plasticité (0 si le dernier incrément calculé est élastique ; 1 sinon),
- V7 : R le terme d'écrouissage isotrope de la fonction seuil,
- V8 : la trace divisée par trois du tenseur de déformation élastique $\bar{b}^e$ soit $\frac{1}{3}tr\,\bar{\boldsymbol{b}}^e$.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Formulation numérique

Pour la formulation variationnelle, il s'agit de la même que celle donnée dans la note [R5.03.21] et qui se reporte à la loi de comportement grandes déformations. Nous rappelons uniquement qu'il s'agit d'une formulation eulérienne, avec réactualisation de la géométrie à chaque incrément et à chaque itération, et que l'on tient compte de la rigidité de comportement et de la rigidité géométrique.
Nous présentons maintenant l'intégration numérique de la loi de comportement et donnons l'expression de la matrice tangente (options FULL_MECA et RIGI_MECA_TANG).

5.1 Intégration des différentes relations de comportement

Dans le cas d'un comportement incrémental, mot-clé facteur COMPORTEMENT, connaissant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^-$, les variables internes r_k^-, la trace divisée par trois du tenseur de déformations élastiques $\frac{1}{3} tr\ \bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}-}$, les déplacements $\mathbf{u}^-$ et $\Delta \mathbf{u}$, les températures T^- et T, et les proportions des différentes phases métallurgiques Z_k, ΔZ_k, on cherche à déterminer $(\sigma, r_k, \frac{1}{3} tr\ \bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}})$.

Les déplacements étant connus, les gradients de la transformation de Ω_0 à Ω^-, noté $\mathbf{F}^-$, et de Ω^- à $\Omega(t)$, noté $\Delta \mathbf{F}$, sont connus.
On posera par la suite :

$$DA=\sum_{i=1}^{4} K_i F_i^{'} \langle DZ_i \rangle \ , \quad \Delta G_\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{4} \langle -\Delta Z_i \rangle (\theta_{i\gamma} r_i^- - r_\gamma^-)}{Z_\gamma} \quad \text{et}$$

$$\Delta G_i = \frac{\langle \Delta Z_i \rangle (\theta_{\gamma i} r_\gamma^- - r_i^-)}{Z_i} \quad (i=1,4)$$

La discrétisation **implicite** de la loi donne :

$$\mathbf{F}=\Delta \mathbf{F}\ \mathbf{F}^-$$
$$J=\det \mathbf{F}$$
$$\bar{\mathbf{F}}=J^{-1/3}\mathbf{F}$$
$$\bar{\mathbf{b}}^e=J^{-2/3}\mathbf{b}^{\mathbf{e}}$$
$$J\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\tau}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}=\mu\ \tilde{\bar{\mathbf{b}}}^e$$
$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\tau}=\frac{3\mathrm{K}}{2}(J^2-1)-\frac{9\mathrm{K}}{2}\varepsilon^{th}\left(J+\frac{1}{J}\right)$$
$$\varepsilon^{th}=Z_\gamma\left[\alpha_\gamma(T-T_{ref})-(1-Z_\gamma^r)\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T\,ref}\right]+\left(\sum_{i=1}^{4} Z_i\right)\left[\alpha_f(T-T_{ref})+Z_\gamma^r\Delta\varepsilon_{f\gamma}^{T\,ref}\right]$$
$$f=\tau_{eq}-(1-\bar{f})R_\gamma-\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4} Z_i R_i-\sigma_y$$
$$\bar{\mathbf{b}}^e=\bar{\mathbf{F}}\mathbf{G}^{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{F}}^T=\bar{\mathbf{F}}\mathbf{G}^{\mathbf{p}-}\bar{\mathbf{F}}^T-\frac{\Delta p\ \mathrm{tr}\ \bar{\mathbf{b}}^e}{\tau_{eq}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}-\Delta A\ \mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^e\tilde{\boldsymbol{\tau}}$$

