Éléments finis de coques « solides » – COQUE_SOLIDE

Résumé :

Dans le but de compléter la bibliothèque d'éléments finis de plaque plans [R3.07.03] actuellement disponibles dans c*ode_aster* (DKT, DST, Q4G...), on se propose d'introduire un élément fini de coque solide [Bib7]. Cette modélisation COQUE_SOLIDE (solid-shell element) permet d'effectuer des calculs de structures minces de formes quelconques.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

ATTENTION

Cette documentation est provisoire, les éléments ne sont pas suffisamment validés pour être utilisés dans les études AIP et l'élément COQUE_SOLIDE est hors du périmètre de qualification de code_aster.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1 Introduction....4
1.1 Limitation des éléments isoparamétriques classiques....4
1.1.1 Le verrouillage en cisaillement....5
1.1.2 Le verrouillage en pincement....6
1.1.3 Le verrouillage en membrane....7
1.1.4 Le verrouillage en trapèze....7
1.1.5 Le verrouillage volumique (incompressibilité)....10
1.1.6 Méthodes de correction des verrouillages pour COQUE_SOLIDE....10
2 Cinématique....11
2.1 Description des configurations....11
2.2 Jacobien de la transformation....11
2.3 Tenseur des petites déformations....13
2.4 Tenseur de déformations de Green-Lagrange....13
3 Formulations variationnelles....15
3.1 Équilibre statique linéaire et non-linéaire....15
3.2 Calcul de stabilité....16
3.3 Calcul de dynamique....17
4 Stabilisation....18
4.1 Principes....18
4.1.1 Stabilisation des déformations....18
4.1.2 Stabilisation des contraintes....19
4.1.3 Stabilisation des opérateurs discrets....20
5 Élément hexaédrique à neuf nœuds (SB9)....22
5.1 Géométrie de la brique à huit nœuds....22
5.2 Interpolation des déplacements....23
5.3 Calcul des jacobiens....23
5.4 Calcul des petites déformations....26
5.5 Calcul des grandes déformations....27
5.6 Méthode des déformations postulées (ANS)....29
5.6.1 Méthode ANS en petites déformations....30
5.6.2 Méthode ANS en grandes déformations....32
5.6.3 Matrice géométrique....32
6 Références....34

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Il y a plusieurs manières de définir ce qu'est une plaque ou une coque. Nous allons adopter la définition suivante : « une plaque (ou une coque) est une structure mécanique, qui « vue de loin » est une surface ».
En pratique, cela signifiera qu'une de ses dimensions (son épaisseur) est négligeable par rapport aux deux autres. De manière plus fondamentale, du point de vue mathématique, seule la courbure est un paramètre permettant d'appliquer ou non une théorie de coque, son épaisseur n'est pas une hypothèse fondatrice de la théorie.

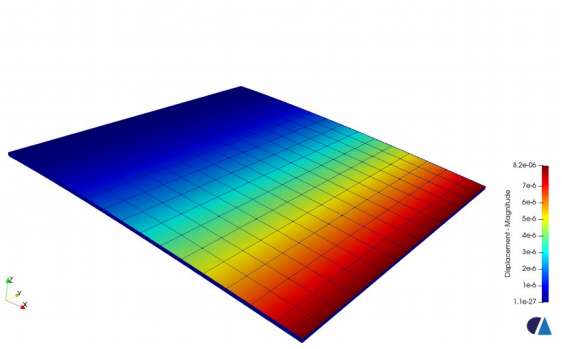
La distinction entre plaque (« *plate* ») et coque (« *shell* ») repose sur l'idée que la plaque est une structure initialement plane alors que la coque est une structure fondamentalement courbe. Pour représenter un composant courbe (cylindre par exemple), les éléments de plaque procèdent donc par « facettisation » de la surface, ce qui introduit à la fois une erreur géométrique (approximation de la courbure) mais aussi mécanique puisque, pour les comportements isotropes, cela implique que les plaques ne présentent pas de couplage entre les déformations de membrane et de flexion.

De manière générale, une structure mince a une propriété remarquable : sa tenue mécanique (son équilibre) dépend essentiellement de sa géométrie. Il y a une très forte différence de rigidité entre une sollicitation dans sa surface moyenne (membrane) et normale à sa surface moyenne (flexion essentiellement). Une structure mince est en effet beaucoup plus rigide en membrane qu'en flexion (il est beaucoup plus facile de déformer une feuille en la pliant qu'en l'allongeant).
En pratique, cette propriété va induire beaucoup de problèmes de modélisation, une série de « verrouillages » numériques, c'est-à-dire une mauvaise représentation des différentes situations mécaniques qu'on ne peut pas toujours vaincre en raffinant le maillage. Le problème est fondamental et nous allons passer en revue les différentes situations présentant ces verrouillages et les moyens de les supprimer.

1.1 Limitation des éléments isoparamétriques classiques

Les éléments isoparamétriques 3D classiques présentent une série de verrouillages numériques, dus soit à la mauvaise représentation des différents modes de déformation et de contraintes représentatif des structures minces, soit à des propriétés du matériau ou du comportement (comme l'incompressibilité ou la plasticité).

Pour illustrer les situations de verrouillage venant de l'hypothèse des structure mince, nous allons considérer le calcul d'une simple plaque carrée en flexion, représentée par une seule couche d'éléments de type cube à 8 nœuds (avec donc une approximation tri-linéaire des déplacements).



Propriétés de la structure

Coté : $1\,m$
Épaisseur : $0{,}1\,m$
Module de Young : $210\,GPa$
Coefficient de Poisson : $0{,}3$

Figure 1.1-1: Exemple de calcul de structure mince en 3D

Le déplacement vertical maximal que l'on devrait obtenir, issu de la théorie des plaques minces (résultat qu'on obtient avec les éléments DKT par exemple) est de 1,9 mm.

Sur le maillage 3D :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Nombre d'éléments	Déplacement
Théorie des plaques	$1{,}9\,mm$
3D – 25	$9{,}7\times10^{-4}\,mm$
3D – 2250	$8{,}2\times10^{-3}\,mm$
3D – 75000	$6{,}3\times10^{-2}\,mm$

On voit qu'on a un déplacement très faible (et faux) et qu'on ne converge que très lentement vers le bon déplacement. C'est ce qu'on appelle un « verrouillage ».

1.1.1 Le verrouillage en cisaillement

La plaque précédente est considérée en flexion pure. Dans cette configuration, la solution d'un modèle poutre (c'est la même chose en plaque, on considère juste une indépendance par rapport à la coordonnée y pour simplifier l'exposé) est la suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{poutre} = \dfrac{M}{EI} z \\ \varepsilon_{zz}^{poutre} = -\dfrac{M\,\nu}{EI} z = -\,\nu\,\varepsilon_{xx}^{poutre} \\ \gamma_{xz}^{poutre} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Si on suppose que $\nu = 0$ dans un premier temps :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{poutre} = \dfrac{M}{EI} z \\ \varepsilon_{zz}^{poutre} = 0 \\ \gamma_{xz}^{poutre} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Considérons maintenant l'approximation linéaire en 3D. En flexion et en considérant l'indépendance par rapport à y et des fonctions linéaires complètes 3D dans le plan (x, z), les déplacements s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} u^{3D} \\ w^{3D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 + C_3\,x + C_5\,z + C_7\,xz \\ C_2 + C_4\,x + C_6\,z + C_8\,xz \end{Bmatrix} \tag{3}$$

On calcule ainsi les trois déformations :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{3D} = C_3 + C_7\,z \\ \varepsilon_{zz}^{3D} = C_6 + C_8\,x \\ \gamma_{xz}^{3D} = C_4 + C_5 + C_7\,x + C_8\,z \end{cases} \tag{4}$$

En fait, les huit coefficients C_i correspondent des modes de déformations particuliers comme résumé dans le tableau suivant.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	Rigide x	Rigide z	Membrane x	Membrane z	Cisaillement x	Cisaillement z	Flexion x	Flexion z
u^{3D}	C_1	0	$C_3 x$	0	0	$C_5 z$	$C_7 xz$	0
w^{3D}	0	C_2	0	$C_6 z$	$C_4 x$	0	0	$C_8 xz$
ε_{xx}^{3D}	0	0	C_3	0	0	0	$C_7 z$	0
ε_{zz}^{3D}	0	0	0	C_6	0	0	0	$C_8 x$
γ_{xz}^{3D}	0	0	0	0	C_4	C_5	$C_7 x$	$C_8 z$

Les deux premières colonnes correspondent à des déformations nulles, ce sont donc des mouvements de corps rigide (suivant x ou suivant z). Les deux suivantes ont des déformations ε_{xx}^{3D} et ε_{zz}^{3D} constantes, ce sont des déformations de membrane pures, les deux suivantes correspondant à une déformation γ_{xz}^{3D} non-nulle (cisaillement pur). Enfin les deux dernières correspondent à une déformation de flexion (avec cisaillement).

Si on considère le cas de la flexion pure (sans composante de membrane ou de cisaillement) les déformations tridimensionnelles sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{3D} = C_7 z \\ \varepsilon_{zz}^{3D} = 0 \\ \gamma_{xz}^{3D} = C_7 x \end{cases} \quad (5)$$

Par rapport à la solution poutre (voir (2)), on voit que la composante de cisaillement γ_{xz}^{3D} n'est pas nulle en 3D, c'est ce qu'on appelle le ***verrouillage en cisaillement***.

1.1.2 Le verrouillage en pincement

Il ne s'agit pas, à proprement parler, d'un verrouillage car la plupart des modèles de plaque que l'on utilise en calcul (Kirchhoff, Mindlin) font l'hypothèse de l'inextensibilité de le fibre transverse (l'épaisseur) $\varepsilon_{zz}=0$. Mais dans certains modèles de plaque/coque (modèle de Cosserat par exemple), cette hypothèse n'est pas retenue.

La conjonction de cette hypothèse avec celle usuellement pratiquée des contraintes planes conduit à une inconsistance théorique dans les formulations plaques. En effet l'élasticité de Hooke ne permet pas, en théorie, d'avoir simultanément $\sigma_{zz}=0$ et $\varepsilon_{zz}=0$. Néanmoins, cette contradiction apparente disparaît de manière indirecte par l'application de la formulation variationnelle, et, du point de vue mécanique, par le fait que l'hypothèse des contraintes planes est « excessive »: on peut **négliger** les contraintes $\sigma_{.z}$ par rapport aux autres. Le fait de les prendre nulles est une facilité pratique.

Pour les théories de plaque les plus générales, on rappelle qu'on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{poutre} = \dfrac{M}{EI} z \\ \varepsilon_{zz}^{poutre} = -\dfrac{M\,\nu}{EI} z = -\nu \varepsilon_{xx}^{poutre} \\ \gamma_{xz}^{poutre} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Et on voit dans l'équation (4) que l'expression de $\varepsilon_{zz}^{poutre}$ n'est pas retrouvée en 3D et vaut :

$$\varepsilon_{zz}^{3D} = C_6 + C_8 x \quad (7)$$

La déformation ne dépend que de x et elle est constante dans l'épaisseur (hypothèse de l'inextensibilité de la fibre normale). L'un des apports de l'élément COQUE_SOLIDE sera de corriger ce point et donc d'être une formulation plaque plus riche que les autres disponibles dans code_aster comme DKT, COQUE_3D, etc. .

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1.1.3 Le verrouillage en membrane

Considérons maintenant une poutre courbe en flexion de longueur $2l$ et de rayon R, on a :

$$\begin{cases} \varepsilon^{poutre} = \dfrac{du}{ds} + \dfrac{w}{R} \\ \chi^{poutre} = \dfrac{du}{ds}\dfrac{1}{R} - \dfrac{d^2 w}{ds^2} \end{cases} \tag{8}$$

Compte-tenu des conditions de dérivabilité, on doit avoir les approximations suivantes :

$$\begin{cases} u = a_0 + a_1 \xi \\ w = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 \end{cases} \text{ avec } \xi = \frac{s}{l} \tag{9}$$

Et donc :

$$\begin{cases} \varepsilon^{poutre} = \left(\dfrac{a_1}{l} + \dfrac{b_0}{R} \right) + \dfrac{b_1}{R} \xi + \dfrac{b_2}{R} \xi^2 + \dfrac{b_3}{R} \xi^3 \\ \chi^{poutre} = \left(\dfrac{a_1}{R} l - \dfrac{2 b_2}{l^2} \right) - \dfrac{6 b_3}{l^2} \xi \end{cases} \tag{10}$$

En flexion pure, on a évidemment la déformation de membrane qui est nulle :

$$\varepsilon^{poutre} = \left(\frac{a_1}{l} + \frac{b_0}{R} \right) + \frac{b_1}{R} \xi + \frac{b_2}{R} \xi^2 + \frac{b_3}{R} \xi^3 = 0 \tag{11}$$

Ce qui donne deux conditions :

$$\left(\frac{a_1}{l} + \frac{b_0}{R} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{b_1}{R} = \frac{b_2}{R} = \frac{b_3}{R} = 0 \tag{12}$$

La première condition est assez facile à réaliser par un choix judicieux des constantes a_1 et b_0. La seconde implique que w soit une constante et donc :

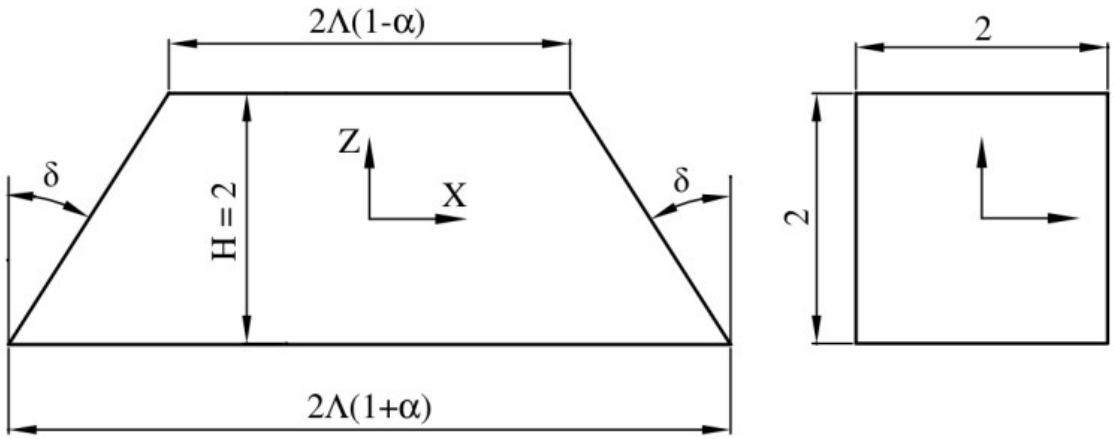
$$\varepsilon^{poutre} = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} \neq 0 \tag{13}$$

Ce qui veut dire que même en flexion pure, on a une contribution de membrane qu'on ne peut annuler. Il y a donc un ***verrouillage en membrane***.

1.1.4 Le verrouillage en trapèze

Considérons un trapèze et son interpolation dans un espace de référence (carré de coté 2).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)



L'espace paramétrique a pour coordonnées (ξ, ζ) . Le changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} x = \Lambda\, \xi(1-\alpha\,\zeta) \\ z = \zeta \end{cases} \text{ avec } \alpha\,\Lambda = \tan(\delta)$$

et

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{\Lambda(1-\alpha\, z)} \\ \zeta = z \end{cases} \tag{14}$$

Le jacobien de changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{1}{\Lambda(1-\alpha\,\zeta)} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = \dfrac{\alpha\,\xi}{(1-\alpha\,\zeta)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 1 \end{cases} \tag{15}$$

On remarquera que le jacobien n'est pas constant. Si on suppose pour simplifier que $\dfrac{M}{EI} = 1$ et $\nu = 0$, la solution en déplacement d'une poutre en flexion pure s'écrit :

$$\begin{cases} u^{poutre} = x\, z \\ w^{poutre} = -\dfrac{1}{2}\, x^2 \end{cases} \tag{16}$$

Soit dans l'espace paramétrique :

$$\begin{cases} u^{poutre} = \Lambda\left(\zeta\,\xi - \alpha\,\xi\,\zeta^2\right) \\ w^{poutre} = -\dfrac{1}{2}\,\Lambda^2\left(\xi^2 + \alpha^2\,\xi^2\,\zeta^2 - 2\,\alpha\,\zeta\,\xi^2\right) \end{cases} \tag{17}$$

[Bib2] a introduit la notion d'aliasing des fonctions d'interpolation en éléments finis. Le principe est le suivant : dans un élément fini, on ne peut pas approximer toutes les fonctions, tout dépendra de l'ordre des polynômes utilisés dans ces fonctions. Par exemple, sur un triangle avec des fonctions linéaires, on ne peut pas représenter des fonctions quadratiques. Dans la représentation paramétrique habituelle, en 2D, on a le tableau suivant :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Élément	TRIA3	QUAD4	TRIA6	QUAD8
Fonction				
ξ^2	ξ	1	ξ^2	ξ^2
$\xi\,\eta$	0	$\xi\,\eta$	$\xi\,\eta$	$\xi\,\eta$
η^2	η	1	η^2	η^2
ξ^3	ξ	ξ	$\frac{1}{2}\left(3\,\xi^2-\xi\right)$	ξ
$\xi^2\,\eta$	0	η	$\frac{1}{2}\xi\,\eta$	$\xi^2\,\eta$
$\xi\,\eta^2$	0	ξ	$\frac{1}{2}\xi\,\eta$	$\xi\,\eta^2$
η^3	η	η	$\frac{1}{2}\left(3\,\eta^2-\eta\right)$	η
ξ^4	ξ	1	$\frac{1}{4}\left(7\,\xi^2-3\,\xi\right)$	ξ^2
$\xi^3\,\eta$	0	$\xi\,\eta$	$\frac{\xi\,\eta}{4}$	$\xi\,\eta$
$\xi^2\,\eta^2$	0	1	$\frac{\xi\,\eta}{4}$	$\xi^2+\eta^2-1$
$\xi^2\,\eta$	0	$\xi\,\eta$	$\frac{\xi\,\eta}{4}$	$\xi\,\eta$
η^4	η	1	$\frac{1}{4}\left(7\,\eta^2-3\,\eta\right)$	η^2

Ce tableau se lit de la manière suivante : pour une fonction en η^3, un élément TRIA3, QUAD4 ou QUAD8 représentera, au mieux, le cas η et pour le TRIA6, on pourra représenter par $\frac{1}{2}\left(3\,\eta^2-\eta\right)$. L'aliasing transforment donc les déplacements (17) ainsi pour le QUAD4 :

$$\begin{cases} u^{poutre}=\Lambda\left(\zeta\,\xi-\alpha\,\xi\,\zeta^2\right)\rightarrow u^{EF}=\Lambda\left(\zeta\,\xi-\alpha\,\xi\right) \\ w^{poutre}=-\frac{1}{2}\Lambda^2\left(\xi^2+\alpha^2\,\xi^2\,\zeta^2-2\,\alpha\,\zeta\,\xi^2\right)\rightarrow w^{EF}=-\frac{1}{2}\Lambda^2\left(1+\alpha^2-2\,\alpha\,\zeta\right) \end{cases} \quad (18)$$

Ce qui donne les déformations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{\zeta-\alpha}{1-\alpha\,\zeta} \\ \varepsilon_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\alpha\,\Lambda^2 \\ \gamma_{xz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\Lambda\,\xi\left(1+\frac{\alpha(\zeta-\alpha)}{1-\alpha\,\zeta}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

Or la solution analytique (voir (2)) nous donne :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^{poutre} = z = \zeta \\ \varepsilon_{zz}^{poutre} = 0 \\ \gamma_{xz}^{poutre} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Pour la contribution ε_{xx} , la solution élément fini est exacte pour $\alpha = 0$ (quadrangle parfait) et l'erreur reste petite pour un petit α . L'erreur sur le cisaillement γ_{xz} peut être annulée si on estime le terme en $(0,0)$. Par contre le terme en ε_{zz} a une erreur plus grande que γ_{xz} dès lors que $\alpha\Lambda = \tan\delta > 1$. On a donc un ***verrouillage en trapèze*** de l'élément linéaire dès lors qu'on a des arêtes qui s'éloignent du cas géométrique du rectangle (ou de l'hexaèdre pour le cas 3D).

1.1.5 Le verrouillage volumique (incompressibilité)

Ce type de verrouillage n'est pas spécifique aux structures minces et apparaît systématiquement lorsque le matériau ou le comportement devient incompressible, ce qui correspond en général à deux situations :

- quand le coefficient de Poisson tend vers $0,5$, ce qui est le cas des matériaux hyperélastiques comme les élastomères par exemple ;
- quand le comportement est plastique, la plasticité des métaux se faisant à volume constant

Il s'agit d'un ***verrouillage volumique*** ou en incompressibilité. Pour le cas des éléments « massifs », il existe plusieurs stratégies pour vaincre ce verrouillage, voir [R3.06.08] ou [R3.06.14].

1.1.6 Méthodes de correction des verrouillages pour COQUE_SOLIDE

Pour vaincre ces verrouillages, on propose trois ingrédients :

- Pour supprimer le verrouillage volumique et de membrane, on va utiliser une méthode d'**intégration réduite** (RI) qui consiste à utiliser un schéma d'intégration moins riche que celui utilise classiquement pour des briques à 8 nœuds. L'intégration réduite va faire apparaître des modes parasites à énergie nulle (ou modes « sabliers ») qu'on va éliminer par une méthode de stabilisation ;
- Pour supprimer le verrouillage volumique, on propose en outre une approche basée sur les modes incompatibles dans sa formulation générique dite « **EAS** » (Enhanced Assumed Strain) qui permettra d'enrichir l'approximation pour corriger le problème du pincement ;
- Pour supprimer le verrouillage en cisaillement transverse et trapézoïdal, on utilisera la méthode du champ assumé (**ANS** « Assumed Natural Strain »).

La méthode EAS (Enhanced Assumed Strain), dont le formalisme est basé sur la formulation à trois champs de Hu-Washizu, a été initialement proposée par [Bib2, Bib3] en petites déformations, puis étendue aux grandes déformations par [Bib4, Bib5] avant d'être appliqué aux problèmes thermomécaniques par [Bib6]. Cette méthode est une généralisation de la méthode des modes incompatibles. Elle consiste à réduire l'ordre des polynômes pour certaines composantes des déformations.
Cette méthode permet de réduire significativement le verrouillage volumique. Des travaux récents [Bib8], [Bib9] ont montré qu'un seul paramètre suffisait, ce qui permet en plus d'être cohérent avec une intégration réduite. Néanmoins, dans certaines configurations (chargement en compression), des instabilités apparaissent, de plus il est nécessaire dans le cas des éléments plaques de vaincre aussi les verrouillages en cisaillement transverse. On va combiner la méthode EAS avec la méthode ANS et la prise en compte du pincement.

La technique ANS (« Assumed Natural Strain ») consiste à remplacer la déformation de cisaillement transverse par une déformation de cisaillement postulée obtenue par interpolation dans la base naturelle de l'élément (d'où le qualificatif de « naturel ») . En plus de faciliter la gestion du verrouillage en cisaillement, l'interpolation dans la base naturelle donne des éléments fonctionnant avec un maillage plus ou moins déformé.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Cinématique

2.1 Description des configurations

On considère la configuration initiale Ω_0 et la configuration courante Ω_t. Le vecteur $\boldsymbol{X}$ donne la position d'une particule dans la configuration initiale et $\boldsymbol{x}$ est sa position dans la configuration courante. Avec $\boldsymbol{u}$ le déplacement de la particule entre les deux configurations :

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u} \tag{21}$$

On considérera deux systèmes de coordonnées. Le système de cordonnées cartésien qui a trois composantes (x,y,z) et dont la base est constituée par les trois vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ et le système de coordonnées paramétriques de référence de l'élément fini qui a aussi trois composantes $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta,\zeta)$.

Notations :
- Une quantité exprimée dans la configuration initiale sera en ***majuscule*** ;
- Une quantité exprimée dans la configuration courante sera en ***minuscule*** .

On va définir la base dans la configuration initiale par les trois vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{G}_i=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \xi^i} \text{ pour } i=1,2,3 \tag{22}$$

Le vecteur contravariant correspondant :

$$\boldsymbol{G}_i\cdot\boldsymbol{G}^j=\delta_i^j \tag{23}$$

De même, dans la configuration courante :

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi^i}=\boldsymbol{G}_i+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi^i} \text{ pour } i=1,2,3 \quad \text{et } \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j \tag{24}$$

2.2 Jacobien de la transformation

On peut exprimer la matrice jacobienne (de dimension 3×3) de la transformation entre les la configuration initiale et l'espace paramétrique :

$$\boldsymbol{J}=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \tag{25}$$

Et l'inverse de la matrice jacobienne :

$$\bar{\boldsymbol{J}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^{-1} \tag{26}$$

Le déterminant de $\boldsymbol{J}$ permet de transformer les intégrales de l'espace des coordonnées dans la configuration initiale vers l'espace paramétrique de référence des éléments finis. C'est aussi une mesure du volume réel de l'élément fini :

$$J_0=det(\boldsymbol{J}) \tag{27}$$

Pour stabiliser efficacement l'élément et donc pour supprimer les modes sabliers provenant de l'intégration réduite, il faut pouvoir calculer les différents termes intégraux avec une précision suffisante.