Si $Z_\gamma>0$ alors $\Delta r_\gamma=\Delta p+\Delta G_\gamma-\underbrace{\Delta t(Cr_{moy}^-)^m}_{\text{uniquement en viscosité}}$, sinon $r_\gamma^-=0$ et $\Delta r_\gamma=0$

Si $Z_i>0$, $\Delta r_i=\Delta p+\Delta G_i-\underbrace{\Delta t(Cr_{moy}^-)^m}_{\text{uniquement en viscosité}}$, sinon $r_i^-=0$ et $\Delta r_i=0$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Dans la résolution de ce système, seule la contrainte déviatorique $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ est inconnue car la trace de $\boldsymbol{\tau}$ est fonction uniquement de J (connue).
On introduit $\boldsymbol{\tau}^{Tr}$, le tenseur de Kirchhoff qui résulte d'une prédiction élastique (Tr : trial, en anglais essai) :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{Tr}=\mu\,\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^{eTr}$$

où

$$\bar{\mathbf{b}}^{eTr}=\bar{\mathbf{F}}\,\mathbf{G}^{\mathbf{p}-}\,\bar{\mathbf{F}}^{T}=\Delta\,\bar{\mathbf{F}}\,\bar{\mathbf{b}}^{e-}\,\Delta\,\bar{\mathbf{F}}^{T}\ ,\ \Delta\,\bar{\mathbf{F}}=(\Delta J)^{-1/3}\,\Delta\mathbf{F}\ \text{ et }\ \Delta J=\det(\Delta\mathbf{F})$$

On obtient $\bar{\mathbf{b}}^{e-}$ à partir des contraintes $\boldsymbol{\tau}^{-}$ par la relation contrainte - déformation thermoélastique et à partir de la trace du tenseur des déformations élastiques.

$$\bar{\mathbf{b}}^{e-}=\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{-}}{\mu^{-}}+\frac{1}{3}tr\ \bar{\boldsymbol{b}}^{e-}$$

On obtient pour le tenseur de Kirchhoff $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}=\mu\,\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^{eTr}-\mu\,\Delta\,p\frac{\mathrm{tr}\ \bar{\mathbf{b}}^{eTr}}{\tau_{eq}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}-\mu\,\Delta\,\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^{eTr}\tilde{\boldsymbol{\tau}}$$

Si $f<0$, on a alors $\Delta\,p=0$ et :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}=\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{Tr}}{1+\mu\,\Delta\,\mathrm{A}\,\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^{eTr}}$$

sinon on obtient :

$$\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^{e}=\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^{eTr}$$

$$1+\mu\,\Delta\,p\frac{\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^{eTr}}{\tau_{eq}}$$

¿

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}\left[+\mu\,\Delta\,\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}¿¿eTr\right]=\tilde{\tau}^{Tr}$$

En calculant la contrainte équivalente, on obtient l'équation scalaire en $\Delta\,p$ suivante :

$$\tau_{eq}+\mu\,\Delta\,p\,\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^{eTr}+\mu\,\Delta\,A\tau_{eq}\,\mathrm{tr}\ \bar{\boldsymbol{b}}^{eTr}=\tau_{eq}^{Tr}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Expression de τ_{eq} :

En plasticité : $\tau_{eq}=\sigma_y+R'Dp+D(r^-;T,Z)$
avec

$$R'=(1-\bar{f})R_{0\gamma}+\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4}Z_i R_{0i}$$

et $D(r^-;T,Z)=[1-\bar{f}]R_\gamma(r_\gamma^-+\Delta G_\gamma)+\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4}Z_i R_i(r_i^-+\Delta G_i)$

En viscosité :

$$\tau_{eq}=\sigma_y+R'\Delta p+D(r^-;T,Z)+(1-\bar{f}(Z))\eta_\gamma(\Delta p/\Delta t)^{1/n_\gamma}+\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4}Z_i\eta_i(\Delta p/\Delta t)^{1/n_i}$$

avec

$$D(r^-;T,Z)=[1-\bar{f}]R_\gamma(r_\gamma^-+DG_\gamma-\Delta t(\mathrm{Cr}_{\mathrm{moy}}^-)^m)+\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4}Z_i R_i(r_i^-+\Delta G_i-\Delta t(\mathrm{Cr}_{\mathrm{moy}}^-)^m)$$