Comme le schéma d'intégration numérique est volontairement très pauvre, la meilleure façon de faire est de travailler avec des intégrandes qui sont des polynômes autant que possible. Pour cette raison, il est intéressant de rechercher une approximation polynomiale des matrices jacobienne $\boldsymbol{J}$ et jacobienne inverse $\bar{\boldsymbol{J}}$, qui permet de représenter n'importe quelle forme de l'élément avec une précision suffisante.

La matrice jacobienne $\boldsymbol{J}$ se décompose en composantes constantes, linéaires et bi-linéaires :

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^0+\xi\boldsymbol{J}^{\xi}+\eta\boldsymbol{J}^{\eta}+\zeta\boldsymbol{J}^{\zeta}+\xi\eta\boldsymbol{J}^{\xi\eta}+\eta\zeta\boldsymbol{J}^{\eta\zeta}+\xi\zeta\boldsymbol{J}^{\xi\zeta} \tag{28}$$

Une façon possible d'obtenir une forme adéquate de la matrice jacobienne inverse pour une bonne efficacité de la stabilisation est de l'évaluer qu'au centre de l'élément (voir [Bib12] et [Bib11]). Dans ce cas, la matrice

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

jacobienne ainsi que son inverse sont constantes à l'intérieur de l'élément. Cependant, cette méthode n'est robuste que pour des maillages très fins.

Pour cette raison, nous approchons le jacobien inverse au moyen d'un développement de Taylor par rapport au centre de l'élément, suivant les travaux de [Bib10]. Cette méthode nous permet d'avoir une forme polynomiale de la matrice jacobienne inverse pour faciliter l'intégration numérique comme recherchée mais aussi que les éléments qui s'écartent de la forme parallélépipédique soient pris en compte de manière plus réaliste.
A partir de la décomposition (28), on peut approcher $\bar{\boldsymbol{J}}$ en ne gardant que le terme constant et les termes linéaires :

$$\bar{\boldsymbol{J}} \approx \bar{\boldsymbol{J}}^0 + \xi \left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}{\partial \xi}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} + \eta \left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}{\partial \eta}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} + \zeta \left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}{\partial \zeta}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} \tag{29}$$

Le terme constant est très facile à calculer puisque c'est l'inverse du terme constant de la jacobienne. Pour les autres termes, il faut évaluer les dérivée. On procède en développant le terme $\bar{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J}$ au centre de l'élément :

$$\bar{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J} \approx \bar{\boldsymbol{J}}^0 \boldsymbol{J}^0 + \xi \left.\frac{\partial (\bar{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J})}{\partial \xi}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} + \eta \left.\frac{\partial (\bar{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J})}{\partial \eta}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} + \zeta \left.\frac{\partial (\bar{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J})}{\partial \zeta}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} \tag{30}$$

Et comme $\bar{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}$, sa dérivée est nulle et on a donc pour chaque composante ξ_i :

$$0 = \left.\frac{\partial (\bar{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{J})}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} \bar{\boldsymbol{J}}^0 + \left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} \boldsymbol{J}^0 \tag{31}$$

Et donc :

$$\left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} = \frac{-\left.\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} \bar{\boldsymbol{J}}^0}{\boldsymbol{J}^0} = -\bar{\boldsymbol{J}}^0 \left.\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} \bar{\boldsymbol{J}}^0 \quad \text{car } \frac{1}{\boldsymbol{J}^0} = \bar{\boldsymbol{J}}^0 \tag{32}$$

Il faut évaluer le terme. Pour cela, on part de (28) et on dérive. Pour la composante ξ par exemple :

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \xi} = \frac{\partial \boldsymbol{J}^0}{\partial \xi} + \boldsymbol{J}^{\xi} + \eta \boldsymbol{J}^{\xi\eta} + \zeta \boldsymbol{J}^{\xi\zeta} \approx \boldsymbol{J}^{\xi} \tag{33}$$

On n'a gardé que les termes linéaires en ξ Il reste :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \xi}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} &\approx \boldsymbol{J}^{\xi}\big|_{\boldsymbol{\xi}=0} = \boldsymbol{J}^{\xi} \\ \left.\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \eta}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} &\approx \boldsymbol{J}^{\eta}\big|_{\boldsymbol{\xi}=0} = \boldsymbol{J}_0^{\eta} \\ \left.\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \zeta}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} &\approx \boldsymbol{J}^{\zeta}\big|_{\boldsymbol{\xi}=0} = \boldsymbol{J}_0^{\xi} \end{aligned} \tag{34}$$

On rappelle que les termes linéaires du développement de $\boldsymbol{J}$ sont constants sur l'élément (pas de dépendance à la coordonnée paramétrique $\boldsymbol{\xi}$). Et donc :

$$\left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{J}}}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} = -\left(\bar{\boldsymbol{J}}^0\right) \boldsymbol{J}^{\xi_i} \left(\bar{\boldsymbol{J}}^0\right) \tag{35}$$

Finalement, de (29), on a l'estimation suivante de la jacobienne inverse :

$$\bar{\boldsymbol{J}} = \bar{\boldsymbol{J}}^0 - \sum_{i=1}^{3} \left(\bar{\boldsymbol{J}}^0\right) \boldsymbol{J}_0^{\xi_i} \left(\bar{\boldsymbol{J}}^0\right) \xi_i \tag{36}$$

Attention à bien distinguer $\boldsymbol{J}^0$ qui est le terme ***constant*** (à l'ordre zéro) du développement limité de $\boldsymbol{J}$ par rapport au terme $\boldsymbol{J}_0$ qui est la valeur exacte de $\boldsymbol{J}$ au ***centre*** de l'élément (en $\boldsymbol{\xi}=0$).

On aura également besoin de la version du jacobien sur la configuration courante, celle qu'on définit de la manière suivante :

$$\boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{D} \tag{37}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

On procède exactement de la même manière pour $\boldsymbol{D}$ que pour $\boldsymbol{J}$. Sa décomposition dans le repère paramétrique :

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{0}+\xi\boldsymbol{D}^{\xi}+\eta\boldsymbol{D}^{\eta}+\zeta\boldsymbol{D}^{\zeta}+\xi\eta\boldsymbol{D}^{\xi\eta}+\eta\zeta\boldsymbol{D}^{\eta\zeta}+\xi\zeta\boldsymbol{D}^{\xi\zeta} \tag{38}$$

2.3 Tenseur des petites déformations

La partie ***linéaire*** du tenseur des déformations s'écrit en fonction des déplacements :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{U} \tag{39}$$

On va décomposer ce tenseur dans l'espace paramétrique de la manière suivante :

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\hat{\boldsymbol{B}}^{0}+\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}+\zeta^{2}\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta\zeta}+\xi\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta\zeta} \tag{40}$$

En utilisant une méthode d'intégration réduite, il est nécessaire de modifier l'évaluation de cette matrice pour stabiliser le problème (faire disparaître les modes « sabliers » à énergie nulle), on écrira donc :

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\hat{\boldsymbol{B}}^{RI}+\hat{\boldsymbol{B}}^{STAB} \tag{41}$$

La contribution correspondant à l'intégration réduite dans l'épaisseur est notée $\hat{\boldsymbol{B}}^{RI}$ et celle correspondant à la stabilisation est $\hat{\boldsymbol{B}}^{STAB}$. En décomposant à l'ordre deux sur les composantes paramétriques, l'intégration réduite utilisant un schéma de points alignés suivant l'épaisseur ζ, on a :

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{RI}=\hat{\boldsymbol{B}}^{0}+\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}+\zeta^{2}\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta\zeta} \tag{42}$$

Et la stabilisation qui correspond aux modes de déformation dans les autres directions :

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{STAB}=\xi\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta\zeta} \tag{43}$$

2.4 Tenseur de déformations de Green-Lagrange

Le tenseur gradient de déformation vaut :

$$\boldsymbol{F}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{g}_{i}\otimes\boldsymbol{G}^{i}=\frac{\partial x^{i}}{\partial\xi^{k}}\boldsymbol{e}_{i}\otimes\frac{\partial\xi^{k}}{\partial X^{j}}\boldsymbol{e}_{j} \tag{44}$$

Le tenseur de Green-Lagrange « standard » (non-modifié) :

$$\boldsymbol{E}^{u}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{g}_{i}\cdot\boldsymbol{g}_{j}-\boldsymbol{G}_{i}\cdot\boldsymbol{G}_{j}\right)\boldsymbol{G}^{i}\otimes\boldsymbol{G}^{j}=\hat{E}^{u}_{ij}\boldsymbol{G}^{i}\otimes\boldsymbol{G}^{j}=E^{u}_{ij}\boldsymbol{e}_{i}\otimes\boldsymbol{e}_{j} \tag{45}$$

Explicitement, les coordonnées dans le repère paramétrique :

$$\hat{E}^{u}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{G}_{i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi^{j}}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi^{i}}\cdot\boldsymbol{G}_{j}+\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi^{j}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\xi^{i}}\right)\boldsymbol{G}^{i}\otimes\boldsymbol{G}^{j} \tag{46}$$

En notation de Voigt, ce tenseur a six composantes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{u}&=\left\{E^{u}_{XX},E^{u}_{YY},E^{u}_{ZZ},2E^{u}_{XY},2E^{u}_{YZ},2E^{u}_{XZ}\right\}\\ \hat{\boldsymbol{E}}^{u}&=\left\{\hat{E}^{u}_{\xi\xi},\hat{E}^{u}_{\eta\eta},\hat{E}^{u}_{\zeta\zeta},2\hat{E}^{u}_{\xi\eta},2\hat{E}^{u}_{\eta\zeta},2\hat{E}^{u}_{\xi\zeta}\right\}\end{aligned} \tag{47}$$

Pour passer de l'un à l'autre, on utilisera la matrice $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{E}^{u}=\boldsymbol{T}\,\hat{\boldsymbol{E}}^{u} \tag{48}$$

Avec la matrice de passage $\boldsymbol{T}$:

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \bar{J}_{11}^2 & \bar{J}_{21}^2 & \bar{J}_{31}^2 & \bar{J}_{11}\bar{J}_{21} & \bar{J}_{21}\bar{J}_{31} & \bar{J}_{11}\bar{J}_{31} \\ \bar{J}_{12}^2 & \bar{J}_{22}^2 & \bar{J}_{32}^2 & \bar{J}_{12}\bar{J}_{22} & \bar{J}_{22}\bar{J}_{32} & \bar{J}_{12}\bar{J}_{32} \\ \bar{J}_{13}^2 & \bar{J}_{23}^2 & \bar{J}_{33}^2 & \bar{J}_{13}\bar{J}_{23} & \bar{J}_{23}\bar{J}_{33} & \bar{J}_{13}\bar{J}_{33} \\ 2\bar{J}_{11}\bar{J}_{12} & 2\bar{J}_{21}\bar{J}_{22} & 2\bar{J}_{31}\bar{J}_{32} & \bar{J}_{12}\bar{J}_{21}+\bar{J}_{11}\bar{J}_{22} & \bar{J}_{22}\bar{J}_{31}+\bar{J}_{21}\bar{J}_{32} & \bar{J}_{12}\bar{J}_{31}+\bar{J}_{12}\bar{J}_{32} \\ 2\bar{J}_{12}\bar{J}_{13} & 2\bar{J}_{22}\bar{J}_{23} & 2\bar{J}_{32}\bar{J}_{33} & \bar{J}_{13}\bar{J}_{22}+\bar{J}_{12}\bar{J}_{23} & \bar{J}_{23}\bar{J}_{32}+\bar{J}_{22}\bar{J}_{33} & \bar{J}_{13}\bar{J}_{32}+\bar{J}_{12}\bar{J}_{33} \\ 2\bar{J}_{11}\bar{J}_{13} & 2\bar{J}_{21}\bar{J}_{23} & 2\bar{J}_{31}\bar{J}_{33} & \bar{J}_{13}\bar{J}_{21}+\bar{J}_{11}\bar{J}_{23} & \bar{J}_{23}\bar{J}_{31}+\bar{J}_{21}\bar{J}_{33} & \bar{J}_{13}\bar{J}_{31}+\bar{J}_{11}\bar{J}_{33} \end{bmatrix} \quad (49)$$

et $\bar{\boldsymbol{J}}$ les composantes de l'inverse de la matrice jacobienne :

$$\bar{\boldsymbol{J}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^{-1} \quad (50)$$

On utilisera l'approximation (36) pour $\bar{\boldsymbol{J}}$.
La décomposition du tenseur des grandes déformations est de la même forme que celle des petites déformations (40) :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^u=\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}+\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}+\zeta^2\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta\zeta}+\xi\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta\zeta} \quad (51)$$

Et comme dans le cas des petites déformations, en utilisant une méthode d'intégration réduite, il est nécessaire de modifier l'évaluation du tenseur des déformations de Green-Lagrange pour stabiliser le problème (faire disparaître les modes « sabliers » à énergie nulle), on écrira donc :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^u=\hat{\boldsymbol{E}}^{u,RI}+\hat{\boldsymbol{E}}^{u,STAB} \quad (52)$$

La contribution correspondant à l'intégration réduite dans l'épaisseur est notée $\hat{\boldsymbol{E}}^{u,RI}$ et celle correspondant à la stabilisation est $\hat{\boldsymbol{E}}^{u,STAB}$. En décomposant sur les composantes paramétriques, l'intégration réduite utilisant un schéma de points alignés suivant l'épaisseur, on a :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{u,RI}=\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}+\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}+\zeta^2\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta\zeta} \quad (53)$$

Et la stabilisation qui correspond aux modes de déformation dans les autres directions :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{u,STAB}=\xi\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta\zeta} \quad (54)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange dans le repère paramétrique s'écrira :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^u=\left\{\hat{\boldsymbol{E}}^u_{\xi\xi},\hat{\boldsymbol{E}}^u_{\eta\eta},\hat{\boldsymbol{E}}^u_{\zeta\zeta},2\,\hat{\boldsymbol{E}}^u_{\xi\eta},2\,\hat{\boldsymbol{E}}^u_{\eta\zeta},2\,\hat{\boldsymbol{E}}^u_{\xi\zeta}\right\} \quad (55)$$

Attention à ne pas confondre les composantes du tenseur des déformations (55) avec ceux de sa décomposition (53 - 54).

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Formulations variationnelles

3.1 Équilibre statique linéaire et non-linéaire

On va exprimer les équations d'équilibre statique linéaire et non-linéaire sous forme variationnelle. On se place dans le cadre de la théorie des grandes déformations. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}^u$ vaut :

$$\boldsymbol{E}^u = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{g}\right) \tag{56}$$

Avec $\boldsymbol{F}$ le tenseur gradient de déplacement classique (voir §2.4) et $\boldsymbol{g}$ le tenseur métrique.
Afin de pouvoir introduire l'ensemble des méthodes de stabilisation et de correction des verrouillages, on va partir d'une formulation variationnelle mixte de Hu-Washizu [Bib2] et [Bib17], écrite sur la configuration initiale et en grandes déformations :

$$\pi^{HW}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E},\boldsymbol{S}) = \int_{\Omega_0} W(\boldsymbol{E})\,d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{S}:\left(\boldsymbol{E}^u - \boldsymbol{E}\right)d\Omega_0 - \pi_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) \tag{57}$$

Avec $W(\boldsymbol{E})$ l'énergie de déformation de la structure et $\pi_{\text{ext}}(\boldsymbol{u})$ le travail des efforts extérieurs. L'application de la méthode EAS consiste à reparamétrer le tenseur des déformations de Green-Lagrange tel que :

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^u + \boldsymbol{E}^{EAS} \tag{58}$$

Ce qui nous donne une nouvelle expression de (57) qui transforme la dépendance de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{E}^{EAS}$:

$$\widetilde{\pi}^{HW}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{EAS},\boldsymbol{S}) = \int_{\Omega_0} W(\boldsymbol{E}^u + \boldsymbol{E}^{EAS})\,d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{S}:\boldsymbol{E}^{EAS}\,d\Omega_0 - \pi_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) \tag{59}$$

Il est nécessaire de trouver des approximations correctes de ces trois champs, ce qui peut être compliqué en pratique. Cette formulation à trois champs est donc généralement transformée en formulation à deux champs en imposant la condition d'orthogonalité suivante :

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{S}:\boldsymbol{E}^{EAS}\,d\Omega_0 = 0 \tag{60}$$

Ce qui permet d'éliminer la contrainte. Au niveau discret, cette condition peut mener à des problèmes de convergence à cause d'un espace des contraintes S^h trop restreint (voir [Bib3]). Ce problème peut être corrigé en imposant au niveau discret l'inclusion au moins des fonctions constantes par morceaux dans cet espace. Dans notre cas, nous allons procéder autrement pour permettre la prise en compte du pincement. Il y a deux situations :

- s'il n'y a pas pincement, c'est-à-dire s'il n'y a pas de pression appliquée sur la surface inférieure ou supérieure de l'élément, on imposera la condition d'orthogonalité (60) ;
- s'il y a pincement et qu'on considère une pression sur la face supérieure P_u et sur la surface inférieure P_l, on choisit la contrainte de Piola-Kirchhoff de seconde espèce telle que

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{2}(1-\zeta)P_l - \frac{1}{2}(1+\zeta)P_u \tag{61}$$

Avec ζ la cordonnée paramétrique dans l'épaisseur.
On a donc :

$$\pi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{EAS}) = \int_{\Omega_0} W(\boldsymbol{E}^u + \boldsymbol{E}^{EAS})\,d\Omega_0 - \pi_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) \tag{62}$$

Ou encore :

$$\pi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{EAS}) = \pi_{\text{int}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{EAS}) - \pi_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) \tag{63}$$

La première variation de (62) permet d'obtenir la forme faible :

$$\delta\pi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{EAS}) = \delta\pi_{\text{int}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{EAS}) - \delta\pi_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) \quad \text{avec} \quad \delta\pi_{\text{int}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E}^{EAS}) = \int_{\Omega_0}\left(\delta\boldsymbol{E}^u + \delta\boldsymbol{E}^{EAS}\right):\boldsymbol{S}\,d\Omega_0 \tag{64}$$

Le problème est non-linéaire. On va appliquer la méthode de Newton (voir [R5.03.01]), avec les notations de ce document, $\delta\pi_{\text{int}}$ sont les forces internes. Il faut donc exprimer les différentes variations en fonction des inconnues du système.
Pour la déformation $\boldsymbol{E}^u$, la variation étant petite, on ne considère que la partie linéaire. Dans le système des coordonnées paramétriques de l'élément, on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta \boldsymbol{E}^{u} = \hat{\boldsymbol{B}}\,\delta \boldsymbol{U} \tag{65}$$

Et pour la déformation EAS, sur l'élément, en retenant une approximation avec un seul paramètre α :

$$\delta E^{EAS} = \hat{\Gamma}\,\delta\alpha \tag{66}$$

On a donc :

$$\delta\pi_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \left(\hat{\boldsymbol{B}}\,\delta \boldsymbol{U}\right)^T \boldsymbol{S}\, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \left(\hat{\Gamma}\,\delta\alpha\right)^T \boldsymbol{S}\, d\Omega_0 \tag{67}$$

Et la force interne :

$$L_{\text{int}} = \underbrace{\int_{\Omega_0} \hat{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{S}\, d\Omega_0}_{L_{\text{int}}^{u}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \hat{\Gamma}^T \boldsymbol{S}\, d\Omega_0}_{L_{\text{int}}^{EAS}} \tag{68}$$

L'application de la méthode de Newton va faire apparaître quatre matrices tangentes :

$$\begin{aligned} \Delta L_{\text{int}} = & \quad \delta \boldsymbol{U}^T \frac{\partial L_{\text{int}}^{u}}{\partial \boldsymbol{U}} \Delta \boldsymbol{U} + \delta\alpha^T \frac{\partial L_{\text{int}}^{EAS}}{\partial \alpha} \Delta\alpha \\ & + \delta\alpha^T \frac{\partial L_{\text{int}}^{EAS}}{\partial \alpha} \Delta \boldsymbol{U} + \delta \boldsymbol{U}^T \frac{\partial L_{\text{int}}^{u}}{\partial \alpha} \Delta\alpha \end{aligned} \tag{69}$$

Avec les quatre matrices :

$$\Delta L_{\text{int}} = \left(\delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K}^{uu} + \delta\alpha^T \boldsymbol{K}^{\alpha u}\right)\Delta \boldsymbol{U} + \left(\delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K}^{u\alpha} + \delta\alpha^T \boldsymbol{K}^{\alpha\alpha}\right)\Delta\alpha \tag{70}$$

Pour $\boldsymbol{K}^{uu}$ est la matrice « classique » (que l'on retrouve dans les éléments isoparamétriques standards par exemple), elle comprend elle-même deux parties :

- la matrice tangente matérielle $\boldsymbol{K}_m^{uu}$;
- la matrice tangente géométrique $\boldsymbol{K}_g^{uu}$ dans le cas des grandes déformations.

Soit :

$$\boldsymbol{K}^{uu} = \int_{\Omega_0} \hat{\boldsymbol{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{E}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \hat{\boldsymbol{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{S}\, d\Omega_0 = \boldsymbol{K}_m^{uu} + \boldsymbol{K}_g^{uu} \tag{71}$$

3.2 Calcul de stabilité

Ce paragraphe permet d'exposer l'expression du problème aux valeurs propres pour cvalculer la stabiltié d'une structure (flambement).La matrice géométrique intervient dans deux cas :

- en non-linéaire quand on utilise des grandes déformations, le processus de linéarisation fait apparaître une contribution d'origine géométrique, voir (71) ;
- pour faire des calculs de stabilité (flambement), ce qui correspond dans code_aster à l'option `RIGI_GEOM` , voir [R7.05.01].

Dans les deux cas, la forme générale de cette matrice est la suivante:

$$\boldsymbol{K}_g^{uu} = \int_{\Omega_0} \hat{\boldsymbol{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{S}\, d\Omega_0 \tag{72}$$

On va exprimer l'opérateur $\boldsymbol{G}$ tell que :

$$\boldsymbol{G} = \int_{\Omega_0} \hat{\boldsymbol{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{u}} d\Omega_0 \tag{73}$$

Comme l'approximation de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}$ ont utilisé une décomposition en polynômes, on gardera la même logique de décomposition pour $\boldsymbol{G}$ (et le même schéma d'intégration numérique de Lobatto). De même on aura le même changement de repère entre l'espace paramétrique de l'élément et l'espace réel :

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}\,\hat{\boldsymbol{G}} \tag{74}$$

La décomposition choisie est donc de la forme suivante :

$$\hat{\boldsymbol{G}} = \hat{\boldsymbol{G}}^0 + \zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta} + \zeta^2\hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta\zeta} + \xi\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi} + \eta\hat{\boldsymbol{G}}^{\eta} + \xi\eta\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi\eta} + \xi\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi\zeta} + \eta\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\eta\zeta} \tag{75}$$

Par ailleurs, on aura également une contribution venant de l'intégration réduite et une pour stabiliser :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{G}=\hat{G}^{u}+\hat{G}^{STAB} \quad \text{avec}$$
$$\hat{G}^{u}=\hat{G}^{0}+\zeta\hat{G}^{\zeta}+\zeta^{2}\hat{G}^{\zeta\zeta} \tag{76}$$
$$\hat{G}^{STAB}=\xi\hat{G}^{\xi}+\eta\hat{G}^{\eta}+\xi\eta\hat{G}^{\xi\eta}+\xi\zeta\hat{G}^{\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{G}^{\eta\zeta}$$

On écrit les composantes de ce tenseur sous forme de vecteur :

$$\hat{G}=\left\{\hat{G}_{\xi\xi},\hat{G}_{\eta\eta},\hat{G}_{\zeta\zeta},\hat{G}_{\xi\eta},\hat{G}_{\eta\zeta},\hat{G}_{\xi\zeta}\right\} \tag{77}$$

Pour chaque couple de nœud $i\times j$, on a les expressions explicites de ces composantes. Pour la membrane :

$$\hat{G}^{0}_{m,ij}=\begin{Bmatrix} a_1^i a_1^j \\ a_2^i a_2^j \\ 0 \\ a_1^i a_2^j+a_1^j a_2^i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \hat{G}^{\zeta}_{m,ij}=\frac{1}{8}\begin{Bmatrix} h_3^i a_1^j+h_3^j a_1^i \\ h_2^i a_2^j+h_2^j a_2^i \\ 0 \\ h_2^i a_1^j+h_3^i a_2^j+h_3^j a_2^i+h_2^j a_1^i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \hat{G}^{\zeta\zeta}_{m,ij}=\frac{1}{8}\begin{Bmatrix} h_3^i h_3^j \\ h_2^i h_2^j \\ 0 \\ h_2^i h_3^j+h_3^i h_2^j \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{78}$$