Δp vérifie :

$$(1-\bar{f}(Z))\eta_\gamma(\Delta p/\Delta t)^{1/n_\gamma}+\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4}Z_i\eta_i(\Delta p/\Delta t)^{1/n_i}=\frac{\tau_{eq}^{Tr}-\mu\Delta p\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{b}^{\bar{e}Tr}}{1+\mu\Delta A'\mathrm{tr}\,\boldsymbol{b}^{\bar{e}Tr}}-D(r^-;T,Z)-\sigma_y-R'\Delta p$$

La résolution est faite dans *Code_Aster* par une méthode des sécantes avec intervalle de recherche [bib4].

Remarque :

Dans le cas d'un écrouissage isotrope non linéaire, les pentes d'écrouissage R_{0k} et les écrouissages R_k dans les expressions de R' et $D(r^-;T,Z)$ correspondent aux variables r_k prises à l'instant t , c'est-à-dire $r_k=r_k^-+\Delta G_k+\Delta p-\Delta t(Cr_{moy}^-)^m$. Or, comme on ne connaît pas à priori la valeur de ces variables r_k , on résout l'équation en Δp en prenant les pentes R_{0k} et les écrouissages R_k pour les quantités $r_k^-+\Delta G_k-\Delta t(Cr_{moy}^-)^m$. Une fois résolue l'équation en Δp , on vérifie, pour chaque phase, que l'on se trouve bien dans le bon intervalle lors du calcul de l'écrouissage et de la pente. Dans le cas contraire, pour la ou les phases concernées, on prend l'intervalle suivant et on résout de nouveau l'équation en Dp . On continue ce processus jusqu'à trouver le bon intervalle pour toutes les phases.

On trouve alors pour le déviateur des contraintes :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}=\frac{1}{1+\mu\,\Delta A\,\mathrm{tr}\,\mathbf{b}^{\bar{e}Tr}}\left[1-\mu\,\frac{\Delta p\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{eTr}}{\tau_{eq}^{Tr}}\right]\tilde{\boldsymbol{\tau}}^{Tr}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Une fois calculée la déformation plastique cumulée, le tenseur des contraintes et la matrice tangente, on effectue une correction sur la trace du tenseur des déformations élastiques $\bar{\mathbf{b}}^e$ pour tenir compte de l'incompressibilité plastique, qui n'est pas conservée avec la simplification faite sur la loi d'écoulement [éq 4.3.1]. Cette correction s'effectue en utilisant une relation entre les invariants de $\bar{\mathbf{b}}^e$ et $\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^e$ et en exploitant la condition d'incompressibilité plastique $J^p=1$ (ou de manière équivalente $\det \bar{\mathbf{b}}^e=1$). Cette relation s'écrit :

$$x^3-\bar{J}_2^e x-(1-\bar{J}_3^e)=0$$

avec $\bar{J}_2^e=\frac{1}{2}(\tilde{\bar{b}}^e)_{\text{eq}}^2=\frac{(\tau_{\text{eq}})^2}{2(\mu)^2}$, $\bar{J}_3^e=\det \tilde{\bar{\boldsymbol{b}}}^{\boldsymbol{e}}=\det\frac{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\mu}$ et $x=\frac{1}{3}tr\ \bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}}$

La résolution de cette équation du troisième degré permet d'obtenir $tr\ \bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}}$ et par conséquent la déformation thermoélastique $\bar{\mathbf{b}}^{e-}$ au pas de temps suivant. Dans le cas où cette équation admet plusieurs solutions, on prend la solution la plus proche de la solution du pas de temps précédent. C'est d'ailleurs pourquoi on stocke dans une variable interne $\frac{1}{3}tr\ \bar{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{e}}$.