3.3 Calcul de dynamique

Dans ce paragraphe, on exprime la masse du système pour calculer les problèmes de dynamique linéaire et non-linéaires transitoires ainsi que le calcul modal.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Stabilisation

4.1 Principes

Dans le calcul des quantités nécessaires, il apparaît des termes intégraux venant de la formulation variationnelle (voir §3). La matrice de rigidité de la structure s'écrira de la manière suivante pour un élément fini e donné :

$$\int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\varepsilon}:\delta\boldsymbol{\sigma})\, d\Omega \rightarrow \boldsymbol{K}_e = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{B})\, d\Omega \tag{79}$$

Avec $\boldsymbol{C}$ la matrice d'élasticité de Hooke et $\boldsymbol{B}$ la matrice des déformations linéarisées. On doit donc utiliser un schéma de quadrature numérique pour évaluer l'intégrale. Ce schéma contiendra n_{pt} points de coordonnées $\boldsymbol{\xi}_{p=1,n_{pt}}$, chacun d'un poids $\boldsymbol{\omega}_{p=1,n_{pt}}$ tels que :

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{B})\, d\Omega = \sum_{p=1}^{n_{pt}} \omega_p(\boldsymbol{\xi}_p)\, J(\boldsymbol{\xi}_p)\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_p)^T \boldsymbol{C}\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_p) \tag{80}$$

J est le jacobien de transformation de l'élément entre l'espace paramétrique et l'espace cartésien (voir §2.2). Le choix de ce schéma, sa précision en particulier, va dépendre de la nature de l'intégrande. Pour l'élément COQUE_SOLIDE, on va utiliser un schéma de type Lobatto à 5 points.
Ce schéma est trop « pauvre » et il va sous-estimer la rigidité de l'élément avec pour objectif de contrôler les verrouillages. Mais en procédant ainsi, on fait également apparaître des modes de déformations qu'on appelle « modes sabliers ». L'élément risque de changer de forme sans dépenser d'énergie, ce qui ne correspond pas à la physique. Pour minimiser ce problème, on va *stabiliser* l'élément par une technologie adéquate.
Le but de la procédure de stabilisation est de corriger le défaut de rang de la matrice de rigidité provenant du schéma d'intégration réduit adopté. Le lecteur est renvoyé aux importants travaux sur ce sujet de [Bib18], [Bib19], [Bib13], [Bib14], [Bib8], [Bib9], [Bib10]. Dans certaines formulations de coque-solides, la matrice jacobienne et son inverse ne sont évaluées qu'au centre de l'élément, voir par exemple [Bib21], [Bib22], [Bib23]. Une telle approximation suppose que l'élément réel peut être représenté par son parallélépipède équivalent. Et c'est assez précis pour les maillages fins et peu déformés.
Cependant pour les maillages qui sont fortement déformés à l'état initial, cette hypothèse montre un manque de précision [Bib10]. Afin de prendre en considération la forme réelle de l'élément et de stabiliser correctement la matrice de rigidité, une décomposition polynomiale de la matrice jacobienne inverse a été construite explicitement.

4.1.1 Stabilisation des déformations

Par ailleurs, pour le passage entre des quantités comme la déformation entre les coordonnées paramétriques et les coordonnées réelles, donné par la matrice $\boldsymbol{T}$, il convient d'utiliser une décomposition polynomiale cohérente avec celle choisie pour le jacobien en particulier. Il a été montré dans [Bib10] qu'une très bonne précision est atteinte en utilisant simplement les termes constants et linéaires de $\boldsymbol{T}$. Par conséquent, les termes bilinéaires sont ignorés :

$$\boldsymbol{T} \approx \boldsymbol{T}^0 + \xi \boldsymbol{T}^{\xi} + \eta \boldsymbol{T}^{\eta} + \zeta \boldsymbol{T}^{\zeta} \tag{81}$$

On va utiliser la même forme d'approximation sur $\boldsymbol{E}^u$ que sur $\hat{\boldsymbol{E}}^u$:

$$\boldsymbol{E}^u = \boldsymbol{T}\, \hat{\boldsymbol{E}}^u \approx \boldsymbol{E}^{u,0} + \zeta \boldsymbol{E}^{u,\zeta} + \zeta^2 \boldsymbol{E}^{u,\zeta\zeta} + \xi \boldsymbol{E}^{u,\xi} + \eta \boldsymbol{E}^{u,\eta} + \xi\eta \boldsymbol{E}^{u,\xi\eta} + \xi\zeta \boldsymbol{E}^{u,\xi\zeta} + \eta\zeta \boldsymbol{E}^{u,\eta\zeta} \tag{82}$$

Que l'on va diviser en deux composantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^u &= \boldsymbol{E}^{u,RI} + \boldsymbol{E}^{u,STAB} \\ \boldsymbol{E}^{u,RI} &= \boldsymbol{E}^{u,0} + \zeta \boldsymbol{E}^{u,\zeta} + \zeta^2 \boldsymbol{E}^{u,\zeta\zeta} \\ \boldsymbol{E}^{u,STAB} &= \xi \boldsymbol{E}^{u,\xi} + \eta \boldsymbol{E}^{u,\eta} + \xi\eta \boldsymbol{E}^{u,\xi\eta} + \xi\zeta \boldsymbol{E}^{u,\xi\zeta} + \eta\zeta \boldsymbol{E}^{u,\eta\zeta} \end{aligned} \tag{83}$$

Avec les expressions explicites suivantes :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}^{u,0}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}\\
\boldsymbol{E}^{u,\zeta}&=\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}+\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}\\
\boldsymbol{E}^{u,\zeta\zeta}&=\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}+\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta\zeta}\\
\boldsymbol{E}^{u,\xi}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi}+\boldsymbol{T}^{\xi}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}\\
\boldsymbol{E}^{u,\eta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta}+\boldsymbol{T}^{\eta}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}\\
\boldsymbol{E}^{u,\xi\eta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\eta}+\boldsymbol{T}^{\xi}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta}+\boldsymbol{T}^{\eta}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi}\\
\boldsymbol{E}^{u,\eta\zeta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta\zeta}+\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta}+\boldsymbol{T}^{\eta}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}\\
\boldsymbol{E}^{u,\xi\zeta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\zeta}+\boldsymbol{T}^{\xi}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}+\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi}
\end{aligned} \tag{84}$$

On utilisera la même décomposition pour le tenseur des déformations linéarisées et donc pour la matrice gradient :

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{B}}&=\hat{\boldsymbol{B}}^{RI}+\hat{\boldsymbol{B}}^{STAB}\quad\text{et}\quad\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\,\hat{\boldsymbol{B}}\\
\boldsymbol{B}^{RI}&=\boldsymbol{B}^{0}+\zeta\boldsymbol{B}^{\zeta}+\zeta^{2}\boldsymbol{B}^{\zeta\zeta}\\
\boldsymbol{B}^{STAB}&=\xi\boldsymbol{B}^{\xi}+\eta\boldsymbol{B}^{\eta}+\xi\eta\boldsymbol{B}^{\xi\eta}+\xi\zeta\boldsymbol{B}^{\xi\zeta}+\eta\zeta\boldsymbol{B}^{\eta\zeta}
\end{aligned} \tag{85}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}^{0}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{0}\\
\boldsymbol{B}^{\zeta}&=\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}^{0}+\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}\\
\boldsymbol{B}^{\zeta\zeta}&=\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}+\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta\zeta}\\
\boldsymbol{B}^{\xi}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi}+\boldsymbol{T}^{\xi}\hat{\boldsymbol{B}}^{0}\\
\boldsymbol{B}^{\eta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta}+\boldsymbol{T}^{\eta}\hat{\boldsymbol{B}}^{0}\\
\boldsymbol{B}^{\xi\eta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\eta}+\boldsymbol{T}^{\xi}\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta}+\boldsymbol{T}^{\eta}\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi}\\
\boldsymbol{B}^{\eta\zeta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta\zeta}+\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta}+\boldsymbol{T}^{\eta}\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}\\
\boldsymbol{B}^{\xi\zeta}&=\boldsymbol{T}^{0}\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\zeta}+\boldsymbol{T}^{\xi}\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}+\boldsymbol{T}^{\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi}
\end{aligned} \tag{86}$$

$\boldsymbol{E}^{u,STAB}$ et $\boldsymbol{B}^{STAB}$ représentent les termes annulés dans l'intégration réduite. Le processus de stabilisation consiste à restituer analytiquement ces termes dans la matrice de rigidité.
De plus, pour éliminer le verrouillage volumétrique, l'approche B-bar [Bib24] est adoptée. Par conséquent, les modes en sablier des opérateurs de déformation et de déplacement de déformation stabilisée est divisée en composants volumétriques et déviatoriques :

$$\boldsymbol{B}^{STAB}=\boldsymbol{B}^{STAB}_{dev}(\xi,\eta,\zeta)+\boldsymbol{B}^{STAB}_{vol}(0,0,0) \tag{87}$$

Il n'y a a pas de terme constant dans l'expression de $\boldsymbol{B}^{STAB}$, donc :

$$\boldsymbol{B}^{STAB}_{vol}(0,0,0)=0 \tag{88}$$

Seule la partie déviatorique est conservée. On peut démontrer que la contribution $\boldsymbol{B}^{\xi\eta}$ (et $\boldsymbol{E}^{u,\xi\eta}$) est nulle dans l'écriture de la stabilisation.

4.1.2 Stabilisation des contraintes

On reprend dans l'expression de l'énergie de déformation de la structure la séparation entre les contributions venues de l'intégration réduite et de la stabilisation :

$$W(\boldsymbol{E})=W^{RI}(\boldsymbol{E}^{u,RI})+W^{STAB}(\boldsymbol{E}^{u,STAB}) \tag{89}$$

Le tenseur de contraintes de seconde espèce de Piola-Kirchhoff étant la dérivée de cette énergie par rapport aux déformations de Green-Lagrange, on a :

$$\boldsymbol{S}=\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}}=\frac{\partial W^{RI}}{\partial \boldsymbol{E}^{u,RI}}\frac{\partial \boldsymbol{E}^{u,RI}}{\partial \boldsymbol{E}}+\frac{\partial W^{STAB}}{\partial \boldsymbol{E}^{u,STAB}}\frac{\partial \boldsymbol{E}^{u,STAB}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{90}$$

On retrouve la séparation entre les deux contributions (intégration réduite et stabilisation) pour le tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{RI}(\boldsymbol{E}^{u,RI})+\boldsymbol{S}^{STAB}(\boldsymbol{E}^{u,STAB}) \tag{91}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le tenseur $\boldsymbol{S}^{RI}$ vient directement de l'intégration de la loi de comportement tandis que le tenseur $\boldsymbol{S}^{STAB}$ correspond aux termes de contraintes pour la stabilisation.
Le point clé de la stabilisation est de trouver un moyen optimal d'évaluer cette contrainte de stabilisation sans l'intégrer afin que le temps de calcul soit minimisé. Or, comme expliqué précédemment, pour éviter le verrouillage volumétrique, seule la partie déviatorique du tenseur de stabilisation de Piola Kirchhoff est conservée. Ce faisant, la stabilisation de la contrainte est donnée comme :

$$\boldsymbol{S}^{STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}:\boldsymbol{E}^{u,STAB} \tag{92}$$

$\boldsymbol{C}^{STAB}$ étant la partie déviatorique du comportement de Saint-Venant Kirchhoff :

$$\boldsymbol{C}^{STAB}=\mu^{STAB}\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{93}$$

Avec le module de cisaillement μ^{STAB}, qui, pour un matériau élastique isotrope vaut :

$$\mu_{elas}^{STAB}=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{94}$$

Pour les matériaux non-élastiques, l'utilisation du module de cisaillement élastique conduit à une surestimation de la contrainte de stabilisation. Pour surmonter ce problème, le module sécant tel que défini dans [Bib20] est utilisé :

$$2\mu^{STAB}=\sqrt{\frac{\pi_S}{\pi_E}} \tag{95}$$

Avec :

$$\pi_S=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{dev}:\boldsymbol{S}_{dev} \quad \text{et} \quad \pi_E=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{dev}^{u}:\boldsymbol{E}_{dev}^{u} \tag{96}$$

Cette manière d'évaluer le paramètre de stabilisation est très pratiques car il n'y a pas besoin de linéarisation cohérente de la matrice ce stabilisation, ce qui est très intéressant en termes de temps de calcul. De plus, la définition proposée de $\boldsymbol{C}^{STAB}$ assure une stabilisation efficace et robuste.

4.1.3 Stabilisation des opérateurs discrets

En reprenant les définitions précédentes, on calcule la contribution μ^{STAB} de la manière suivante. A chaque point de Gauss g on calcule $\pi_S^{\,g}$ et $\pi_E^{\,g}$ puis on considère les deux situations suivantes :

1. Si $|\pi_E^{\,g}|<0{,}001$) alors $\mu^{STAB,g}=\boldsymbol{K}_{vol}^{g}$. C'est à dire que le coefficient de stabilisation au point de Guass courant g est égal à la partie volumique de la matrice de comportement matériau si la déformation déviatorique est inférieure à 0.1 %;
2. Sinon $\mu^{STAB,g}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi_S^g}{\pi_E^g}}$;

Puis le coefficient de stabilisation est sommé sur chaque point de Gauss :

$$\mu^{STAB}=\mu^{STAB,g}+\frac{\omega_g}{8} \tag{97}$$

La stabilisation des contraintes dans le cas des petites déformations, consiste à calculer les différentes contributions de la manière suivante (on rappelle que le terme $\xi\eta$ ne contribue pas) :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\xi}=\boldsymbol{B}^{\xi}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta}=\boldsymbol{B}^{\eta}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\xi\zeta}=\boldsymbol{B}^{\xi\zeta}\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta\zeta,STAB}=\boldsymbol{B}^{\eta\zeta}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{\xi,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{\varepsilon}^{\xi} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\eta,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{\varepsilon}^{\eta} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\xi\zeta,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{\varepsilon}^{\xi\zeta} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\eta\zeta,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{\varepsilon}^{\eta\zeta} \tag{98}$$

Et en grandes déformations :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\xi,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{E}^{u,\xi} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\eta,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{E}^{u,\eta} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\xi\zeta,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{E}^{\xi\zeta} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\eta\zeta,STAB}=\boldsymbol{C}^{STAB}\boldsymbol{E}^{\eta\zeta} \tag{99}$$

Le processus de linéarisation de Newton de l'équation d'équilibre produit deux opérateurs : la matrice tangente consistante et le vecteur des forces internes. Les deux vont donc devoir intégrer la stabilisation puisqu'ils dépendent des contraintes. Pour la matrice tangente, il y a deux contributions :

- la première concerne la stabilisation liée aux contraintes issues de l'intégration de la loi de comportement (matrice matérielle), c'est-à-dire la matrice $\boldsymbol{K}_m^{uu}$;
- la seconde correspond au modèle de grande déformation, c'est la partie géométrique qui vient de la non-linéarité cinématique, soit la matrice $\boldsymbol{K}_q^{uu}$.

Pour la stabilisation de la matrice tangente matérielle, on a quatre contributions :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_m^{STAB,\xi}&=\left(\boldsymbol{B}^{\xi}\right)^T\boldsymbol{C}^{STAB}\left(\boldsymbol{B}^{\xi}\right)\\ \boldsymbol{K}_m^{STAB,\eta}&=\left(\boldsymbol{B}^{\eta}\right)^T\boldsymbol{C}^{STAB}\left(\boldsymbol{B}^{\eta}\right)\\ \boldsymbol{K}_m^{STAB,\xi\zeta}&=\left(\boldsymbol{B}^{\xi\zeta}\right)^T\boldsymbol{C}^{STAB}\left(\boldsymbol{B}^{\xi\zeta}\right)\\ \boldsymbol{K}_m^{STAB,\eta\zeta}&=\left(\boldsymbol{B}^{\eta\zeta}\right)^T\boldsymbol{C}^{STAB}\left(\boldsymbol{B}^{\eta\zeta}\right)\end{aligned} \tag{100}$$

Ce qui nous donne la matrice globale de stabilisation matérielle avec le jacobien de changement de coordonnées (27) :

$$\boldsymbol{K}_m^{STAB}=\frac{8}{3}J_0\left(\boldsymbol{K}_m^{STAB,\xi}+\boldsymbol{K}_m^{STAB,\eta}\right)+\frac{8}{9}J_0\left(\boldsymbol{K}_m^{STAB,\xi\zeta}+\boldsymbol{K}_m^{STAB,\eta\zeta}\right) \tag{101}$$

Pour la partie géométrique, comme la contribution est le produit d'une matrice (géométrique) avec les contraintes, il faut aussi le faire par un produit pour la stabilisation, pour chaque nœud i et j :

$$\boldsymbol{K}_{g,ij}^{STAB}=\frac{8}{3}J_0\left(\boldsymbol{G}_{ij}^{u,\xi}\boldsymbol{\sigma}^{\xi,STAB}+\boldsymbol{G}_{ij}^{u,\eta}\boldsymbol{\sigma}^{\eta,STAB}\right)+\frac{8}{9}J_0\left(\boldsymbol{G}_{ij}^{u,\eta\zeta}\boldsymbol{\sigma}^{\eta\zeta,STAB}+\boldsymbol{G}_{ij}^{u,\xi\zeta}\boldsymbol{\sigma}^{\xi\zeta,STAB}\right) \tag{102}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5 Élément hexaédrique à neuf nœuds (SB9)

L'élément SB9 a neuf nœuds, un point d'intégration dans le plan et plusieurs points d'intégration le long de la direction de l'épaisseur de l'élément.
Par rapport aux autres briques «à coque solide» à huit nœuds, la présence d'un nœud supplémentaire a deux objectifs principaux :

- Obtenir d'abord une composante de déformation normale linéaire qui, avec un comportement de déformation-contrainte constitutif tridimensionnel complet, permet d'obtenir des résultats similaires dans les cas de flexion que ceux obtenus avec la contrainte plane habituelle. Pour cela, le neuvième nœud joue le rôle d'un paramètre supplémentaire essentiel pour obtenir une interpolation quadratique du déplacement dans le sens de l'épaisseur.
- De plus, ce DDL a une signification physique et, par exemple, une force équivalente à une pression normale peut être prescrite pour améliorer la contrainte normale lorsque la structure de la coque est moyennement épaisse.

5.1 Géométrie de la brique à huit nœuds

La position initiale $\boldsymbol{X}$ d'une particule est interpolée par des fonctions de formes définies dans l'espace paramétrique de l'élément :

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{8} N_i(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{X}^i \tag{103}$$

De même pour la position courante $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{8} N_i(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{x}^i \tag{104}$$

avec $\boldsymbol{X}^i$ et $\boldsymbol{x}^i$ les valeurs nodales de la position dans l'espace paramétrique, pour les huit nœuds :

Nœud	ξ	η	ζ
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	+1	+1	-1
4	-1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	+1	+1	+1
8	-1	+1	+1

Les fonctions de forme N_i pour chaque nœud i sont le produit cartésien des fonctions linéaires suivant les trois directions :

$$N_i(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{8}\left(1+\xi_i\xi\right)\left(1+\eta_i\eta\right)\left(1+\zeta_i\zeta\right) \quad \text{avec } \left(\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right)=\pm1,\pm1,\pm1 \text{ pour } i=1,\ldots,8 \tag{105}$$

Ce qu'on résume par la combinaison linéaire suivante :

$$N_i(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{8}\left(1+\xi a_1^i+\eta a_2^i+\zeta a_3^i+\xi\eta h_1^i+\eta\zeta h_2^i+\xi\zeta h_3^i+\xi\eta\zeta h_4^i\right) \tag{106}$$

Avec les vecteurs isoparamétriques suivants :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1&=\{-1,+1,+1,-1,-1,+1,+1,-1\}\\ \boldsymbol{a}_2&=\{-1,-1,+1,+1,-1,-1,+1,+1\}\\ \boldsymbol{a}_3&=\{-1,-1,-1,-1,+1,+1,+1,+1\}\end{aligned} \quad (107)$$

Des vecteurs auxiliaires sont définis à partir des combinaisons précédentes des vecteurs isoparamétriques:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_1&=\{-1,-1,+1,-1,+1,-1,+1,-1\}\\ \boldsymbol{h}_2&=\{+1,+1,-1,-1,-1,-1,+1,+1\}\\ \boldsymbol{h}_3&=\{+1,-1,-1,+1,-1,+1,+1,-1\}\\ \boldsymbol{h}_4&=\{-1,+1,-1,+1,+1,-1,+1,-1\}\end{aligned} \quad (108)$$

Les dérivées des fonctions de forme (par rapport aux coordonnées paramétriques) s'écrivent comme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\boldsymbol{\xi})&=\frac{1}{8}\left(a_1^i+\eta h_1^i+\zeta h_3^i+\eta\zeta h_4^i\right)\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\boldsymbol{\xi})&=\frac{1}{8}\left(a_2^i+\xi h_1^i+\zeta h_2^i+\xi\zeta h_4^i\right)\\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}(\boldsymbol{\xi})&=\frac{1}{8}\left(a_3^i+\eta h_2^i+\xi h_3^i+\xi\eta h_4^i\right)\end{aligned} \quad (109)$$

5.2 Interpolation des déplacements

L'élément est isoparamétrique et n'utilise que les déplacements aux nœuds (pas les rotations). Ces déplacements s'écriront donc avec les mêmes fonctions de forme que la géométrie :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{i=1}^{8} N_i(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{u}^i \quad (110)$$

Et les dérivées :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}.\boldsymbol{u}^i \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \eta}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}.\boldsymbol{u}^i \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \zeta}=\sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}.\boldsymbol{u}^i \quad (111)$$

5.3 Calcul des jacobiens

De (28), la matrice jacobienne $\boldsymbol{J}$ se décompose en composantes constantes, linéaires et bi-linéaires :

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^0+\xi\boldsymbol{J}^{\xi}+\eta\boldsymbol{J}^{\eta}+\zeta\boldsymbol{J}^{\zeta}+\xi\eta\boldsymbol{J}^{\xi\eta}+\eta\zeta\boldsymbol{J}^{\eta\zeta}+\xi\zeta\boldsymbol{J}^{\xi\zeta} \quad (112)$$

Chaque composante est une matrice 3×3 et vaut :

$$\boldsymbol{J}^0=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{X}_3\\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{X}_3\\ \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{X}_3\end{bmatrix} \quad (113)$$

$$\boldsymbol{J}^{\xi}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_3\\ \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_3\end{bmatrix} \quad (114)$$

$$\boldsymbol{J}^{\eta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_3\\ 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_3\end{bmatrix} \quad (115)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{J}^{\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_3\\ \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{116}$$

$$\boldsymbol{J}^{\xi\eta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_3\end{bmatrix} \tag{117}$$

$$\boldsymbol{J}^{\xi\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{118}$$

$$\boldsymbol{J}^{\eta\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{119}$$

En pratique, il y a 12 quantités non-nulles différentes (des vecteurs lignes), que l'on notera ainsi :

$$\boldsymbol{J}_1^0=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{X}_2^i,\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{120}$$

$$\boldsymbol{J}_2^0=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{121}$$

$$\boldsymbol{J}_3^0=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{122}$$

$$\boldsymbol{J}_2^{\xi}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{123}$$

$$\boldsymbol{J}_3^{\xi}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{124}$$

$$\boldsymbol{J}_1^{\eta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{125}$$

$$\boldsymbol{J}_3^{\eta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{126}$$

$$\boldsymbol{J}_1^{\zeta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{127}$$

$$\boldsymbol{J}_2^{\zeta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{128}$$

$$\boldsymbol{J}_3^{\xi\eta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{129}$$

$$\boldsymbol{J}_2^{\xi\zeta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{130}$$

$$\boldsymbol{J}_1^{\eta\zeta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{X}_3\right\} \tag{131}$$

La stratégie utilisée dans le cas de $\boldsymbol{J}$ sera identique pour $\boldsymbol{D}$. En particulier, de manière similaire à (113 - 119), on a :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{D}^{0}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{U}_3\end{bmatrix} \tag{132}$$

$$\boldsymbol{D}^{\xi}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_3\end{bmatrix} \tag{133}$$

$$\boldsymbol{D}^{\eta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_3\\ 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_3\end{bmatrix} \tag{134}$$

$$\boldsymbol{D}^{\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{135}$$

$$\boldsymbol{D}^{\xi\eta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_3\end{bmatrix} \tag{136}$$

$$\boldsymbol{D}^{\xi\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{137}$$

$$\boldsymbol{D}^{\eta\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{138}$$