Remarque :

Dans le cas où la plasticité de transformation n'est pas prise en compte, les expressions obtenues sont les mêmes en prenant $\Delta A=0$.
Dans le cas où c'est la restauration d'écrouissage qui est négligée alors on a également les mêmes expressions mais en prenant tous les θ égaux à 1.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.2 Expression de la matrice tangente

Nous donnons uniquement ici les expressions de la matrice tangente (option FULL_MECA au cours des itérations de Newton, option RIGI_MECA_TANG pour la première itération). Pour les hypothèses concernant la partie métallurgique, ce sont les mêmes que celles du document [R4.04.02]. Pour la partie grandes déformations, on trouvera en annexe de [bib1], le détail de la linéarisation de la loi de comportement.

On pose :

$$J=\det \mathbf{F}\ ,\ J^{-}=\det \mathbf{F}^{-}\ \text{ et }\ \Delta J=\det \Delta \mathbf{F}$$

- Pour l'option FULL_MECA , on a :

$$\bar{\mathbf{A}}=\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \mathbf{F}}=\frac{(\Delta J)^{-1/3}}{J}\mathbf{H}-\frac{1}{3J\Delta J}(\mathbf{H}\Delta \bar{\mathbf{F}})\otimes\mathbf{B}-\frac{J^{-}}{J^{2}}\boldsymbol{\tau}\otimes\mathbf{B}$$
$$+\frac{J^{-}}{J}\left[KJ-\frac{3}{2}K\,\varepsilon^{th}(1-J^{-2})\right]\mathbf{Id}\otimes\mathbf{B}$$

où $\mathbf{B}$ vaut :

$$B_{11}=\Delta F_{22}\Delta F_{33}-\Delta F_{23}\Delta F_{32}$$
$$B_{22}=\Delta F_{11}\Delta F_{33}-\Delta F_{13}\Delta F_{31}$$
$$B_{33}=\Delta F_{11}\Delta F_{22}-\Delta F_{12}\Delta F_{21}$$
$$B_{12}=\Delta F_{31}\Delta F_{23}-\Delta F_{33}\Delta F_{21}$$
$$B_{21}=\Delta F_{13}\Delta F_{32}-\Delta F_{33}\Delta F_{12}$$
$$B_{13}=\Delta F_{21}\Delta F_{32}-\Delta F_{22}\Delta F_{31}$$
$$B_{31}=\Delta F_{12}\Delta F_{23}-\Delta F_{22}\Delta F_{13}$$
$$B_{23}=\Delta F_{31}\Delta F_{12}-\Delta F_{11}\Delta F_{32}$$
$$B_{32}=\Delta F_{13}\Delta F_{21}-\Delta F_{11}\Delta F_{23}$$

et où $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}\Delta\bar{\mathbf{F}}$ sont donnés par :

Dans le cas élastique ($f<0$) :

$$H_{ijkl}=\frac{\mu}{(1+\mu\Delta A\,\mathrm{tr}\ \boldsymbol{b}^{\bar{e}Tr})}(\delta_{ik}\bar{b}^{e^{-}}_{lp}\Delta\bar{F}_{jp}+\Delta\bar{F}_{ip}\bar{b}^{e^{-}}_{pl}\delta_{jk}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\Delta\bar{F}_{kp}\bar{b}^{e^{-}}_{lp}-2\Delta A\tilde{\tau}_{ij}\Delta\bar{F}_{kp}\bar{b}^{e^{-}}_{pl})$$

et

$$\mathbf{H}\Delta\bar{\mathbf{F}}=\frac{2\mu}{(1+\mu\Delta A\,\mathrm{tr}\ \boldsymbol{b}^{\bar{e}Tr})}(\tilde{\bar{\mathbf{b}}}^{eTr}-\Delta A\,\mathrm{tr}\ \boldsymbol{b}^{\bar{e}Tr}\tilde{\boldsymbol{\tau}})$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

sinon en charge plastique ou viscoplastique, on a :