Avec une dépendance au déplacement $\boldsymbol{U}$ au lieu de la position $\boldsymbol{X}$. De même :

$$\boldsymbol{D}_1^{0}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{U}_2^{i},\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{139}$$

$$\boldsymbol{D}_2^{0}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{140}$$

$$\boldsymbol{D}_3^{0}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{141}$$

$$\boldsymbol{D}_2^{\xi}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{142}$$

$$\boldsymbol{D}_3^{\xi}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{143}$$

$$\boldsymbol{D}_1^{\eta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_1\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{144}$$

$$\boldsymbol{D}_3^{\eta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{145}$$

$$\boldsymbol{D}_1^{\zeta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_3\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{146}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\boldsymbol{D}_2^{\xi}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_2\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{147}$$

$$\boldsymbol{D}_3^{\xi\eta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{148}$$

$$\boldsymbol{D}_2^{\xi\xi}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{149}$$

$$\boldsymbol{D}_1^{\eta\zeta}=\frac{1}{8}\left\{\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_2,\boldsymbol{h}_4\cdot\boldsymbol{U}_3\right\} \tag{150}$$

5.4 Calcul des petites déformations

On rappelle la décomposition du tenseur des petites déformations dans l'espace paramétrique (40) :

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\hat{\boldsymbol{B}}^0+\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}+\zeta^2\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta\zeta}+\xi\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta\zeta} \tag{151}$$

Dans le plan (membrane), les composantes pour chaque nœud i sont les suivantes :

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^0=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} a_1^i\boldsymbol{J}_1^0 \\ a_2^i\boldsymbol{J}_2^0 \\ 0 \\ a_1^i\boldsymbol{J}_2^0+a_2^i\boldsymbol{J}_1^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{152}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^{\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} h_3^i\boldsymbol{J}_1^0+a_1^i\boldsymbol{J}_1^{\zeta} \\ h_2^i\boldsymbol{J}_2^0+a_2^i\boldsymbol{J}_2^{\zeta} \\ 0 \\ h_2^i\boldsymbol{J}_1^0+h_3^i\boldsymbol{J}_2^0+a_2^i\boldsymbol{J}_1^{\zeta}+a_1^i\boldsymbol{J}_2^{\zeta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{153}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^{\xi}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 \\ h_1^i\boldsymbol{J}_2^0+a_2^i\boldsymbol{J}_2^{\xi} \\ 0 \\ h_1^i\boldsymbol{J}_1^0+a_1^i\boldsymbol{J}_2^{\xi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{154}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^{\eta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} h_1^i\boldsymbol{J}_1^0+a_1^i\boldsymbol{J}_1^{\eta} \\ 0 \\ 0 \\ h_1^i\boldsymbol{J}_2^0+a_2^i\boldsymbol{J}_1^{\eta}0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{155}$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^{\eta\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} h_1^i \boldsymbol{J}_1^0+a_1^i \boldsymbol{J}_1^\eta \\ 0 \\ 0 \\ h_1^i \boldsymbol{J}_2^0+a_2^i \boldsymbol{J}_1^\eta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{156}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^{\xi\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 \\ h_4^i \boldsymbol{J}_2^0+h_2^i \boldsymbol{J}_2^\xi+h_1^i \boldsymbol{J}_2^\zeta+a_2^i \boldsymbol{J}_2^{\xi\zeta} \\ 0 \\ h_4^i \boldsymbol{J}_1^0+h_3^i \boldsymbol{J}_2^\xi+h_1^i \boldsymbol{J}_1^\zeta+a_1^i \boldsymbol{J}_2^{\xi\zeta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{157}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^{\zeta\zeta}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} h_3^i \boldsymbol{J}_1^\zeta \\ h_2^i \boldsymbol{J}_2^\zeta \\ 0 \\ h_2^i \boldsymbol{J}_1^\zeta+h_3^i \boldsymbol{J}_2^\zeta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{158}$$

Avec les différents vecteurs lignes composantes $\boldsymbol{J}_k^{\xi_i}$ données par (120-131) et a_m^i la i-ème composante (scalaire) du nœud i extrait des vecteurs $a_{m=1,2,3}$ définis par (107) et de même pour h_n^i la i-ème composante (scalaire) du nœud i extrait des vecteurs $h_{n=1,2,3,4}$ définis par (108).

Par ailleurs, la matrice globale au niveau de l'élément sera obtenu par assemblage sur tous les nœuds de la maille sur le modèle suivant :

$$\hat{\boldsymbol{B}}_m^0=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} a_1^1 \boldsymbol{J}_1^0 & \cdots & a_1^8 \boldsymbol{J}_1^0 \\ a_2^1 \boldsymbol{J}_2^0 & \cdots & a_2^8 \boldsymbol{J}_2^0 \\ a_1^1 \boldsymbol{J}_2^0+a_2^1 \boldsymbol{J}_1^0 & \cdots & a_1^8 \boldsymbol{J}_2^0+a_2^8 \boldsymbol{J}_1^0 \end{bmatrix} \tag{159}$$

Une matrice $\hat{\boldsymbol{B}}_m^{'}$ sur l'élément est donc de dimension 3×24 .

Remarques :

- on n'a pas écrit l'expression explicite de la composante $\hat{\boldsymbol{B}}_{m,i}^{\xi\eta}$ car la procédure de stabilisation supprime ce terme ;
- la partie hors-membrane sera vue lorsque l'on appliquera la méthode ANS.

5.5 Calcul des grandes déformations

On rappelle la décomposition du tenseur des petites déformations dans l'espace paramétrique de (50) :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^u=\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}+\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}+\zeta^2\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta\zeta}+\xi\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta\zeta} \tag{160}$$

Les termes de décomposition en membrane valent :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{\boldsymbol{E}}_m^{u,0}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_1^0+\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_1^0\\ \boldsymbol{J}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_2^0+\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_2^0\\ 0\\ \boldsymbol{J}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_2^0+\boldsymbol{J}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_1^0+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_2^0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (161)$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_m^{u,\zeta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_1^\zeta+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{J}_1^\zeta+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_1^\zeta\\ \boldsymbol{J}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_2^\zeta+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{J}_2^\zeta+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_2^\zeta\\ 0\\ \boldsymbol{J}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_2^0+\boldsymbol{J}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_1^0+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_2^0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (162)$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_m^{u,\xi}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{J}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_2^\xi+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{J}_2^\xi+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_2^\xi\\ 0\\ \boldsymbol{J}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_2^\xi+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{J}_2^\xi+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_2^\xi\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (163)$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_m^{u,\eta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_1^\eta+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{J}_1^\eta+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_1^\eta\\ 0\\ 0\\ \boldsymbol{J}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_1^\eta+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{J}_1^\eta+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_1^\eta\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (164)$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_m^{u,\xi\zeta}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{D}_2^{\xi\zeta}\cdot\boldsymbol{J}_2^0+\boldsymbol{D}_2^\zeta\cdot\boldsymbol{J}_2^\xi+\boldsymbol{D}_2^\xi\cdot\boldsymbol{J}_2^\zeta+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{J}_2^{\xi\zeta}+\boldsymbol{D}_2^0\cdot\boldsymbol{D}_2^{\xi\zeta}+\boldsymbol{D}_2^\xi\cdot\boldsymbol{D}_2^\zeta\\ 0\\ \boldsymbol{D}_2^{\xi\zeta}\cdot\boldsymbol{J}_1^0+\boldsymbol{D}_1^\zeta\cdot\boldsymbol{J}_2^\xi+\boldsymbol{D}_2^\xi\cdot\boldsymbol{J}_1^\zeta+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{J}_2^{\xi\zeta}+\boldsymbol{D}_1^0\cdot\boldsymbol{D}_2^{\xi\zeta}+\boldsymbol{D}_2^\xi\cdot\boldsymbol{D}_1^\zeta\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (165)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{\boldsymbol{E}}_m^{u,\zeta\zeta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1^{\zeta}\cdot\boldsymbol{J}_1^{\zeta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_1^{\zeta}\cdot\boldsymbol{D}_1^{\zeta}\\ \boldsymbol{D}_2^{\zeta}\cdot\boldsymbol{J}_2^{\zeta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_2^{\zeta}\cdot\boldsymbol{D}_2^{\zeta}\\ 0\\ \boldsymbol{D}_2^{\zeta}\cdot\boldsymbol{J}_1^{\zeta}+\boldsymbol{D}_1^{\zeta}\cdot\boldsymbol{J}_2^{\zeta}+\boldsymbol{D}_2^{\zeta}\cdot\boldsymbol{D}_1^{\zeta}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad (166)$$

5.6 Méthode des déformations postulées (ANS)

Comme nous l' est d'utiliser la méthode ANS. oints des bords médians de la ertains auteurs proposent de m bien connue de Reissner. Ce typ aillement sur les faces supérieure Cependant dans olation devient fausse et elle plus, une telle interpolation ne avec frottement puisque la défor de l'élément. Il a également ét ditionnée. Pour éviter ces incon [Bib8], [Bib9] et [Bib11].

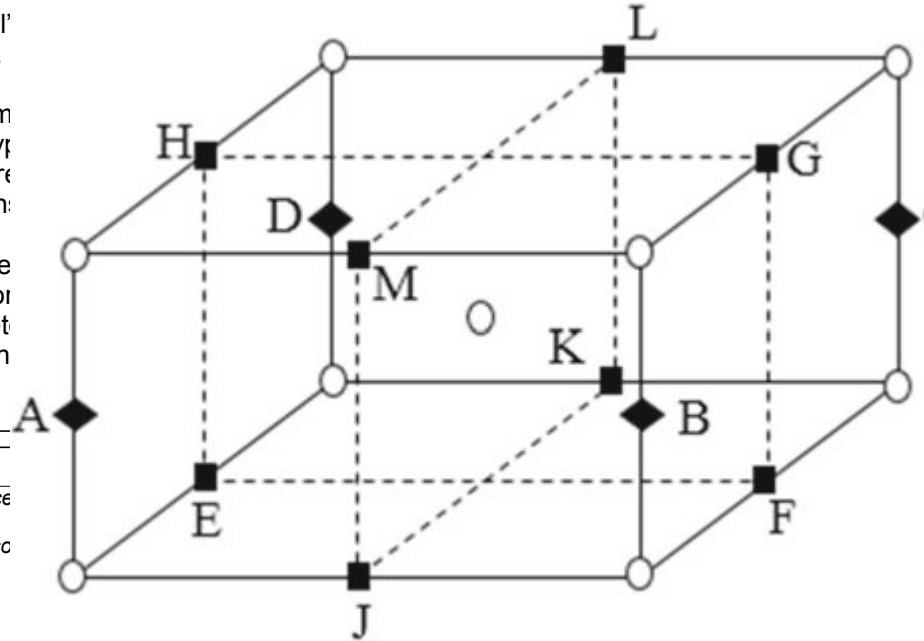


Figure 5.6-1: Points et nœuds de l'élément HEXA8

Dans l'espace paramétrique, chacune des déformations de cisaillement $\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\zeta}$ et $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\eta\zeta}$ est interpolée en utilisant la déformation de cisaillement équivalente à partir de quatre points de liaison différents (figure 5.6-1).

5.6.1 Méthode ANS en petites déformations

On rappelle que la partie ***linéaire*** du tenseur des déformations s'écrit en fonction des déplacements :

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{U} \tag{167}$$

Sur la matrice $\hat{\boldsymbol{B}}$, on écrit donc une interpolation spécifique pour les composantes de cisaillement et normales. Pour $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\xi\zeta}$, la matrice $\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\zeta}$ utilise une interpolation sur les nœuds J, K, L et M :

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\zeta}_{ANS}=N_J^{\xi\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_J^{\xi\zeta}+N_K^{\xi\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_K^{\xi\zeta}+N_L^{\xi\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_L^{\xi\zeta}+N_M^{\xi\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_M^{\xi\zeta} \tag{168}$$

Avec les fonctions de forme suivantes :

$$N_i^{\xi\zeta}=\frac{1}{4}\left(1+\zeta_i\zeta\right)\left(1+\eta_i\eta\right) \tag{169}$$

Pour $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\eta\zeta}$, la matrice $\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta\zeta}$ utilise une interpolation sur les nœuds E, F, G et H :

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta\zeta}_{ANS}=N_E^{\eta\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_E^{\eta\zeta}+N_F^{\eta\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_F^{\eta\zeta}+N_G^{\eta\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_G^{\eta\zeta}+N_H^{\eta\zeta}\hat{\boldsymbol{B}}_H^{\eta\zeta} \tag{170}$$

Avec les fonctions de forme suivantes :

$$N_i^{\eta\zeta}=\frac{1}{4}\left(1+\zeta_i\zeta\right)\left(1+\xi_i\xi\right) \tag{171}$$

Les coordonnées des nœuds dans l'espace paramétrique $\left\{\xi_i,\eta_i,\zeta_i\right\}$ sont données dans le §5.1. Afin d'éliminer le verrouillage dans l'épaisseur pour le cas courbe, nous postulerons la déformation de pincement suggérée par [Bib15], [Bib16], [Bib10] telle que :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta\zeta}_{ANS}=N_A\hat{\boldsymbol{E}}_A^{\zeta\zeta}+N_B\hat{\boldsymbol{E}}_B^{\zeta\zeta}+N_C\hat{\boldsymbol{E}}_C^{\zeta\zeta}+N_D\hat{\boldsymbol{E}}_D^{\zeta\zeta} \tag{172}$$

Avec les fonctions de forme suivantes :

$$N_i^{\zeta\zeta}=\frac{1}{4}\left(1+\eta_i\eta\right)\left(1+\xi_i\xi\right) \tag{173}$$

On note de manière compacte les sommes suivantes :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_{A,B,C,D}}&=\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_A}+\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_B}+\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_C}+\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_D}\\
\xi_{ABCD}\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_{A,B,C,D}}&=\xi_A\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_A}+\xi_B\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_B}+\xi_C\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_C}+\xi_D\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_D}\\
\eta_{ABCD}\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_{A,B,C,D}}&=\eta_A\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_A}+\eta_B\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_B}+\eta_C\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_C}+\eta_D\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_D}\\
\zeta_{ABCD}\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_{A,B,C,D}}&=\zeta_A\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_A}+\zeta_B\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_B}+\zeta_C\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_C}+\zeta_D\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi_m}\right|_{\xi_D}
\end{aligned} \tag{174}$$

Où η_A désigne par exemple la cordonnée paramétrique η pour le nœud A et de manière équivalente pour les groupes de nœuds E,F,G,H et J,K,L,M. Les composantes pour chaque nœud i sont les suivantes pour la partie relative à l'intégration réduite :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{0}_{ANS,i}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J^{3}_{ABCD}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right|_{\xi_{A,B,C,D}}\right) \\ 0 \\ J^{3}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right)+J^{1}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right) \\ J^{3}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right|_{\xi_{E,F,G,H}}\right)+J^{2}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right|_{\xi_{E,F,G,H}}\right) \end{bmatrix} \quad (175)$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta}_{ANS,i}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \zeta_{JKLM}J^{3}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right)+\zeta_{JKLM}J^{1}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right) \\ \zeta_{EFGH}J^{3}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right|_{\xi_{E,F,G,H}}\right)+\zeta_{EFGH}J^{2}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right|_{\xi_{E,F,G,JH}}\right) \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\zeta\zeta}_{ANS,i}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

E t pour la partie correspondant à la stabilisation :

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi}_{ANS,i}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi_{ABCD}J^{3}_{ABCD}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right|_{\xi_{A,B,C,D}}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{EFGH}J^{3}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right|_{\xi_{E,F,G,H}}\right)+\xi_{EFGH}J^{2}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\right|_{\xi_{E,F,G,H}}\right) \end{bmatrix} \quad (178)$$

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta}_{ANS,i}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\\eta_{ABCD}J^{3}_{ABCD}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\right|_{\xi_{A,B,C,D}}\right)\\0\\\eta_{JKLM}J^{3}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right)+\eta_{JKLM}J^{1}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right)\\0\end{bmatrix} \tag{179}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\eta\zeta}_{ANS,i}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\eta_{JKLM}\zeta_{JKLM}J^{3}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right)+\eta_{JKLM}\zeta_{JKLM}J^{1}_{JKLM}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\right|_{\xi_{J,K,L,M}}\right)\\0\end{bmatrix} \tag{180}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{\xi\zeta}_{ANS,i}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\xi_{EFGH}\zeta_{EFGH}J^{3}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\right|_{\xi_{E,F,G,H}}\right)+\xi_{EFGH}\zeta_{EFGH}J^{2}_{EFGH}\left(\left.\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\right|_{\xi_{E,F,G,H}}\right)\end{bmatrix} \tag{181}$$

5.6.2 Méthode ANS en grandes déformations

5.6.3 Matrice géométrique

La matrice géométrique intervient dans deux cas :

- en non-linéaire quand on utilise des grandes déformations, le processus de linéarisation fait apparaître une contribution d'origine géométrique, voir (71) ;
- pour faire des calculs de stabilité (flambement), ce qui correspond dans code_aster à l'option `RIGI_GEOM` , voir [R7.05.01].

Dans les deux cas, la forme générale de cette matrice est la suivante:

$$\boldsymbol{K}^{uu}_{g}=\int_{\Omega_0}\hat{\boldsymbol{B}}^{T}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}\,d\Omega_0 \tag{182}$$

On va exprimer l'opérateur $\boldsymbol{G}$ tell que :

$$\boldsymbol{G}=\int_{\Omega_0}\hat{\boldsymbol{B}}^{T}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\boldsymbol{u}}d\Omega_0 \tag{183}$$

Comme l'approximation de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}$ ont utilisé une décomposition en polynômes, on gardera la même logique de décomposition pour $\boldsymbol{G}$ (et le même schéma d'intégration numérique de Lobatto). De même on aura le même changement de repère entre l'espace paramétrique de l'élément et l'espace réel :

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{G}} \tag{184}$$

La décomposition choisie est donc de la forme suivante :

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\hat{\boldsymbol{G}}=\hat{\boldsymbol{G}}^{0}+\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta}+\zeta^{2}\hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta\zeta}+\xi\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{G}}^{\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\eta\zeta} \quad (185)$$

Par ailleurs, on aura également une contribution venant de l'intégration réduite et une pour stabiliser :

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{G}}&=\hat{\boldsymbol{G}}^{u}+\hat{\boldsymbol{G}}^{STAB} \quad \text{avec}\\ \hat{\boldsymbol{G}}^{u}&=\hat{\boldsymbol{G}}^{0}+\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta}+\zeta^{2}\hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta\zeta}\\ \hat{\boldsymbol{G}}^{STAB}&=\xi\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{G}}^{\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{G}}^{\eta\zeta}\end{aligned} \quad (186)$$

On écrit les composantes de ce tenseur sous forme de vecteur :

$$\hat{\boldsymbol{G}}=\left\{\hat{\boldsymbol{G}}_{\xi\xi},\hat{\boldsymbol{G}}_{\eta\eta},\hat{\boldsymbol{G}}_{\zeta\zeta},\hat{\boldsymbol{G}}_{\xi\eta},\hat{\boldsymbol{G}}_{\eta\zeta},\hat{\boldsymbol{G}}_{\xi\zeta}\right\} \quad (187)$$

Pour chaque couple de nœud $i\times j$, on a les expressions explicites de ces composantes. Pour la membrane :

$$\hat{\boldsymbol{G}}^{0}_{m,ij}=\begin{Bmatrix}a^{i}_{1}a^{j}_{1}\\ a^{i}_{2}a^{j}_{2}\\ 0\\ a^{i}_{1}a^{j}_{2}+a^{j}_{1}a^{i}_{2}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\quad \hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta}_{m,ij}=\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}h^{i}_{3}a^{j}_{1}+h^{j}_{3}a^{i}_{1}\\ h^{i}_{2}a^{j}_{2}+h^{j}_{2}a^{i}_{2}\\ 0\\ h^{i}_{2}a^{j}_{1}+h^{i}_{3}a^{j}_{2}+h^{j}_{3}a^{i}_{2}+h^{j}_{2}a^{i}_{1}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\quad \hat{\boldsymbol{G}}^{\zeta\zeta}_{m,ij}=\frac{1}{8}\begin{Bmatrix}h^{i}_{3}h^{j}_{3}\\ h^{i}_{2}h^{j}_{2}\\ 0\\ h^{i}_{2}h^{j}_{3}+h^{i}_{3}h^{j}_{2}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \quad (188)$$

Les cotnributions de cisaillement utilisent la méthode ANS.

antes paramétriques, l'intégration réduite utilisant un schéma de points alignés suivant l'épaisseur, on a :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{u,RI}=\hat{\boldsymbol{E}}^{u,0}+\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta}+\zeta^{2}\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\zeta\zeta} \quad (189)$$

Et la stabilisation qui correspond aux modes de déformation dans les autres directions :

$$\hat{\boldsymbol{E}}^{u,STAB}=\xi\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi}+\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta}+\xi\eta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\eta}+\xi\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\xi\zeta}+\eta\zeta\hat{\boldsymbol{E}}^{u,\eta\zeta} \quad (190)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange dans le repère p

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Références

[Bib1] McNeal R. – *Finite elements: their design and performance* – Marcel Dekker Eds – 1994.

[Bib2] Simo J. C., Fox D. D., Rifai M. S. – *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 79, N°1, 1990, p. 21–70.

[Bib3] Simo J. C., Rifai M. – *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. International journal for numerical methods in engineering, vol. 29, N°8, 1990, p. 1595–1638.

[Bib4] Simo J.-C., Armero F. – Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, N°7, 1992, p. 1413–1449.

[Bib5] Simo J., Armero F., Taylor R. – *Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 110, N°3-4, 1993, p. 359–386.

[Bib6] Adam L., Ponthot J.-P. – *Thermomechanical modeling of metals at finite strains: first and mixed order finite elements*. International Journal of Solids and Structures, vol. 42, N°21-22, 2005, p. 5615–5655.

[Bib7] Dia M., Hamila N., Abbas M., Gravouil A. – *A nine nodes solid-shell finite element with enhanced pinching stress*. Computational Mechanics, vol. 65, 2020, p. 1377–1395.

[Bib8] Alves de Sousa R. J., Cardoso R. P., Fontes Valente R. A., Yoon J.-W., Grácio J. J., Natal Jorge R. M.– *A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I—geometrically linear applications*. International journal for numerical methods in engineering, vol. 62, N°7, 2005, p. 952–977.

[Bib9] Alves de Sousa R. J., Cardoso R. P., Fontes Valente R. A., Yoon J.-W., Grácio J. J., Natal Jorge R. M. – *A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness—part II: nonlinear applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 67, N°2, 2006, p. 160–188.

[Bib10] Schwarze M., Reese S. – *A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept—Geometrically linear problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 80, N°10, 2009, p. 1322–1355.

[Bib11] Reese S. – *A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 69, N°8, 2007, p.1671–1716.

[Bib12] Legay A., Combescure A. – *Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 57, N°9, 2003, p. 1299–1322.

[Bib13] Cardoso R. P., Yoon J. W., Mahardika M., Choudhry S., Alves de Sousa – *Enhanced assumed strain (EAS) and assumed natural strain (ANS) methods for one-point quadrature solid-shell elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 75, N°2, 2008, p. 156–187.

[Bib14] Cardoso R. P., Yoon J. W. *One point quadrature shell element with through-thickness stretch*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, N°9, 2005, p. 1161–1199.

[Bib15] Bischoff M., Ramm E. – *Shear deformable shell elements for large strains and rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, N°23, 1997, p. 4427–4449.

[Bib16] Betsch P., Gruttmann F., Stein E. – *A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 130, N°1-2, 1996, p. 57–79.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

[Bib17] Militello C., Felippa C. A. – *A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements — I. Variational principles*. Computers & Structures, vol. 34, N°3, 1990, p. 431–438.

[Bib18] Liu W. K., Guo Y., Tang S., Belytschko T. – *A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 154, N°1-2, 1998, p. 69–132.

[Bib19] Belytschko T., Tsay C.-S. – *A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, N°3, 1983, p. 405–419.

[Bib20] Belytschko T., Bindeman L. P. – *Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 105, N°2, 1993, p. 225–260.

[Bib21] Bassa B., Sabourin F., Brunet M. – *A new nine-node solid-shell finite element using complete 3D constitutive laws*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 92, N°7, 2012, p. 589–636.

[Bib22] Abed-Meraim F., Combescure A. – *SHB8PS—-a new adaptative, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis*. Computers & Structures, vol. 80, N°9, 2002, p. 791–803.

[Bib23] Abed-Meraim F., Combescure A. – *An improved assumed strain solid–shell element formulation with physical stabilization for geometric non-linear applications and elastic–plastic stability analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 80, N°13, 2009, p. 1640–1686.

[Bib24] Hughes T. J. – *Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 15, N°9, 1980, p. 1413–1418.

Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)