$$H_{ijkl}=\frac{\mu}{a}(\delta_{ik}\bar{b}^{e-}_{lp}\Delta\bar{F}_{jp}+\Delta\bar{F}_{ip}\bar{b}^{e-}_{pl}\delta_{jk})$$
$$-2\mu\left[\frac{\delta_{ij}}{3a}+\frac{\bar{R}'(\tau_{eq}\Delta A+\Delta p)\tilde{\tau}_{ij}}{\tau_{eq}(\bar{R}'+\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\boldsymbol{b}}^{\bar{e}\mathbf{Tr}}(1+\bar{R}'\Delta A))}\right]\Delta\bar{F}_{kp}\bar{b}^{e-}_{lp}$$
$$+\frac{3\mu^2\,\mathrm{tr}\,\bar{\boldsymbol{b}}^{\bar{e}Tr}(\bar{R}'\Delta p-\tau_{eq})}{a\tau^3_{eq}(\bar{R}'+\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\boldsymbol{b}}^{eTr}(1+\bar{R}'\Delta A))}\tilde{\tau}_{ij}\tilde{\tau}_{kq}\Delta\bar{F}_{qp}\bar{b}^{e-}_{lp}$$

et

$$\mathbf{H}\Delta\bar{\mathbf{F}}=\frac{2\mu}{a}\bar{\mathbf{b}}^{eTr}-2\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{\bar{e}Tr}\left[\frac{\mathbf{Id}}{3a}+\frac{\bar{R}'(\tau_{eq}\Delta A+\Delta p)\tilde{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_{eq}(\bar{R}'+\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{\bar{e}Tr}(1+\bar{R}'\Delta A))}\right]$$
$$+\frac{3\mu^2\,\mathrm{tr}\,\bar{\mathbf{b}}^{\bar{e}Tr}(\bar{R}'\Delta p-\tau_{eq})}{a\tau^3_{eq}(\bar{R}'+\mu\,\mathrm{tr}\,\bar{\boldsymbol{b}}^{\bar{e}Tr}(1+\bar{R}'\Delta A))}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}:\bar{\mathbf{b}}^{eTr})\tilde{\boldsymbol{\tau}}$$

avec

$$\bar{R}'=(1-\bar{f})R_{0\gamma}+\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1,4}Z_iR_{0i}+\underbrace{(1-\bar{f}(Z))\eta_\gamma(\Delta p/\Delta t)^{(1-n_\gamma)/n_\gamma}/n_\gamma\Delta t+\frac{\bar{f}}{Z}\sum_{i=1}^{4}Z_i\eta_i(\Delta p/\Delta t)^{(1-n_i)/n_i}/n_i\Delta t}_{\text{uniquement en viscosite}}$$

$$a=\frac{\tau^{Tr}_{eq}}{\tau_{eq}}$$

- Pour l'option RIGI_MECA_TANG

  pour le modèle plastique : il s'agit des mêmes expressions que celles données pour FULL_MECA mais avec $\Delta p=0$ et $\Delta A=0$, toutes les variables et coefficients du matériau étant pris à l'instant t^-. En particulier, on aura $\Delta\bar{\mathbf{F}}=\mathbf{Id}$.

  pour le modèle visqueux : on prend uniquement les expressions de FULL_MECA dans le cas élastique avec $\Delta A=0$, toutes les variables étant prises à l'instant t^-.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Bibliographie

1) CANO V., LORENTZ E., "Introduction dans le *Code_Aster* d'un modèle de comportement en grandes déformations élastoplastiques avec écrouissage isotrope", Note interne E.D.F-D.E.R., HI-74/98/006/0, 1998

2) SIMO J.C., MIEHE C. , "Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 98, pp. 41-104, North Holland, 1992.

3) LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., Mécanique des milieux continus, Editions Dunod 1985

4) E. LORENTZ, Formulation numérique de la loi de comportement viscoplastique de Taheri, Note interne E.D.F-D.E.R. HI-74/97/019/A [R5.03.05].

7 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
5	V.CANO, E.LORENTZ- EDF- R&D/AMA	Texte initial
6.3	V.CANO EDF- R&D/AMA	Corrections

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)